

2023年6月新高考1卷数学解析

本试题卷分选择题和非选择题两部分。全卷共4页，选择题部分1至2页；

非选择题部分2至4页。满分150分，考试时间120分钟。

选择题部分（共60分）

一、单项选择题：本大题共8小题，每小题5分，共40分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

- 1: 已知集合 $M = \{-2, -1, 0, 1, 2\}$, $N = \{x \mid x^2 - x - 6 \geq 0\}$, 则 $M \cap N =$ ()
- A. $\{-2, -1, 0, 1\}$ B. $\{0, 1, 2\}$ C. $\{-2\}$ D. $\{2\}$

解析:

$N = (-\infty, -2] \cup [3, +\infty)$, 所以 $M \cap N = \{-2\}$; 故选 C.

- 2: 已知 $z = \frac{1-i}{2+2i}$, 则 $z - \bar{z} =$ ()
- A. $-i$ B. i C. 0 D. 1

解析:

$z = \frac{1-i}{2+2i} = -\frac{1}{2}i$, 所以 $z - \bar{z} = -i$; 故选 A.

- 3: 已知向量 $\vec{a} = (1, 1)$, $\vec{b} = (1, -1)$. 若 $(\vec{a} + \lambda\vec{b}) \perp (\vec{a} + \mu\vec{b})$, 则 ()
- A. $\lambda + \mu = 1$ B. $\lambda + \mu = -1$ C. $\lambda\mu = 1$ D. $\lambda\mu = -1$

解析:

$(\vec{a} + \lambda\vec{b}) \cdot (\vec{a} + \mu\vec{b}) = \vec{a}^2 + (\lambda + \mu)(\vec{a} \cdot \vec{b}) + \lambda\mu\vec{b}^2 = 2(1 + \lambda\mu) = 0$, 所以 $\lambda\mu = -1$; 故选 D.

- 4: 设函数 $f(x) = 2^{x(x-a)}$ 在区间 $(0, 1)$ 单调递减, 则 a 的取值范围是 ()
- A. $(-\infty, -2]$ B. $[-2, 0)$ C. $(0, 2]$ D. $[2, +\infty)$

易得, $\frac{a}{2} \geq 1$, 所以 a 的取值范围是 $[2, +\infty)$; 故选 D.

5: 设椭圆 $C_1: \frac{x^2}{a^2} + y^2 = 1 (a > 1)$, $C_2: \frac{x^2}{4} + y^2 = 1$ 的离心率分别为 e_1, e_2 . 若 $e_2 = \sqrt{3}e_1$, 则 $a =$ ()

- A. $\frac{2\sqrt{3}}{3}$ B. $\sqrt{2}$ C. $\sqrt{3}$ D. $\sqrt{6}$

解析:

易得, $e_1 = \frac{\sqrt{a^2-1}}{a}$, $e_2 = \frac{\sqrt{3}}{2}$, 得 $\frac{\sqrt{a^2-1}}{a} = \frac{1}{2}$, 解得 $a = \frac{2\sqrt{3}}{3}$; 故选 A.

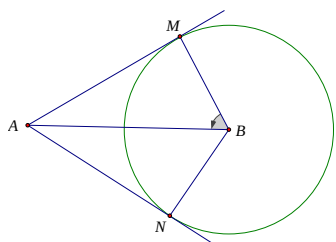
6: 过点 $(0, -2)$ 与圆 $x^2 + y^2 - 4x - 1 = 0$ 相切的两条直线的夹角为 α . 则 $\sin \alpha =$

- A. 1 B. $\frac{\sqrt{15}}{4}$ C. $\frac{\sqrt{10}}{4}$ D. $\frac{\sqrt{6}}{4}$

解析: $(x-2)^2 + y^2 = 5$, 故圆心 $B(2, 0)$, 记 $A(0, -2)$, 设切点为 M, N .

$$AB = 2\sqrt{2}, BM = \sqrt{5}, \text{ 故 } AM = \sqrt{3}, \sin \frac{\alpha}{2} = \sin \angle MBA = \frac{AM}{AB} = \frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}, \cos \frac{\alpha}{2} = \frac{\sqrt{5}}{2\sqrt{2}}$$

$$\sin \alpha = 2 \sin \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\alpha}{2} = \frac{\sqrt{15}}{4}, \text{ 故选 B}$$



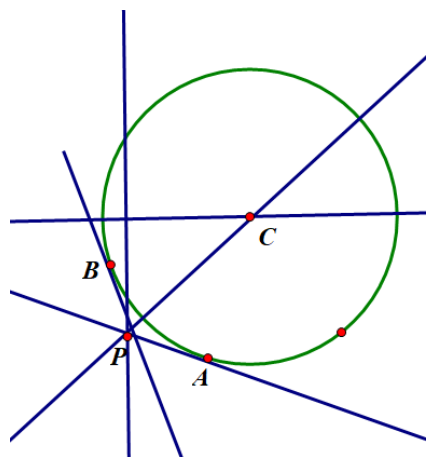
解析: (直线与圆相交问题)

因为 $(x-2)^2 + y^2 = 5$, 设圆心 $C(2, 0)$, $r = \sqrt{5}$. 设点 $P(0, -2)$, 则 $|PC| = 2\sqrt{2}$.

设过点 P 的两条切线 PA, PB . 则 $\angle APB = \alpha$. 则 $\sin \frac{\alpha}{2} = \frac{\sqrt{5}}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{10}}{4}$,

$$\cos \frac{\alpha}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{6}}{4}.$$

$$\text{故 } \sin \alpha = 2 \sin \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\alpha}{2} = 2 \times \frac{\sqrt{10}}{4} \times \frac{\sqrt{6}}{4} = \frac{\sqrt{15}}{4}. \text{ 故选 B}$$



7: 记 S_n 为数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和, 设甲: $\{a_n\}$ 为等差数列; 乙: $\left\{\frac{S_n}{n}\right\}$ 为等差数列, 则

- A.甲是乙的充分条件但不是必要条件
 B.甲是乙的必要条件但不是充分条件
 C.甲是乙的充要条件
 D.甲既不是乙的充分条件也不是乙的必要条件

解析 1:

a_n 为等差数列, 设其首项为 a_1 , 公差为 d , 则 $S_n = na_1 + \frac{n(n-1)}{2}d$, $\frac{S_n}{n} = a_1 + \frac{n-1}{2}d = \frac{d}{2}n + a_1 - \frac{d}{2}$, $\frac{S_{n+1}}{n+1} - \frac{S_n}{n} = \frac{d}{2}$,

故 $\left\{\frac{S_n}{n}\right\}$ 为等差数列, 则甲是乙的充分条件

反之, $\left\{\frac{S_n}{n}\right\}$ 为等差数列, 即 $\frac{S_{n+1}}{n+1} - \frac{S_n}{n} = \frac{nS_{n+1} - (n+1)S_n}{n(n+1)} = \frac{na_{n+1} - S_n}{n(n+1)}$ 为常数, 设为 t

即 $\frac{na_{n+1} - S_n}{n(n+1)} = t$, 故 $S_n = na_{n+1} - t \cdot n(n+1)$ 故 $S_{n-1} = (n-1)a_n - t \cdot n(n-1)$, $n \geq 2$

两式相减有: $a_n = na_{n+1} - (n-1)a_n - 2tn \Rightarrow a_{n+1} - a_n = 2t$, 对 $n=1$ 也成立, 故 $\{a_n\}$ 为等差数列

则甲是乙的必要条件

故甲是乙的充要条件, 故选 C

解析 2: (数列与充要条件)

因为甲: $\{a_n\}$ 为等差数列, 设数列 $\{a_n\}$ 的首项 a_1 , 公差为 d . 即 $S_n = na_1 + \frac{n(n-1)}{2}d$,

则 $\frac{S_n}{n} = a_1 + \frac{(n-1)}{2}d = \frac{d}{2}n + a_1 - \frac{d}{2}$, 故 $\left\{\frac{S_n}{n}\right\}$ 为等差数列, 即甲是乙的充分条件.

