

夯实必备知识 发展关键能力 提升数学素养

——高考数学函数、导数、方程与不等式的命题特点及解法探略*

张 兴 (宁夏回族自治区固原市第二中学 756000)

摘 要 函数、导数、不等式和方程知识模块承载着许多重要的数学知识、数学方法和数学思想,能够集中体现数学核心素养.本文就以高考数学函数模块的题型结构及解法探究为话题,研究如何利用数学必备知识发展学生数学关键能力,达到提升学生数学学科素养的目的.

关键词 高考数学;函数与导数;方程与不等式;数学素养

文章编号 1004-1176(2023)08-0048-04

函数知识是高中数学的重要内容.函数思想和方法贯穿于高中数学全过程;不等式与方程是函数的特殊形态;导数是解决函数问题的工具,也是中学数学与大学数学知识的交汇点.所以函数、导数、不等式和方程是高中数学最基础又具广阔发展前景的知识模块,它承载着许多重要的数学知识、方法和思想,能够集中体现数学核心素养.本文就以高考数学函数模块的题型结构及解法探究为话题,研究如何利用数学必备知识,发展学生数学关键能力,达到提升学生数学学科素养的目的.

1 夯实必备知识

1.1 理解函数概念

函数概念是函数模块的核心概念和主干知识,主要包括映射与函数概念,函数的定义域、值域和解析式等知识.其中解析式是三要素中最具活力的要素,它是函数的代数呈现形式,函数的定义域、值域等所有性质都与解析式有着千丝万缕的联系,因而以解析式为载体求函数值、求最值、求参数是高考试题经久不衰的热点.

例 1 (2018 全国新课标 II 卷文 12) 已知 $f(x)$ 是定义域为 $(-\infty, +\infty)$ 的奇函数,满足 $f(1-x)=f(1+x)$. 若 $f(1)=2$, 则 $f(1)+f(2)+f(3)+\cdots+f(50)=$ ().

A. -50 B. 0 C. 2 D. 50

解析 $f(x)$ 是定义域为 $(-\infty, +\infty)$ 的奇函数,且 $f(1-x)=f(1+x)$, 所以 $f(3+x)=-f(x+1)=f(x-1)$, 故 $T=4$. 因此, $f(1)+f(2)+f(3)+\cdots+f(50)=12[f(1)+f(2)+f(3)+f(4)]+f(1)+f(2)$. 因为 $f(3)=-f(1)$, $f(4)=-f(2)$, 所以 $f(1)+f(2)+f(3)+f(4)=0$. 又 $f(2)=f(-2)=-f(2)$, 故 $f(2)=0$, 从而原式 $=f(1)=2$.

评析 本例先利用函数的奇偶性和对称性确定其周期为 4, 得 $f(1)+f(2)+f(3)+f(4)=0$, 转化为求 $f(1)+f(2)$, 而函数方程 $f(1+x)=f(1-x)$ 可用特值法求出 $f(2)$. 这类考试题都是以函数概念为背景, 涉及解析式、函数值、最值、值域、奇偶性和对称性等, 主要考查学生对函数概念及其本质的理解, 考查学生的数学抽象能力、转化化归能力和运算求解能力, 指向于学生的数学抽象、数学运算核心素养, 其解答程序为: 条件 $\rightarrow$ 解析式 $\rightarrow$ 结论.

1.2 把握函数图象

函数图象是函数模块的主干知识, 主要包括作图、识图和用图三个层面, 它是函数的直观呈现形式, 融函数概念及函数性质于一体, 是数形结合的典范, 因而也是高考试题经久不衰的热点. 以函数图象为背景, 涉及函数的对称性、零点、交点等问题的题型是高考中常见的题型.

例 2 (2016 新课标 II 卷文 12) 已知函数 $f(x)(x \in \mathbf{R})$ 满足 $f(x)=f(2-x)$, 若函数 $y=|x^2-2x-3|$ 与 $y=f(x)$ 图象的交点为

$(x_1, y_1), (x_2, y_2), \dots, (x_m, y_m)$, 则 $\sum_{i=1}^m x_i =$ ().

A. 0 B. m C. $2m$ D. $4m$

解析 由 $f(x)=f(2-x)$ 得 $f(x)$ 关于直线 $x=1$ 对称, 而 $y=|x^2-2x-3|=|(x-1)^2-4|$ 也关于直线 $x=1$ 对称, 故函数 $y=|x^2-2x-3|$

* 本文系宁夏师范学院“西部一流”学科(教育学学科)二期建设 2022 年专项研究资助项目“高中学生学科核心素养提升与教学改革的实践研究”(NXJKG22114)的阶段性研究成果.

3 | 与 $y=f(x)$ 图象的交点关于直线 $x=1$ 对称.

不妨设 $x_1 < x_2 < x_3 < \dots < x_m$, 则 $\frac{x_1 + x_m}{2} +$

$\frac{x_2 + x_{m-1}}{2} + \dots + \frac{x_m + x_1}{2} = m$, 即 $\sum_{i=1}^m x_i = m$, 故

选 B.

评析 本例利用函数图象对称性得到

$\frac{x_i + x_{m+1-i}}{2} = 1 (i=1, 2, \dots, m)$, 从而使问题得到

解决. 这类题的解答首先要: ① 掌握幂、指、对基本函数的图象特点; ② 掌握作出函数图象的常用方法及函数图象的平移、对折等变化; ③ 会进行图象的选择与对比, 会把函数的代数呈现形式转化为函数图象问题进行处理. 考查学生对函数性质及图象的理解, 考查学生的转化化归能力和运算求解能力. 指向于学生的数学抽象、几何直观和数学运算核心素养.

1.3 掌握函数性质

以函数性质为背景, 涉及比较大小、解不等式、求参数范围等问题的题型在高考中屡见不鲜. 不等式是函数的非零点形态, 因而所有的不等式都有它自己特殊的函数背景, 所以函数的思想方法也是解决不等式问题最基本、最有力的工具, 特别是函数极值和单调性, 更是比较大小和解不等式的重要工具.

例 3 (2015 新课标 II 卷理 12) 设函数 $f'(x)$ 是奇函数 $f(x) (x \in \mathbf{R})$ 的导函数, $f(-1)=0$, 当 $x > 0$ 时, $xf'(x) - f(x) < 0$, 则使得 $f(x) > 0$ 成立的 x 的取值范围是 ().

- A. $(-\infty, -1) \cup (0, 1)$
 B. $(1, +\infty) \cup (-1, 0)$
 C. $(-\infty, -1) \cup (-1, 0)$
 D. $(1, +\infty) \cup (0, 1)$

解析 记 $g(x) = \frac{f(x)}{x}$, 则 $g'(x) = \frac{xf'(x) - f(x)}{x^2}$. 因为当 $x > 0$ 时, $xf'(x) - f(x) < 0$, 故当 $x > 0$ 时, $g'(x) < 0$, 所以 $g(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递减. 又因为函数 $f(x) (x \in \mathbf{R})$ 是奇函数, 故函数 $g(x)$ 是偶函数, 所以 $g(x)$ 在 $(-\infty, 0)$ 上单调递增, 且 $g(-1) = g(1) = 0$. 当 $0 < x < 1$ 时, $g(x) > 0$, 则 $f(x) > 0$; 当 $x < -1$ 时, $g(x) < 0$, 则 $f(x) > 0$. 综上所述, 使得 $f(x) > 0$ 成立 x 的取值范围是 $(-\infty, -1) \cup (0, 1)$.

评析 从上述例题可以看出, 以函数为背景的不等式问题, 其解答首先要找到不等式问题的背景函数, 进而讨论其单调性或者作出图象, 最后利用单调性或者图象比较大小与解不等式. 主要考查比较大小、解不等式、不等式成立求参数范围等问题, 考查学生的转化化归能力和运算求解能力. 指向于学生的直观想象和数学运算核心素养.