反之, 乙: $\left\{\frac{S_n}{n}\right\}$ 为等差数列. 即 $\frac{S_{n+1}}{n+1} - \frac{S_n}{n} = D$, $\frac{S_n}{n} = S_1 + (n-1)D$.

即 $S_n = nS_1 + n(n-1)D$.

$S_{n-1} = (n-1)S_1 + (n-1)(n-2)D$.

当 $n \geq 2$ 时, 上两式相减得: $S_n - S_{n-1} = S_1 + 2(n-1)d$. 当 $n=1$ 时, 上式成立.

所以 $a_n = a_1 + 2(n-1)D$. 又 $a_{n+1} - a_n = a_1 + 2nD - (a_1 + 2(n-1)D) = 2D$ 为常数. 所以 $\{a_n\}$ 为等差数列. 故

选 C

8: 已知 $\sin(\alpha - \beta) = \frac{1}{3}$, $\cos \alpha \sin \beta = \frac{1}{6}$, 则 $\cos(2\alpha + 2\beta) =$

- A. $\frac{7}{9}$ B. $\frac{1}{9}$ C. $-\frac{1}{9}$ D. $-\frac{7}{9}$

解析：（两角和差的三角函数）

因为 $\sin(\alpha - \beta) = \sin \alpha \cos \beta - \cos \alpha \sin \beta = \frac{1}{3}$, $\cos \alpha \sin \beta = \frac{1}{6}$, 则 $\sin \alpha \cos \beta = \frac{1}{2}$.

故 $\sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta = \frac{1}{2} + \frac{1}{6} = \frac{2}{3}$.

即 $\cos(2\alpha + 2\beta) = 1 - 2\sin^2(\alpha + \beta) = 1 - 2 \times \left(\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{1}{9}$. 故选 B

二、多项选择题：本大题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分。在每小题给出的四个选项中，有多项符合题目要求。全部选对得 5 分，部分选对的得 2 分，有选错的得 0 分。

9：一组样本数据 $x_1, x_2, \dots, x_6$ ，其中 x_1 是最小值， x_6 是最大值，则

A. x_2, x_3, x_4, x_5 的平均数等于 $x_1, x_2, \dots, x_6$ 的平均数

B. x_2, x_3, x_4, x_5 的中位数等于 $x_1, x_2, \dots, x_6$ 的中位数

C. x_2, x_3, x_4, x_5 的标准差不小于 $x_1, x_2, \dots, x_6$ 的标准差

D. x_2, x_3, x_4, x_5 的极差不大于 $x_1, x_2, \dots, x_6$ 的极差

解析： $\because \frac{x_2 + x_3 + x_4 + x_5}{4} - \frac{x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6}{6} = \frac{x_2 + x_3 + x_4 + x_5 - 2(x_1 + x_6)}{12} \neq 0$,

所以 A 错误；因为 x_1 是最小值， x_6 是最大值，所以 x_2, x_3, x_4, x_5 的中位数的位置与 $x_1, x_2, \dots, x_6$ 的中位数的位置相同，所以 B 正确；因为 x_1 是最小值， x_6 是最大值，距离数据 $x_1, x_2, \dots, x_6$ 的平均值大，即波动性大，所以标准差大，所以 C 错误；设 x_2, x_3, x_4, x_5 的最小值 x_2 ，最大值 x_5 ，则 $x_1 \leq x_2, x_5 \leq x_6$ ， $\therefore x_6 - x_1 \geq x_5 - x_2$ ，

所以 D 正确

故选 BD

10：噪声污染问题越来越受到重视.用声压级来度量声音的强弱，定义声压级 $L_p = 20 \times \lg \frac{p}{p_0}$ ，其中常数

$p_0 (p_0 > 0)$ 是听觉下限阈值， p 是实际声压.下表为不同声源的声压级：

声源	与声源的距离/m	声压级/dB
燃油汽车	10	60~90
混合动力汽车	10	50~60
电动汽车	10	40

已知在距离燃油汽车、混合动力汽车、电动汽车 10m 处测得实际声压分别为 p_1, p_2, p_3 ，则

- A. $p_1 \geq p_2$ B. $p_2 > 10p_3$ C. $p_3 = 100p_0$ D. $p_1 \leq 100p_2$

解析： $\because L_1 - L_2 = 20 \times \lg \frac{p_1}{p_0} - 20 \times \lg \frac{p_2}{p_0} = 20 \times \lg \frac{p_1}{p_2} \geq 0$ ， $\therefore \frac{p_1}{p_2} \geq 1$ ， $\therefore p_1 \geq p_2$ ， 所以 A 正确；

$\because L_2 - L_3 = 20 \times \lg \frac{p_2}{p_3} > 10$ ， $\therefore \lg \frac{p_2}{p_3} > \frac{1}{2}$ ， $\therefore \frac{p_2}{p_3} > e^{\frac{1}{2}}$ ， 所以 B 错误； $\because L_3 = 20 \times \lg \frac{p_3}{p_0} = 40$ ， $\therefore \frac{p_3}{p_0} = 100$ ， 所

以 C 正确； $\because L_1 - L_2 = 20 \times \lg \frac{p_1}{p_2} \leq 90 - 50 = 40$ ， $\therefore \lg \frac{p_1}{p_2} \leq 2$ ， $\therefore \frac{p_1}{p_2} \leq 100$ ， 所以 D 正确.

故选 ACD

11: 已知函数 $f(x)$ 的定义域为 R ， $f(xy) = y^2 f(x) + x^2 f(y)$ ， 则 ()

- A. $f(0) = 0$ B. $f(1) = 0$
C. $f(x)$ 是偶函数 D. $x = 0$ 为 $f(x)$ 的极小值点

解析： (抽象函数)

令 $x = y = 0$ ， 则 $f(0) = 0$ ， 故 A 正确； 令 $x = y = 1$ ， 则 $f(1) = f(1) + f(1)$ ， 即 $f(1) = 0$ ， 故 B 正确；

令 $x = y = -1$ ， 则 $f(1) = f(-1) + f(-1)$ ， 因为 $f(1) = 0$ ， 所以 $f(-1) = 0$ ； 令 $y = -1$ ， 则

$f(-x) = f(x) + x^2 f(-1) = f(x)$ ， 故 $f(x)$ 是偶函数， 故 C 正确； 令 $f(x) = \begin{cases} 0, & x = 0 \\ x^2 \ln|x|, & x \neq 0 \end{cases}$ 满足题意，

则当 $x > 0$ 时， $f(x) = x^2 \ln x$ ， $f'(x) = 2x \ln x + x^2 \cdot \frac{1}{x} = x(2 \ln x + 1) > 0$ ， $x > e^{-\frac{1}{2}}$ ； 令 $f'(x) < 0$ ， $0 < x < e^{-\frac{1}{2}}$ ，

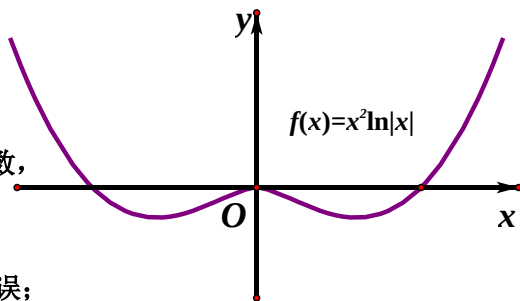
故 $f(x)$ 在 $(0, e^{-\frac{1}{2}})$ 单调递减， $(e^{-\frac{1}{2}}, +\infty)$ 单调递增，

且 $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln x}{\frac{1}{x^2}} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\frac{1}{x}}{-2 \frac{1}{x^3}} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x^2}{-2} = 0$ ， 又 $f(x)$ 是偶函数，

故 $f(x)$ 图象如图所示， 所以 $x = 0$ 为 $f(x)$ 的极大值点， 故 D 错误；

故选： ABC.

解析：



选项 A, 令 $x=y=0$, 则 $f(0)=0 \times f(0)+0 \times f(0)$, 则 $f(0)=0$, 故 A 正确;

选项 B, 令 $x=y=1$, 则 $f(1)=1 \times f(1)+1 \times f(1)$, 则 $f(1)=0$, 故 B 正确;

选项 C, 令 $x=y=-1$, 则 $f(1)=(-1)^2 \times f(-1)+(-1)^2 \times f(-1)$, 则 $f(-1)=0$,

再令 $y=-1$, 则 $f(-x)=(-1)^2 f(x)+x^2 f(-1)$, 即 $f(-x)=f(x)$, 故 C 正确;

选项 D, 对式子两边同时除以 $x^2 y^2 \neq 0$, 得到 $\frac{f(xy)}{x^2 y^2} = \frac{f(x)}{x^2} + \frac{f(y)}{y^2}$, 故可以设 $\frac{f(x)}{x^2} = \ln|x|, (x \neq 0)$,

故可以得到 $f(x) = \begin{cases} x^2 \ln|x|, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$, 故 D 选项不正确;

故选择 ABC.

12: 下列物体中,能够被整体放入棱长为 1(单位: m)的正方体容器 (容器壁厚度忽略不计)内的有

A.直径为 0.99m 的球体

B.所有棱长均为 1.4m 的四面体

C.底面直径为 0.01m,高为 1.8m 的圆柱体

D.底面直径为 1.2m,高为 0.01m 的圆柱体

解析:

选项 A, 球直径为 $0.99 < 1$, 故球体可以放入正方体容器内, 故 A 正确;

选项 B, 选择连接正方体的面对角线, 可以得到一个正四面体, 其棱长为 $\sqrt{2} > 1.4$, 故 B 正确;

选项 C, 底面直径 0.01m, 可以忽略不计, 但高为 $1.8 > \sqrt{3}$, $\sqrt{3}$ 为正方体的体对角线的长, 故 C 不正确;

选项 D, 底面直径为 $1.2 < \sqrt{3}$, 高为 0.01m 的圆柱体, 其高度可以忽略不计, 故 D 正确.

故选择 ABD.

非选择题部分 (共 90 分)

三、填空题: 本大题共 4 小题, 每小题 5 分, 共 20 分.

13: 某学校开设了 4 门体育类选修课和 4 门艺术类选修课, 学生需从这 8 门课中选修 2 门或 3 门课, 并且每类选修课至少选修 1 门, 则不同的选课方案共有_____种(用数字作答).

解析:

当从这 8 门课中选修 2 门课时, 共有 $C_4^1 \cdot C_4^1 = 16$; 当从这 8 门课中选修 3 门课时, 共有

$C_4^1 \cdot C_4^2 + C_4^2 \cdot C_4^1 = 48$; 综上, 共有 64 种.

故填: 64.

14: 在正四棱台 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中, $AB=2$, $A_1B_1=1$, $AA_1=\sqrt{2}$, 则该棱台的体积为_____.

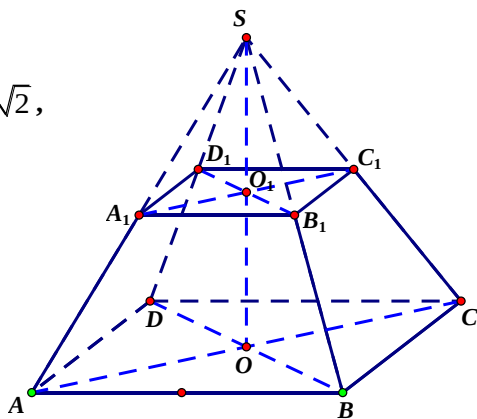
解析:

如图, 将正四棱台 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 补成正四棱锥, 则 $AO=\sqrt{2}$,

$SA=2\sqrt{2}$, $OO_1=\frac{\sqrt{6}}{2}$, 故 $V=\frac{1}{3}(S_1+S_2+\sqrt{S_1S_2})h$,

$V=\frac{1}{3}(2^2+1^2+\sqrt{2^2 \cdot 1^2}) \cdot \frac{\sqrt{6}}{2} = \frac{7\sqrt{6}}{6}$.

故填: $\frac{7\sqrt{6}}{6}$.



15: 已知函数 $f(x)=\cos \omega x-1(\omega>0)$ 在区间 $[0,2\pi]$ 有且仅有 3 个零点, 则 ω 的取值范围是_____.

解析: (三角函数及其性质)

令 $f(x)=\cos \omega x-1=0$, 得 $\cos \omega x=1$, 又 $x \in [0,2\pi]$, 则 $\omega x \in [0,2\omega\pi]$, 所以 $4\pi \leq 2\omega\pi < 6\pi$, 即 $2 \leq \omega < 3$.

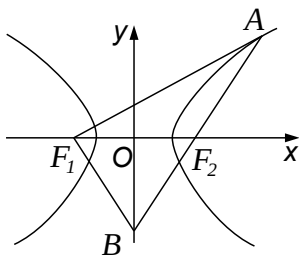
故填: $[2,3)$.

16: 已知双曲线 $C: \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1(a>0, b>0)$ 的左、右焦点分别为 F_1, F_2 . 点 A 在 C 上, 点 B 在 y 轴

上, $\overrightarrow{F_1A} \perp \overrightarrow{F_1B}$, $\overrightarrow{F_2A} = -\frac{2}{3}\overrightarrow{F_2B}$, 则 C 的离心率为_____.