1.4 熟练计算导数

导数是解决函数问题的有力工具, 导数为零是函数在该点取极值的必要条件; 二阶导数为零是该点为函数拐点的必要条件; 函数在某一点的导数是函数图象在该点的切线的斜率; 定积分则是函数图象围成的曲边梯形的面积. 这些知识是解决以导数运用为背景, 涉及函数的单调性、极值、切线与积分等问题的基本法则.

例 4 (2014 新课标 II 卷文 11) 若函数 $f(x) = kx - \ln x$ 在区间 $(1, +\infty)$ 单调递增, 则 k 的取值范围是 ().

- A. $(-\infty, -2]$ B. $(-\infty, -1]$
 C. $[2, +\infty)$ D. $[1, +\infty)$

解析 因为 $f(x)$ 在 $(1, +\infty)$ 上递增, 所以 $f'(x) \geq 0$ 恒成立, 故 $f'(x) = k - \frac{1}{x} \geq 0$, 从而 $k \geq 1 > \frac{1}{x}$, 因此 $k \in [1, +\infty)$, 选 D.

评析 导数与函数的单调性、极值、最值, 函数图象的切线, 曲边梯形的面积存在密切的联系. 有关函数导数问题的题型主要考查二次、三次、指数与对数的复合函数、混合函数的性质特点, 涉及函数的单调性、极值、极值点、值域, 函数图象的切线, 积分等问题. 切线问题的解答范式: 导数 $\rightarrow$ 切点 $\rightarrow$ 斜率 $\rightarrow$ 切线; 单调极值问题的解答范式: 定义域 $\rightarrow$ 导数 $\rightarrow$ 驻点 $\rightarrow$ 列表 $\rightarrow$ 图象, 主要考查学生的转化化归能力和运算求解能力. 指向于学生的数学抽象、直观想象、数学运算核心素养.

2 发展关键能力

高考函数与导数综合题, 涉及函数内容的各个方面与各个层次, 基本上每年的第一问都是从切线问题、单调性与极值这两个问题中选一个. 通过对高考试题解答方法的分析、提炼, 就会发现通性通法与灵活化归是解题的主要策略.

2.1 运用导数的几何意义处理切线问题

由导数的几何意义可知, 函数在某一点的导数就是函数图象在该点切线的斜率, 因而我们可

以利用导数解决函数图象的切线问题.

例 5 (2016 新课标 II 卷文 20) 已知函数 $f(x) = (x+1)\ln x - a(x-1)$.

(1) 当 $a=4$ 时, 求曲线 $y=f(x)$ 在 $(1, f(1))$ 处的切线方程;

(2) 略.

解析 (1) 定义域为 $(0, +\infty)$. 当 $a=4$ 时, $f(x) = (x+1)\ln x - 4(x-1)$, $f'(x) = \ln x + \frac{1}{x} - 3$, $f'(1) = -2$, $f(1) = 0$, 故曲线 $y=f(x)$ 在 $(1, f(1))$ 处的切线方程为 $y = -2(x-1)$, 即 $2x + y - 2 = 0$.

评析 切线问题涉及过曲线上某一点的切线, 大多与求参数值结合在一起, 或者求切线方程, 这类题的解析过程实际上就是知识的形成过程. 其核心步骤为求导数、写切点(有则写, 无则设)、求斜率、写切线, 有字母则需列方程和解方程.

2.2 运用导数的函数意义处理单调极值问题

由导数的函数意义可知, 若函数在某区间的导数值为正, 则在该区间上为增函数; 若函数在某区间的导数值为负, 则在该区间上为减函数; 函数在一点的导数值为 0, 则在这一点可能取得极值. 因而可以利用导数解决函数的单调性与极值问题.

例 6 (2012 新课标卷文 21) 设函数 $f(x) = e^x - ax - 2$.

(1) 求 $f(x)$ 的单调区间;

(2) 若 $a=1$, k 为整数, 且当 $x > 0$ 时, $(x-k)f'(x) + x + 1 > 0$, 求 k 的最大值.

解析 (1) 函数 $f(x)$ 的定义域为 $(-\infty, +\infty)$, 且 $f'(x) = e^x - a$. 当 $a \leq 0$ 时, $f'(x) > 0$, $f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上是增函数. 当 $a > 0$ 时, 令 $f'(x) = e^x - a = 0$, 得 $x = \ln a$. 令 $f'(x) > 0$, 得 $x > \ln a$, 所以 $f(x)$ 在 $(\ln a, +\infty)$ 上是增函数; 令 $f'(x) < 0$, 得 $x < \ln a$, 所以 $f(x)$ 在 $(-\infty, \ln a)$ 上是减函数.

(2) 若 $a=1$, 则 $f(x) = e^x - x - 1$, $f'(x) = e^x - 1$. 所以 $(x-k)f'(x) + x + 1 = (x-k)(e^x - 1) + x + 1$, 故当 $x > 0$ 时, $(x-k)(e^x - 1) + x + 1 > 0$ 等价于 $k < \frac{xe^x + 1}{e^x - 1} = x + \frac{x+1}{e^x - 1}$, 即当 $x > 0$ 时, $k < \frac{x+1}{e^x - 1} + x (x > 0) (*)$. 令 $g(x) =$

$\frac{x+1}{e^x - 1} + x$, 则 $g'(x) = \frac{-xe^x - 1}{(e^x - 1)^2} + 1 = \frac{e^x(e^x - x - 2)}{(e^x - 1)^2}$. 由(1)知, 函数 $h(x) = e^x - x - 2$

在 $(0, +\infty)$ 单调递增, 而 $h(1) = e - 3 < 0$, $h(2) = e^2 - 4 > 0$, 所以 $h(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上存在唯一的零点. 故 $g'(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上存在唯一的零点. 设此零点为 α , 则 $\alpha \in (1, 2)$. 当 $x \in (0, \alpha)$ 时, $g'(x) < 0$; 当 $x \in (\alpha, +\infty)$ 时, $g'(x) > 0$. 所以 $g(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上的最小值为 $g(\alpha)$. 又由 $g'(\alpha) = 0$, 可得 $e^\alpha = \alpha + 2$, 所以 $g(\alpha) = \frac{\alpha+1}{e^\alpha - 1} + \alpha = \alpha + 1 \in (2, 3)$. 由于 $(*)$ 式等价于 $k < g(\alpha) = \alpha + 1 \in (2, 3)$, 故整数 k 的最大值为 2.

评析 函数单调性、极值与最值题型, 根据参数所居位置的不同, 有时求零点时讨论; 有时比较零点大小时讨论; 有时判断导数符号时讨论, 如第(2)题在判断符号时讨论参数. 讨论参数的取值, 简单一点的根据参数本身的特征, 如分式的分母不为零等; 复杂一点的要考虑自变量 x 的取值范围, 如第(2)题参照 x 范围讨论. 这类题解答的基本模式是: 求定义域、求导数、求极值点、判断符号、回答问题.

3 提升数学素养

高考函数与导数综合题的第二问都是从求参数值或范围、证明或解不等式、方程的根及函数零点这三个问题中选一个.

3.1 求参数

关于参数范围问题, 从内容上看大多为指数型函数的混合函数或复合函数, 从解答方法上看是导数函数意义的逆向思考法. 其解答方法主要有三种: 第一, 讨论参数法, 根据参数本身的特征或参考 x 的取值范围, 讨论参数的几个取值范围, 否定不适合条件的参数范围, 肯定适合条件的参数范围, 如上例(1)解法; 第二, 分离函数法, 将已知式子转化为指数式(或对数式) $\geq$ 函数的形式; 第三, 分离参数法, 从原式中分离参数或参数式, 利用“ $a \geq f(x)$, 则 $a \geq \max\{f(x)\}$ ”, 转化为最值问题求解.