解析 1: (坐标法)

建立如图所示坐标系, 依题意可以设 $F_1(-c,0), F_2(c,0), B(0,n)$,



由 $\overrightarrow{F_2A} = -\frac{2}{3}\overrightarrow{F_2B}$, 可得 $A\left(\frac{5}{3}c, -\frac{2}{3}n\right)$,

又 $\overrightarrow{F_1A} \perp \overrightarrow{F_1B}$, 且 $\overrightarrow{F_1A} = \left(\frac{8}{3}c, -\frac{2}{3}n\right)$, $\overrightarrow{F_1B} = (c, n)$, 则 $\overrightarrow{F_1A} \cdot \overrightarrow{F_1B} = \left(\frac{8}{3}c, -\frac{2}{3}n\right) \cdot (c, n) = \frac{8}{3}c^2 - \frac{2}{3}n^2 = 0$

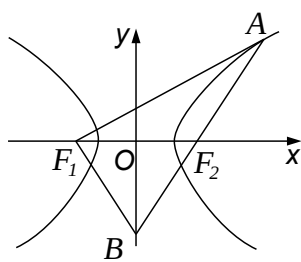
即 $n^2 = 4c^2$,

又点 A 在 C 上, 则 $\frac{25}{9}c^2 - \frac{4}{9}n^2 = 1$, 整理可得 $\frac{25c^2}{9a^2} - \frac{4n^2}{9b^2} = 1$, 代入 $n^2 = 4c^2$,

可得 $\frac{25c^2}{a^2} - \frac{16c^2}{b^2} = 9$, 即 $25e^2 - \frac{16e^2}{e^2 - 1} = 9$, 解之得 $e^2 = \frac{9}{5}$ 或 $\frac{1}{5}$ (舍去),

故 $e = \frac{3}{5}\sqrt{5}$.

解析 2: (解三角形)



由 $\overrightarrow{F_2A} = -\frac{2}{3}\overrightarrow{F_2B}$, 得 $\frac{|F_2A|}{|F_2B|} = \frac{2}{3}$, 设 $|F_2A| = 2x$, $|F_2B| = 3x$

由对称性可得 $|F_1B| = 3x$, 由定义可得, $|AF_1| = 2x + 2a$, $|AB| = 5x$, 设 $\angle F_1AF_1 = \theta$, 则

$\sin \theta = \frac{3x}{5x} = \frac{3}{5} \Rightarrow \cos \theta = \frac{4}{5} = \frac{2x + 2a}{5x}$, 解得 $x = a$, 所以 $|AF_1| = 2x + 2a$, $|AF_2| = 2a$

在 $\triangle AF_1F_2$ 中, 则余弦定理可得 $\cos \theta = \frac{16a^2 + 4a^2 - 4c^2}{16a^2} = \frac{4}{5}$, 即 $5c^2 = 9a^2$ 可得 $e = \frac{3}{5}\sqrt{5}$

四、解答题: 本大题共 6 小题, 共 70 分. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

17: 已知 $\triangle ABC$ 中, $A + B = 3C$, $2\sin(A - C) = \sin B$.

(1) 求 $\sin A$;

(2) 设 $AB = 5$, 求 AB 边上的高.

解析: (解三角形)

(1) 因为 $A+B+C=\pi$, $A+B=3C$, 所以 $C=\frac{\pi}{4}$. 即 $B+C=\frac{3\pi}{4}$. $B=\frac{3\pi}{4}-C$.

故 $2\sin\left(A-\frac{\pi}{4}\right)=\sin\left(\frac{3\pi}{4}-A\right)$. 即 $2\left(\sin A\cos\frac{\pi}{4}-\cos A\sin\frac{\pi}{4}\right)=\sin\frac{3\pi}{4}\cos A-\cos\frac{3\pi}{4}\sin A$.

得 $\sin A=3\cos A$. 又 $\sin^2 A+\cos^2 A=1$, $A\in(0,\pi)$. 得 $\sin A=\frac{3\sqrt{10}}{10}$.

(1) 解析: (恒等变形)

因为 $A+B=3C$, 所以 $A+B=3(\pi-A-B)$, 所以 $A+B=\frac{3\pi}{4}$, 所以 $C=\frac{\pi}{4}$

另外, 由题意得: $2\sin(A-C)=\sin(A+C)$

即 $2\sin A\cos C-2\cos A\sin C=\sin A\cos C+\cos A\sin C$

所以 $\sin A\cos C=3\cos A\sin C$, 所以 $\tan A=3\tan C=3$

所以 $\sin A=\frac{3\sqrt{10}}{10}$

(2) 方法一: (正弦定理+面积法)

因为 $\tan A=3>0$, 所以 $\frac{\pi}{4}<A<\frac{\pi}{2}$, 所以 $\cos A=\frac{\sqrt{10}}{10}$

所以 $\sin B=\sin(A+C)=\frac{3\sqrt{10}}{10}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{10}}{10}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{2\sqrt{5}}{5}$, 由 $\frac{AC}{\sin B}=\frac{AB}{\sin C}$ 解得 $AC=2\sqrt{10}$

所以 $S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}\cdot 5\cdot 2\sqrt{10}\cdot\frac{3\sqrt{10}}{10}=15$

设 AB 边上的高为 h , 则 $\frac{1}{2}\cdot AB\cdot h=15$, 解得 $h=6$

综上, AB 边上的高为 6

方法二: (正弦定理+解三角形)

由正弦定理得: $\frac{a}{\sin A}=\frac{c}{\sin C}$. $a=\frac{c\sin A}{\sin C}=\frac{5\times\frac{3\sqrt{10}}{10}}{\frac{\sqrt{2}}{2}}=3\sqrt{5}$. 因为 $\sin A>\sin C$. 即 $A>C$.

由 (1) 得 $\sin A=3\cos A$, 则 A 是锐角, $\cos A=\frac{\sqrt{10}}{10}$,

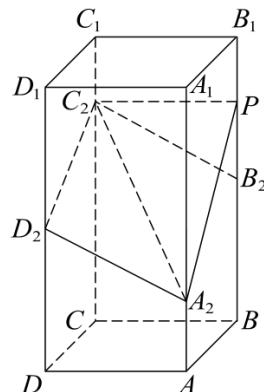
$\sin B=\sin(A+C)=\sin A\cos C+\cos A\sin C=\frac{3\sqrt{10}}{10}\times\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{10}}{10}\times\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{2\sqrt{5}}{5}$.

由正弦定理得: $\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}$. 得 $b=\frac{c\sin B}{\sin C}=\frac{5\times\frac{2\sqrt{5}}{5}}{\frac{\sqrt{2}}{2}}=2\sqrt{10}$. 故 AB 边上的高为 $b\sin A=2\sqrt{10}\times\frac{3\sqrt{10}}{10}=6$.

18: 如图, 在正四棱柱 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中, $AB=2, AA_1=4$. 点 A_2, B_2, C_2, D_2 分别是棱 AA_1, BB_1, CC_1, DD_1 上, $AA_2=1, BB_2=DD_2=2, CC_2=3$.

(1) 证明: $B_2C_2 \parallel A_2D_2$;

(2) 点 P 在棱 BB_1 上, 当二面角 $P-A_2C_2-D_2$ 为 150° 时, 求 B_2P .



证明: (1): 方法一: 如图, 连接 A_2B_2 , 在直角梯形 $C_1D_1D_2C_2$ 中, 易计算 $C_2D_2 = \sqrt{2}$, 同理得 $C_2B_2 = \sqrt{2}, A_2B_2 = \sqrt{2}, A_2D_2 = \sqrt{2}$, 所以 $C_2B_2A_2D_2$ 为平行四边形, 所以 $B_2C_2 \parallel A_2D_2$.