例 7 (2010 新课标卷文 21) 设函数 $f(x) = x(e^x - 1) - ax^2$.

(1) 若 $a = \frac{1}{2}$, 求 $f(x)$ 的单调区间;

(2) 若当 $x \geq 0$ 时 $f(x) \geq 0$, 求 a 的取值

范围.

解析 (1) 若 $a = \frac{1}{2}$, 则 $f(x) = x(e^x - 1) - \frac{1}{2}x^2$, $f'(x) = e^x - 1 + xe^x - x = (e^x - 1)(x + 1)$. 当 $x \in (-\infty, -1)$ 时, $f'(x) > 0$; 当 $x \in (-1, 0)$ 时, $f'(x) < 0$; 当 $x \in (0, +\infty)$ 时, $f'(x) > 0$. 故 $f(x)$ 在 $(-\infty, -1), (0, +\infty)$ 上单调递增, 在 $(-1, 0)$ 上单调递减.

(2) $f(x) = x(e^x - 1 - ax)$. 令 $g(x) = e^x - 1 - ax$, 则 $g'(x) = e^x - a$. 若 $a \leq 1$, 则当 $x \in (0, +\infty)$ 时, $g'(x) > 0$, $g(x)$ 为增函数, 而 $g(0) = 0$, 从而当 $x \geq 0$ 时, $g(x) \geq 0$, 即 $f(x) \geq 0$. 若 $a > 1$, 则当 $x \in (0, \ln a)$ 时, $g'(x) < 0$, $g(x)$ 为减函数, 而 $g(0) = 0$, 从而当 $x \in (0, \ln a)$ 时, $g(x) < 0$, 即 $f(x) < 0$. 综合得 a 的取值范围为 $(-\infty, 1]$.

评析 对于不等式恒成立求参数范围问题, 可以利用分离参数法, 也可以使用讨论参数法, 把不适合条件的参数范围排除, 保留适合条件的参数范围, 其难点是分类讨论的时候需要参考自变量的取值范围.

3.2 证明不等式

例 8 (2013 新课标 II 卷理 21) 已知函数 $f(x) = e^x - \ln(x + m)$.

(1) 设 $x = 0$ 是 $f(x)$ 的极值点, 求 m , 并讨论 $f(x)$ 的单调性;

(2) 当 $m \leq 2$ 时, 证明 $f(x) > 0$.

解析 1 (1) 因为 $f'(x) = e^x - \frac{1}{x + m}$, $x = 0$ 是 $f(x)$ 的极值点, 所以 $f'(0) = 1 - \frac{1}{m} = 0$, 解得 $m = 1$, 所以函数 $f(x) = e^x - \ln(x + 1)$, 其定义域为 $(-1, +\infty)$. 因为 $f'(x) = e^x - \frac{1}{x + 1} = \frac{e^x(x + 1) - 1}{x + 1}$, 设 $g(x) = e^x(x + 1) - 1$, 则 $g'(x) = e^x(x + 1) + e^x > 0$, 所以 $g(x)$ 在 $(-1, +\infty)$ 上是增函数. 又因为 $g(0) = 0$, 所以当 $x > 0$ 时, $g(x) > 0$, 即 $f'(x) > 0$; 当 $-1 < x < 0$ 时, $g(x) < 0$, $f'(x) < 0$, 所以 $f(x)$ 在 $(-1, 0)$ 上是减函数, 在 $(0, +\infty)$ 上是增函数.

(2) 当 $m \leq 2$ 时, $x \in (-m, +\infty)$, $\ln(x + m) \leq \ln(x + 2)$, 故只需证明 $m = 2$ 时, $f(x) > 0$.

当 $m = 2$ 时, 函数 $f'(x) = e^x - \frac{1}{x + 2}$ 在 $(-2, +\infty)$ 上单调递增. $f'(-1) < 0$, $f'(0) > 0$, 故 $f'(x) = 0$ 在 $(-2, +\infty)$ 有唯一实根 x_0 , 且 $x_0 \in (-1, 0)$. 当 $x \in (-2, x_0)$ 时, $f'(x) < 0$; 当 $x \in (x_0, +\infty)$ 时, $f'(x) > 0$, 从而当 $x = x_0$ 时, $f(x)$ 取得最小值. 由 $f'(x_0) = 0$ 得 $e^{x_0} = \frac{1}{x_0 + 2}$,

$\ln(x_0 + 2) = -x_0$, 故 $f(x) \geq f(x_0) = \frac{1}{x_0 + 2} + x_0 = \frac{(x_0 + 1)^2}{x_0 + 2} > 0$. 综上, 当 $m \leq 2$ 时, $f(x) > 0$.

解析 2 (1) 略.

(2) 当 $m \leq 2$ 时, $x \in (-m, +\infty)$, $\ln(x + m) \leq \ln(x + 2)$, 只需 $e^x \geq \ln(x + 2)$, 而 $e^x \geq x + 1 \geq \ln(x + 2)$, 即证.

评析 本例第(2)问为函数不等式, 其证明有两种方法: 一是利用函数的方法进行证明, 即要证明 $f(x) > 0$ 只需要证明 $f(x)$ 的最小值大于 0; 二是利用不等式放缩的方法进行证明, 这种证明方法的关键是利用常用不等式 $e^x \geq x + 1$, $e^x \geq ex$, $\ln x \leq x + 1$, $\ln(x + 1) \leq x$ 等.

3.3 方程根及函数零点的问题

例 9 (2018 新课标 II 卷理 21) 已知函数 $f(x) = e^x - ax^2$.

(1) 若 $a = 1$, 证明: 当 $x \geq 0$ 时, $f(x) \geq 1$;

(2) 若 $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 只有一个零点, 求 a .

解析 (1) 当 $a = 1$ 时, $f(x) \geq 1$ 等价于 $(x^2 + 1)e^{-x} - 1 \leq 0$. 设函数 $g(x) = (x^2 + 1)e^{-x} - 1$, 则 $g'(x) = -(x^2 - 2x + 1)e^{-x} = -(x - 1)^2 e^{-x}$. 当 $x \neq 1$ 时, $g'(x) < 0$, 所以 $g(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递减, 而 $g(0) = 0$, 故当 $x \geq 0$ 时, $g(x) \leq 0$, 即 $f(x) \geq 1$.

(2) 设函数 $h(x) = 1 - ax^2 e^{-x}$, $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上只有一个零点, 当且仅当 $h(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上只有一个零点. 当 $a \leq 0$ 时, $h(x) > 0$, $h(x)$ 没有零点; 当 $a > 0$ 时, $h'(x) = ax(x - 2)e^{-x}$. 当 $x \in (0, 2)$ 时, $h'(x) < 0$; 当 $x \in (2, +\infty)$ 时, $h'(x) > 0$. 故 $h(x)$ 在 $(0, 2)$ 上单调递减, 在 $(2, +\infty)$ 上单调递增. 故 $h(2) = 1 - \frac{4a}{e^2}$ 是 $h(x)$ 在

(下转第 59 页)

建构,体悟到平行四边形定义是问题研究的逻辑起点,即定义是图形的充要条件,性质是一类图形的必要条件(尽可能多),而判定是一类图形的充分条件(尽可能少),两者互为逆命题.从概念中分离出图形构成要素和相关要素,明确平行四边形的研究核心是边与边的位置及大小关系,而对角线之间的位置关系是由图形旋转变换的经验而产生,帮助学生抓住知识的本源.