证明: (1): 方法二: 易得 $A_2B_2 = B_2C_2 = C_2D_2 = A_2D_2 = \sqrt{5}$, 所以四边形 $A_2B_2C_2D_2$ 是菱形, 所以 $B_2C_2 \parallel A_2D_2$.

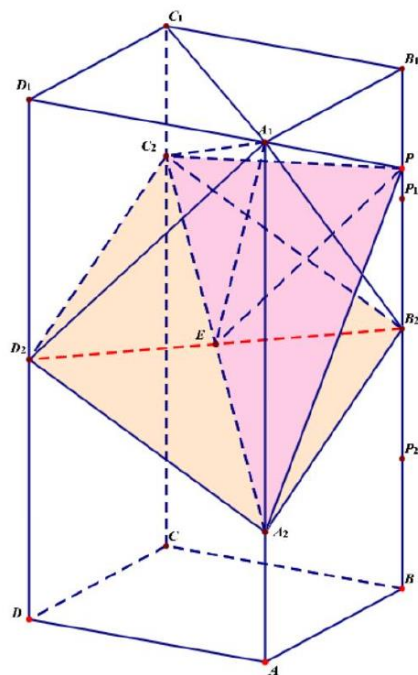
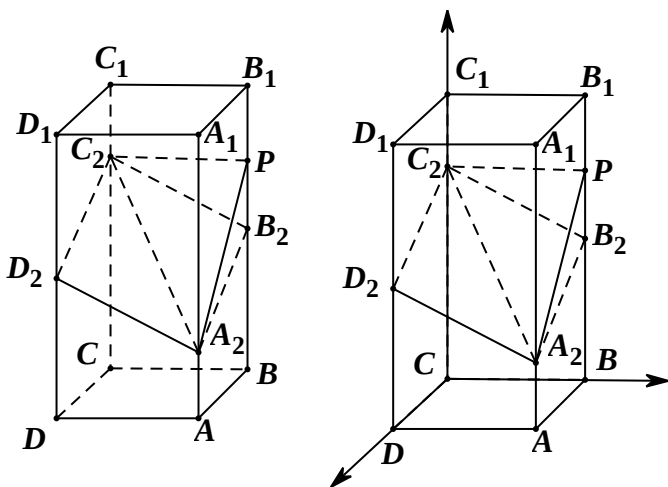
证明: (1): 方法三: $\overrightarrow{B_2C_2} = \overrightarrow{B_2B_1} + \overrightarrow{B_1C_1} + \overrightarrow{C_1C_2} = \overrightarrow{DD_2} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{A_2A} = \overrightarrow{A_2D_2} \Rightarrow B_2C_2 \parallel A_2D_2$

解析: (2): 方法一 (向量法) 如图, 以 C 为原点, 分别以 CD, CB, CC_1 为 x, y, z 轴建系, 则 $A_2(2, 2, 1), C_2(0, 0, 3), D_2(2, 0, 2), P(0, 2, t)$,

则 $\overrightarrow{A_2C_2} = (-2, -2, 2), \overrightarrow{A_2D_2} = (0, -2, 1), \overrightarrow{A_2P} = (-2, 0, t-1)$, 设 $\vec{n}_1 = (x_1, y_1, z_1), \vec{n}_2 = (x_2, y_2, z_2)$ 分别为平面 $A_2C_2D_2, A_2C_2P$ 的法向量, 则 $\begin{cases} -2x_1 - 2y_1 + 2z_1 = 0 \\ -2y_1 + z_1 = 0 \end{cases}$, 则 $\vec{n}_1 = (1, 1, 2)$, 同理 $\vec{n}_2 = (t-1, 3-t, 2)$, 则

$$\frac{\sqrt{3}}{2} = \left| \frac{6}{\sqrt{6} \times \sqrt{(t-1)^2 + (3-t)^2 + 4}} \right| \Rightarrow t^2 - 4t + 3 = 0, \text{ 则 } t=1 \text{ 或 } t=3, \text{ 则 } B_2P = |2-t| = 1.$$

注: 第一问也可直接建系



解析：(2)：方法二（几何法）（如上图 3）显然 $A_2B_2C_2D_2$ 为正方形，设 A_2C_2 与 B_2D_2 相交于点 E ，因为二面角 $P-A_2C_2-D_2$ 为 150° ，所以直线 B_2E 与平面 PA_2C_2 所成的角为 30°

易知 $B_2E = \sqrt{2}$ ，所以点 B_2 到平面 PA_2C_2 的距离为 $d_1 = B_2E \sin 30^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2}$

由 $A_1B_2 = A_1D_2 = 2\sqrt{2} \Rightarrow A_1E \perp B_2D_2$ ，由 $A_1C_2 = A_1A_2 = 3 \Rightarrow A_1E \perp A_2C_2$

所以 $A_1E \perp$ 平面 $A_2B_2C_2$ ，因为二面角 $P-A_2C_2-D_2$ 为 150°

所以 A_1E 与平面 PA_2C_2 所成的角为 60° ，易知 $A_1E = \sqrt{6}$

所以点 A_1 到平面 PA_2C_2 的距离为 $d_2 = A_1E \sin 60^\circ = \frac{3\sqrt{2}}{2}$ ，所以 $\frac{V_{A_1-PA_2C_2}}{V_{B_2-PA_2C_2}} = \frac{d_2}{d_1} = 3$

又由于 C_2 到平面 PA_1A_2 和平面 PA_2B_2 的距离都为 2

这里，平面 PA_1A_2 和平面 PA_2B_2 重合

所以 $\frac{S_{\triangle PA_1A_2}}{S_{\triangle PA_2B_2}} = 3$ ，所以 $A_1A_2 = 3B_2P = 3 \Rightarrow B_2P = 1$

也即 P 为 B_2B 的中点 P_1 或者 B_2B_1 的中点 P_2

19：已知函数 $f(x) = a(e^x + a) - x$ 。

(1) 讨论 $f(x)$ 的单调性；

(2) 证明：当 $a > 0$ 时，求证： $f(x) > 2\ln a + \frac{3}{2}$ 。

(1) 解析：（函数单调性）

由题知定义域为 R ，且 $f'(x) = ae^x - 1$

当 $a \leq 0$ 时， $f'(x) < 0$ ，故 $f(x)$ 在 R 上单调递减；

当 $a > 0$ 时， $f'(x) > 0$ ，则 $x > -\ln a$ ； $f'(x) < 0$ ，则 $x < -\ln a$ ；

故 $f(x)$ 在 $(-\infty, -\ln a)$ 单调递减，在 $(-\ln a, +\infty)$ 单调递增，

综上：当 $a \leq 0$ 时， $f(x)$ 在 R 单调递减；

当 $a > 0$ 时， $f(x)$ 在 $(-\infty, -\ln a)$ 单调递减，在 $(-\ln a, +\infty)$ 单调递增。

(2) 解析 1：（函数最值）

证明 1: 由 (1) 知: 当 $a > 0$ 时, $f(x)_{\min} = f(-\ln a) = a(e^{-\ln a} + a) + \ln a = 1 + a^2 + \ln a$

令 $g(a) = 1 + a^2 + \ln a - \left(2\ln a + \frac{3}{2}\right) = a^2 - \ln a - \frac{1}{2}$, 则 $g'(a) = 2a - \frac{1}{a} = \frac{2a^2 - 1}{a}$,

当 $g'(a) > 0$, 得 $a > \frac{\sqrt{2}}{2}$; 当 $g'(a) < 0$, 得 $0 < a < \frac{\sqrt{2}}{2}$, 故 $g(a)$ 在 $\left(0, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ 单调递减, 在 $\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, +\infty\right)$ 单调递

增, 故 $g(a) \geq g\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{1}{2} - \ln \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{1}{2} > 0$, 所以 $f(x) > 2\ln a + \frac{3}{2}$, 证毕.

(2) 解析 2: (切线放缩)

证明 2: 因为 $f(x) = a(e^x + a) - x = e^{x+\ln a} + a^2 - x \geq x + \ln a + 1 + a^2 - x = a^2 + \ln a + 1$ ($e^x \geq x + 1$)

令 $g(a) = 1 + a^2 + \ln a - \left(2\ln a + \frac{3}{2}\right) = a^2 - \ln a - \frac{1}{2}$, 则 $g'(a) = 2a - \frac{1}{a} = \frac{2a^2 - 1}{a}$,

当 $g'(a) > 0$, 得 $a > \frac{\sqrt{2}}{2}$; 当 $g'(a) < 0$, 得 $0 < a < \frac{\sqrt{2}}{2}$, 故 $g(a)$ 在 $\left(0, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ 单调递减, 在 $\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, +\infty\right)$ 单调递

增, 故 $g(a) \geq g\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{1}{2} - \ln \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{1}{2} > 0$, 所以 $f(x) > 2\ln a + \frac{3}{2}$, 证毕.

(2) 解析 3: (逆推分析)

当 $a > 0$ 时, 由 (1) 得 $f(x)_{\min} = f(-\ln a) = 1 + a^2 + \ln a$,

要证: $f(x) > 2\ln a + \frac{3}{2}$, 只需证: $1 + a^2 + \ln a > 2\ln a + \frac{3}{2}$,

$$\Leftrightarrow a^2 - \frac{1}{2} > \ln a, \text{ 易证 } \ln a \leq a - 1,$$

即证: $a^2 - \frac{1}{2} > a - 1 \Leftrightarrow a^2 - a + \frac{1}{2} > 0$, 成立

因为 $a^2 - a + \frac{1}{2} = \left(a - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{4} > 0$, 故 $f(x) > 2\ln a + \frac{3}{2}$ 成立, 得证!

(2) 解析 4: (同构+切线放缩)

证明 3: 当 $a > 0$ 时, 要证: $f(x) > 2\ln a + \frac{3}{2}$, 即证: $a(e^x + a) - x > 2\ln a + \frac{3}{2}$

只需证: $e^{x+\ln a} - (x + \ln a + 1) + \frac{1}{2}(a^2 - \ln a^2 - 1) + \frac{1}{2}a^2 > 0$,

又因为 $e^x \geq x + 1$, 故 $e^{x+\ln a} - (x + \ln a + 1) \geq 0$; 又 $\ln x \leq x - 1$, 故 $\frac{1}{2}(a^2 - \ln a^2 - 1) \geq 0$, 且 $\frac{1}{2}a^2 > 0$

故 $e^{x+\ln a} - (x + \ln a + 1) + \frac{1}{2}(a^2 - \ln a^2 - 1) + \frac{1}{2}a^2 > 0$ 显然成立,

所以 $f(x) > 2\ln a + \frac{3}{2}$, 证毕.

20: 设等差数列 $\{a_n\}$ 的公差为 d , 且 $d > 1$. 令 $b_n = \frac{n^2 + n}{a_n}$, 记 S_n, T_n 分别为数列 $\{a_n\}, \{b_n\}$ 的前 n 项

和.

(1) 若 $3a_2 = 3a_1 + a_3$, $S_3 + T_3 = 21$, 求 $\{a_n\}$ 的通项公式;

(2) 若 $\{b_n\}$ 为等差数列, 且 $S_{99} - T_{99} = 99$, 求 d .

(1) 解析: (求通项)

因为 $3a_2 = 3a_1 + a_3$, 故 $3d = a_3 - a_1 = 2d$, 即 $a_1 = d$, 故 $a_n = nd$, 所以 $b_n = \frac{n^2 + n}{nd} = \frac{n+1}{d}$, $S_n = \frac{n(n+1)d}{2}$, $T_n = \frac{n(n+3)}{2d}$, 又 $S_3 + T_3 = 21$, 即 $\frac{3 \cdot 4d}{2} + \frac{3 \cdot 6}{2d} = 21$, 即 $2d^2 - 7d + 3 = 0$, 故 $d = 3$ 或 $d = \frac{1}{2}$ (舍), 故 $\{a_n\}$ 的通项公式为: $a_n = 3n$.

(2) 解析 1: (基本量法)

若 $\{b_n\}$ 为等差数列, 则 $2b_2 = b_1 + b_3$, 即 $2 \cdot \frac{2 \cdot 3}{a_1 + d} = \frac{1 \cdot 2}{a_1} + \frac{3 \cdot 4}{a_1 + 2d}$, 即 $a_1^2 - 3a_1d + 2d^2 = 0$, 所以 $a_1 = d$ 或

$a_1 = 2d$; 当 $a_1 = d$ 时, $a_n = nd$, $b_n = \frac{n+1}{d}$, 故 $S_n = \frac{n(n+1)d}{2}$, $T_n = \frac{n(n+3)}{2d}$, 又 $S_{99} - T_{99} = 99$, 即

$\frac{99 \cdot 100d}{2} - \frac{99 \cdot 102}{2d} = 99$, 即 $50d^2 - d - 51 = 0$, 所以 $d = \frac{51}{50}$ 或 $d = 1$ (舍);

当 $a_1 = 2d$ 时, $a_n = (n+1)d$, $b_n = \frac{n}{d}$, 故 $S_n = \frac{n(n+3)d}{2}$, $T_n = \frac{n(n+1)}{2d}$, 又 $S_{99} - T_{99} = 99$, 即

$\frac{99 \cdot 102d}{2} - \frac{99 \cdot 100}{2d} = 99$, 即 $51d^2 - d - 50 = 0$, 所以 $d = -\frac{50}{51}$ (舍) 或 $d = 1$ (舍);

综上: $d = \frac{51}{50}$.

(2) 解析 2: (方程思想)

若 $\{b_n\}$ 为等差数列, 则 $b_n = \frac{n(n+1)}{a_1 - d + nd} = An + B$ (一次型), 所以 $a_1 - d = 0$ 或 $d = a_1 - d$, 即 $a_1 = d$ 或 $a_1 = 2d$,

下同解析 1.

(2) 解析 3: (基本量法)

易知 $b_n = \frac{n^2 + n}{a_1 + (n-1)d}$, 所以 $b_1 = \frac{2}{a_1}$, $b_2 = \frac{6}{a_1 + d}$, $b_3 = \frac{12}{a_1 + 2d}$,

因为 $\{b_n\}$ 是等差数列, 所以 $2b_2 = b_1 + b_3$, 所以 $\frac{12}{a_1 + d} = \frac{12}{a_1 + 2d} + \frac{2}{a_1}$,

整理得 $(a_1 - 2d)(a_1 - d) = 0$. 所以 $a_1 = 2d$ 或 $a_1 = d$.