3.2 注重基本思想,体现单元整体教学的深度

数学思想是在知识发生、发展过程中反映出来的,是引导知识发生发展的脚手架和方向标.思想方法在何处出现,有什么用?在经历一类图形的整体研究过程中,关注思想方法在知识建构中的自然渗透.从情境创设到图形抽象,再到定义提取,关注数学抽象思想呈现的可视化路径.在平行四边形整体建构中,基于等腰三角形的学习经验,将原问题转化到三角形问题,体现整体转化思想.研究基本要素:边(构成要素大小),角(构成要素位置),对角线(相关要素位置),从实验到猜想,再到演绎证明,体现严谨的逻辑思维能力和整体学习的深度.

3.3 强调类比学法,体现单元整体教学的一致性

类比学习是沟通新知和旧知的有效途径.类比等腰三角形研究路径,整体规划,整体建构平行

四边形的逻辑体系,在完整经历问题发现、提出、分析和解决的过程中,完整地经历一类图形的整体研究过程,形成几何研究的一般路径,初步体会几何研究方式的一致性.根据学生实际情况,使学生厘清单元整体学习的两条主线,即知识线(明线):定义—性质—判定—应用;思想线(暗线):抽象思维—转化思想—类比思想—推理思想.整体建构知识体系使学生在数学学习中不断体悟学法和思维路径的一致性.

参考文献

- [1] 中华人民共和国教育部.义务教育数学课程标准(2022年版)[M].北京:北京师范大学出版社,2022:86.
- [2] 章建跃.数学教育随想录(下卷)[M].杭州:浙江教育出版社,2019:779-780.
- [3] 吴增生.单元整体教学中的若干重要问题及其思考[J].数学通报,2021,60(9):20-26.
- [4] 王明.设计适切情境 彰显思维生长——以“二次函数”教学为例[J].中学数学教学参考,2022(5):5-7.
- [5] 董林伟,孙朝仁.初中数学实验的课程设计[J].课程·教材·教法,2016,36(8):96-101.
- [6] 向毅,张维,赵国威,等.初中数学单元教学设计的探索与思考——以人教版“一次函数”一章为例[J].数学通报,2022,61(7):17-20,43.

(上接第51页)

$[0, +\infty)$ 上的最小值.①若 $h(2) > 0$, 即 $a < \frac{e^2}{4}$, $h(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 没有零点;②若 $h(2) = 0$, 即 $a = \frac{e^2}{4}$, $h(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上只有一个零点;③若 $h(2) < 0$, 即 $a > \frac{e^2}{4}$, 由于 $h(0) = 1$, 所以 $h(x)$ 在 $(0, 2)$ 内有一个零点.由(1)知, 当 $x > 0$ 时, $e^x > x^2$, 所以 $h(4a) = 1 - \frac{16a^3}{e^{4a}} = 1 - \frac{16a^3}{(e^{2a})^2} > 1 - \frac{16a^3}{(2a)^4} = 1 - \frac{1}{a} > 0$.故 $h(x)$ 在 $(2, 4a)$ 内有一个零点, 因此 $h(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上有两个零点.综上所述, $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上只有一个零点时, $a = \frac{e^2}{4}$.

评析 解决第(2)问的关键在于构造新的函数, 利用导数确定其单调区间和极值, 再结合零点

存在性定理即可解决.

4 结语

综上所述, 高考数学函数模块试题可分为两大类: 第一类是主干知识的基础全覆盖题型, 这类试题以数学知识方法为目标, 包括函数模块知识的“来龙”——集合问题, 函数模块知识的“现世”——函数概念性质和应用问题, 函数模块知识的“去脉”——线性规划问题. 第二类是主干知识的提高全覆盖题型, 这类试题以数学思想、数学能力为目标, 涉及切线问题、单调性与极值、求参数值或范围、证明或解不等式、方程的根及函数零点问题. 学生的数学核心素养不是孤立存在的, 而是互相依存、互相渗透的, 所以学生数学核心素养的培养必须以系统观为视角, 利用数学必备知识发展学生数学关键能力, 这是提升学生数学学科素养的不二法门.