经检验, $a_1 = d$ 时满足题设, 而 $a_1 = 2d$ 不满足题设, 舍去.

故 $a_n = nd$, $a_1 = d > 1$.

于是 $b_n = \frac{n+1}{d}$, $S_n = \frac{n(n+1)}{2}d$, $T_n = \frac{n(n+3)}{2d}$,

而 $S_{99} - T_{99} = 99$, 所以 $50d - \frac{51}{d} = 1$, 解得 $d = \frac{51}{50}$ 或 $d = -1$ (舍去).

故 d 的值为 $\frac{51}{50}$.

(1) 解析:

因为 $\{a_n\}$ 是等差数列, 所以 $3a_2 = 3a_1 + a_3$, 可转换为 $a_3 = 3d \Rightarrow a_1 = d$, 则 $a_n = dn$, 所以

$b_n = \frac{n^2 + n}{a_n} = \frac{n^2 + n}{dn} = \frac{1}{d}(n+1)$, 因为 $S_3 + T_3 = 21$, 所以 $3a_2 + 3b_2 = 21$, 即 $3 \cdot 2d + 3 \cdot \frac{3}{d} = 21$, 两边同乘 d 化

简得 $2d^2 - 7d + 3 = 0 \Rightarrow (2d-1)(d-3) = 0$, 解得 $d = \frac{1}{2}$ 或者 $d = 3$, 因为 $d > 1$, 所以 $d = 3$, 则 $a_n = 3n$;

(2) 解析:

因为 $\{a_n\}$ 为等差数列且公差为 d , 所以可得 $a_n = dn + a_1 - d$, 则 $b_n = \frac{n^2 + n}{dn + a_1 - d} = \frac{(n+1) \cdot n}{dn + a_1 - d}$

解法一: 因为 $\{b_n\}$ 为等差数列, 根据等差数列通项公式可知 b_n 与 n 的关系满足一次函数, 所以上式中的分

母 " $dn + a_1 - d$ " 需满足 $a_1 - d = 0$ 或者 $\frac{d}{a_1 - d} = 1$, 即 $a_1 = d$ 或者 $a_1 = 2d$;

解法二: 由 $b_n = \frac{n^2 + n}{dn + a_1 - d} = \frac{(n+1) \cdot n}{dn + a_1 - d}$ 可得, $b_1 = \frac{2}{a_1}$, $b_2 = \frac{6}{a_1 + d}$, $b_3 = \frac{12}{a_1 + 2d}$, 因为 $\{b_n\}$ 为等差数列,

所以满足 $b_1 + b_3 = 2b_2$, 即 $\frac{2}{a_1} + \frac{12}{a_1 + 2d} = 2 \cdot \frac{6}{a_1 + d}$, 两边同乘 $a_1(a_1 + d)(a_1 + 2d)$ 化简得 $a_1^2 - 3a_1d + 2d^2 = 0$,

解得 $a_1 = d$ 或者 $a_1 = 2d$;

因为 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ 均为等差数列, 所以 $S_{99} = 99a_{50}$, $T_{99} = 99b_{50}$, 则 $S_{99} - T_{99} = 99$ 等价于 $a_{50} - b_{50} = 1$,

① 当 $a_1 = d$ 时, $a_n = dn$, $b_n = \frac{1}{d}(n+1)$, 则 $a_{50} - b_{50} = 50d - \frac{51}{d} = 1$, 得

$50d^2 - d - 51 = 0 \Rightarrow (50d - 51)(d + 1) = 0$, 解得 $d = \frac{51}{50}$ 或者 $d = -1$, 因为 $d > 1$, 所以 $d = \frac{51}{50}$;

② 当 $a_1 = 2d$ 时, $a_n = d(n+1)$, $b_n = \frac{1}{d}n$, 则 $a_{50} - b_{50} = 51d - \frac{50}{d} = 1$, 化简得

$51d^2 - d - 50 = 0 \Rightarrow (51d + 50)(d - 1) = 0$, 解得 $d = -\frac{50}{51}$ 或者 $d = 1$, 因为 $d > 1$, 所以均不取;

综上所述, $d = \frac{51}{50}$.

21: 甲、乙两人投篮, 每次由其中一人投篮, 规则如下: 若命中则此人继续投篮, 若未命中则换为对方投篮. 无论之前投篮情况如何, 甲每次投篮的命中率均为 0.6, 乙每次投篮的命中率均为 0.8. 由抽签确定第 1 次投篮的人选, 第 1 次投篮的人是甲、乙的概率各为 0.5.

(1) 求第 2 次投篮的人是乙的概率;

(2) 求第 i 次投篮的人是甲的概率;

(3) 已知: 若随机变量 X_i 服从两点分布, 且 $P(X_i = 1) = 1 - P(X_i = 0) = q_i, i = 1, 2, \dots, n$, 则

$E\left(\sum_{i=1}^n X_i\right) = \sum_{i=1}^n q_i$. 记前 n 次 (即从第 1 次到第 n 次投篮) 中甲投篮的次数为 Y , 求 $E(Y)$.

解析: (1) 第二次是乙的概率为 $0.5 \times 0.4 + 0.5 \times 0.8 = 0.6$

(2) 第 i 次是乙投球的概率为 $1 - p_i$, 则 $p_{i+1} = 0.6p_i + 0.2(1 - p_i) = 0.4p_i + 0.2$,

构造等比数列 $p_{i+1} + \lambda = \frac{2}{5}(p_i + \lambda)$, 解得 $\lambda = -\frac{1}{3}$,

则 $p_{i+1} - \frac{1}{3} = \frac{2}{5}(p_i - \frac{1}{3})$, 又 $p_1 = \frac{1}{2}$, $p_1 - \frac{1}{3} = \frac{1}{6}$,

$$p_i - \frac{1}{3} = \frac{1}{6} \times \left(\frac{2}{5}\right)^{i-1}, \quad p_i = \frac{1}{6} \times \left(\frac{2}{5}\right)^{i-1} + \frac{1}{3}$$

(3) 当 $n \in N^*$ 时, $E(Y) = p_1 + p_2 + \dots + p_n = \frac{1}{6} \frac{1 - \left(\frac{2}{5}\right)^n}{1 - \frac{2}{5}} + \frac{n}{3} = \frac{5}{18} \left[1 - \left(\frac{2}{5}\right)^n\right] + \frac{n}{3}$

当 $n = 0$ 时, $E(Y) = 0$, 符合上式

$$\text{故 } E(Y) = \frac{5}{18} \left[1 - \left(\frac{2}{5}\right)^n\right] + \frac{n}{3}$$

22: 在直角坐标系 xOy 中, 点 P 到 x 轴的距离等于点 P 到点 $(0, \frac{1}{2})$ 的距离, 记动点 P 的轨迹为 W .

(1) 求 W 的轨迹方程.

(2) 已知矩形 $ABCD$ 有三个顶点在 W 上, 证明: 矩形 $ABCD$ 的周长大于 $3\sqrt{3}$.

解析: (1) 设 $P(x, y)$, 则 $|y| = \sqrt{x^2 + \left(y - \frac{1}{2}\right)^2}$, 化简得 $y = x^2 + \frac{1}{4}$

或者利用抛物线的定义可知, 点 P 在以 $F(0, \frac{1}{2})$ 为焦点, x 轴为准线的抛物线上, 其中 $p = \frac{1}{2}$

从而 $x^2 = 2p(y - \frac{1}{4}) = y - \frac{1}{4}$, 故 W 的轨迹方程为 $y = x^2 + \frac{1}{4}$.

(2) **方法一:** 不妨设 A, B, D 三点在 W 上, 且有 $BA \perp DA$

设 $A(a, a^2 + \frac{1}{4})$, 设直线 BA, DA 的斜率分别为 $k, -\frac{1}{k}$, 由对称性不妨设 $|k| \leq 1$,

$$\text{联立方程} \begin{cases} y = x^2 + \frac{1}{4} \\ y = k(x - a) + a^2 + \frac{1}{4} \end{cases} \quad \text{可得 } x^2 - kx + ka - a^2 = 0$$

由韦达定理得 $x_A + x_B = k$, $\therefore B\left(k - a, (k - a)^2 + \frac{1}{4}\right)$. $|AB| = \sqrt{1 + k^2} |k - 2a|$

同理可得 $|AD| = \sqrt{1 + \frac{1}{k^2}} \left| -\frac{1}{k} - 2a \right| = \sqrt{1 + \frac{1}{k^2}} \left| \frac{1}{k} + 2a \right|$

所以 $|AB| + |AD| = \sqrt{1 + k^2} |k - 2a| + \sqrt{1 + \frac{1}{k^2}} \left| \frac{1}{k} + 2a \right| \geq \sqrt{1 + k^2} (|k - 2a| + \left| \frac{1}{k} + 2a \right|)$

$$\geq \sqrt{1 + k^2} \cdot \left| k + \frac{1}{k} \right| = \sqrt{\frac{(1 + k^2)^3}{k^2}}$$

设 $f(m) = \frac{(1 + m)^3}{m} = m^2 + 3m + \frac{1}{m} + 3$, 可得 $f'(m) = 2m + 3 - \frac{1}{m^2} = \frac{(2m - 1)(m + 1)^2}{m^2}$

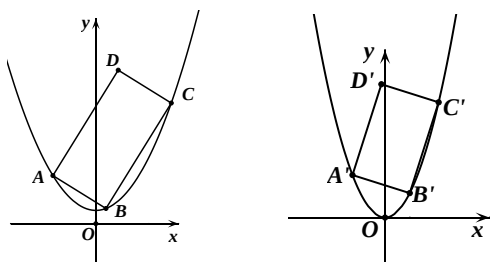
可知 $f(m)$ 在 $(0, \frac{1}{2}) \downarrow, (\frac{1}{2}, 1) \uparrow$, 所以 $f(m)$ 在 $(0, 1)$ 上的最小值为 $f(\frac{1}{2}) = \frac{27}{4}$,

所以 $|AB| + |AD| = f(k^2) \geq \frac{3}{2}\sqrt{3}$, 收于两处取等的条件不一致,

所以矩形的周长为 $2(|AB| + |AD|) > 3\sqrt{3}$

(2) **方法二:** 为了计算方便, 我们将抛物线向下移动 $\frac{1}{4}$ 个单位得抛物线 $W': y = x^2$, 矩形 $ABCD$ 变换

为矩形 $A'B'C'D'$, 则问题等价于矩形 $A'B'C'D'$ 的周长大于 $3\sqrt{3}$.



设 $B'(t_0, t_0^2), A'(t_1, t_1^2), C'(t_2, t_2^2)$, 根据对称性不妨设 $t_0 \geq 0$. 则 $k_{A'B'} = t_1 + t_0, k_{B'C'} = t_2 + t_0$, 由于 $A'B' \perp B'C'$, 则 $(t_1 + t_0)(t_2 + t_0) = -1$.

由于 $|A'B'| = \sqrt{1 + (t_1 + t_0)^2} |t_1 - t_0|$, $|B'C'| = \sqrt{1 + (t_2 + t_0)^2} |t_2 - t_0|$, 且 t_0 介于 t_1, t_2 之间, 则 $|A'B'| + |B'C'| = \sqrt{1 + (t_1 + t_0)^2} |t_1 - t_0| + \sqrt{1 + (t_2 + t_0)^2} |t_2 - t_0|$. 令 $t_2 + t_0 = \tan \theta$,

$t_1 + t_0 = -\cot \theta, \theta \in (0, \frac{\pi}{2})$, 则 $t_2 = \tan \theta - t_0, t_1 = -\cot \theta - t_0$, 从而

$$|A'B'| + |B'C'| = \sqrt{1 + \cot^2 \theta} (2t_0 + \cot \theta) + \sqrt{1 + \tan^2 \theta} (\tan \theta - 2t_0).$$

$$\text{故 } |A'B'| + |B'C'| = 2t_0 \left(\frac{1}{\sin \theta} - \frac{1}{\cos \theta} \right) + \frac{\sin \theta}{\cos^2 \theta} + \frac{\cos \theta}{\sin^2 \theta} = \frac{2t_0(\cos \theta - \sin \theta)}{\sin \theta \cos \theta} + \frac{\sin^3 \theta + \cos^3 \theta}{\sin^2 \theta \cos^2 \theta}$$

①当 $\theta \in (0, \frac{\pi}{4}]$ 时,

$$|A'B'| + |B'C'| \geq \frac{\sin^3 \theta + \cos^3 \theta}{\sin^2 \theta \cos^2 \theta} = \frac{\sin \theta}{\cos^2 \theta} + \frac{\cos \theta}{\sin^2 \theta} \geq 2\sqrt{\frac{1}{\sin \theta \cos \theta}} = 2\sqrt{\frac{2}{\sin 2\theta}} \geq 2\sqrt{2};$$

②当 $\theta \in (\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2})$ 时, 由于 $t_1 < t_0 < t_2$, 从而 $-\cot \theta - t_0 < t_0 < \tan \theta - t_0$, 从而 $-\frac{\cot \theta}{2} < t_0 < \frac{\tan \theta}{2}$

$$\text{又 } t_0 \geq 0, \text{ 故 } 0 \leq t_0 < \frac{\tan \theta}{2}, \text{ 由此 } |A'B'| + |B'C'| = \frac{2t_0(\cos \theta - \sin \theta)}{\sin \theta \cos \theta} + \frac{\sin^3 \theta + \cos^3 \theta}{\sin^2 \theta \cos^2 \theta}$$

$$> \frac{\sin \theta (\cos \theta - \sin \theta) (\sin \theta \cos \theta)}{\sin^2 \theta \cos^3 \theta} + \frac{\sin^3 \theta + \cos^3 \theta}{\sin^2 \theta \cos^2 \theta} = \frac{1}{\cos \theta} + \frac{\cos \theta}{\sin^2 \theta}$$

$$= \sqrt{\frac{2}{\sin^2 \theta \sin^2 \theta \cdot 2 \cos^2 \theta}} \geq \sqrt{\frac{2}{\left(\frac{2}{3}\right)^3}} = \frac{3\sqrt{3}}{2}$$

综合上述, 矩形 $A'B'C'D'$ 的周长大于 $3\sqrt{3}$