

循形而动 因度而变*

——基于深度学习的“数列不等式放缩”微设计

王连英

(上虞区城南中学,浙江 绍兴 312300)

摘要:基于教师和高三学生对放缩法证明数列不等式的复习困惑,文章通过分析数列的形态结构,研究数列不等式证明中一些常用的放缩方法以及“度”的合理修正,以促进学生的深度学习,进而提升数学的核心素养.

关键词:数列;不等式证明;放缩

中图分类号:0122.4

文献标识码:A

文章编号:1003-6407(2021)09-0035-04

数列和不等式都是高中数学的重要内容,数列不等式的证明将这两块知识点交汇在一起,近年来一直是高考的热点.此类问题灵活多变,综合性较强,既要结合数列的结构和特征,又要具备不等式证明的思路和方法,对于难度较大的数列不等式证明问题我们常常可利用放缩法来解决.如何根据数列的形态结构寻求思维策略,让放缩“有法可依”?怎样依据预证目标合理修正精度,使放缩“恰到好处”?笔者以高三专题复习放缩法证明数列不等式的微设计为载体,探究怎样在教师的引领下实现学生的深度学习.

1 问题提出

1.1 相似高考题

例1 已知在数列 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$, $\{c_n\}$ 中, $a_1 = b_1 = c_1 = 1$, $c_n = a_{n+1} - a_n$, $c_{n+1} = \frac{b_n}{b_{n+2}} \cdot c_n$ (其中 $n \in \mathbf{N}^*$).

1)若数列 $\{b_n\}$ 为等比数列,且公比 $q > 0$, $b_1 + b_2 = 6b_3$,求 q 与数列 $\{a_n\}$ 的通项公式;

2)若数列 $\{b_n\}$ 为等差数列,且公比 $d > 0$,证明:

$$c_1 + c_2 + \cdots + c_n < 1 + \frac{1}{d}.$$

(2020年浙江省数学高考试题第20题)

例2 设等差数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n , $a_3 =$

4 , $a_4 = S_3$,数列 $\{b_n\}$ 满足:对 $n \in \mathbf{N}^*$, $S_n + b_n, S_{n+1} + b_n, S_{n+2} + b_n$ 成等比数列.

1)求数列 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ 的通项公式;

2)记 $c_n = \sqrt{\frac{a_n}{2b_n}}$,证明: $c_1 + c_2 + \cdots + c_n < 2\sqrt{n}$ (其中 $n \in \mathbf{N}^*$).

(2019年浙江省数学高考试题第20题)

两道高考试题的第2)小题都是数列和不等式结合起来的证明问题,左边都是数列的和式结构.

1.2 启示

命题专家为什么热衷于这类问题?是不是其中蕴含着一般的规律?

2 策略生成

例1的分析 1) $b_n = \frac{1}{2^{n-1}}$, $c_n = 4^{n-1}$,从而

$$a_n = a_1 + 4^0 + 4^1 + \cdots + 4^{n-2} = \frac{4^{n-1} + 2}{3}.$$

2)由 $c_{n+1} = \frac{b_n}{b_{n+2}} \cdot c_n$,累乘得

$$c_n = c_1 \times \frac{b_1}{b_3} \times \frac{b_2}{b_4} \times \cdots \times \frac{b_{n-1}}{b_{n+1}} = \frac{d+1}{b_n b_{n+1}} = \frac{d+1}{d} \left(\frac{1}{b_n} - \frac{1}{b_{n+1}} \right),$$

故 $c_1 + c_2 + \cdots + c_n =$

$$\frac{d+1}{d} \left[\left(\frac{1}{b_1} - \frac{1}{b_2} \right) + \left(\frac{1}{b_2} - \frac{1}{b_3} \right) + \cdots + \left(\frac{1}{b_n} - \frac{1}{b_{n+1}} \right) \right] =$$

* 收文日期:2021-04-06;修订日期:2021-05-12

作者简介:王连英(1982—),女,浙江绍兴人,中学一级教师.研究方向:数学教育.

$$\frac{d+1}{d} \left(1 - \frac{1}{b_{n+1}} \right) < 1 + \frac{1}{d}.$$

评注 例1主要考查等差、等比数列的定义与通项、累加与累乘、裂项求和等基础知识和基本方法,第2)小题不等式左边的数列能够直接求和,引导学生可先求和再放缩.

例2的分析 1)略.

2)方法1 数学归纳法(过程略).

方法2 因为 $c_n = \sqrt{\frac{n-1}{n(n+1)}} < \frac{1}{\sqrt{n}} = \frac{2}{2\sqrt{n}} < \frac{2}{\sqrt{n} + \sqrt{n-1}} = 2(\sqrt{n} - \sqrt{n-1})$,

所以 $c_1 + c_2 + \cdots + c_n <$

$$2(\sqrt{1} - \sqrt{0} + \sqrt{2} - \sqrt{1} + \cdots + \sqrt{n} - \sqrt{n-1}) = 2\sqrt{n}.$$

评注 例2中不等式左边的数列直接求和比较困难,此时学生容易想到用数学归纳法来解决,但由 $n=k$ 到 $n=k+1$ 的证明还是其困难所在,若能顺利过关则不难想到方法2,先放缩成可裂项数列再求和证明.然而实际上,对于 $2(\sqrt{n} - \sqrt{n-1})$ 这个放缩目标,学生比较难想到,即使上课讲解时听懂了方法2,一段时间过后学生还是不能独立解决,更不用说处理类似的问题了.在课堂教学中,教师不仅要讲解题,还要讲怎样解题,不仅要讲方法,更要讲如何想到这些方法.让学生从已有的认知结构出发,通过深入比较和思考,发现规律和解题策略,识别模式,建立规范,即进行深度学习.

方法3 我们的愿景:存在数列 $\{d_n\}$,使得

$$c_1 + c_2 + \cdots + c_n < d_1 + d_2 + \cdots + d_n,$$

且 $d_1 + d_2 + \cdots + d_n = 2\sqrt{n}$.

为了实现愿景:

第1步,令 $T_n = d_1 + d_2 + \cdots + d_n = 2\sqrt{n}$,求出

$$d_n = T_n - T_{n-1} = 2\sqrt{n} - 2\sqrt{n-1};$$

第2步,证明 $c_1 + c_2 + \cdots + c_n < d_1 + d_2 + \cdots + d_n$,即

$$c_n < d_n = 2\sqrt{n} - 2\sqrt{n-1},$$

该不等式在方法2中已证明,故原不等式成立.

评注 得出应对策略:一般地,对于形如 $a_1 + a_2 + \cdots + a_n < f(n)$ 的不等式,当左边无法直接求和时,可以考虑对右边代数式进行和式分解,步骤如下:

万方数据

第1步,令 $T_n = f(n)$ 且 $T_n = d_1 + d_2 + \cdots + d_n$,则

$$d_n = T_n - T_{n-1};$$

第2步,证明 $a_n < d_n$;

第3步,累加得到 $a_1 + a_2 + \cdots + a_n < d_1 + d_2 + \cdots + d_n = f(n)$.

变式1 已知 $c_n = \sqrt{\frac{n-1}{n(n+1)}}$,求证: $c_1 + c_2 + \cdots + c_n < 2\sqrt{n+1} - 2$. (其中 $n \in \mathbf{N}^*$).

变式2 求证: $1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n}} < \sqrt{2}(\sqrt{2n+1} - 1)$ (其中 $n \in \mathbf{N}^*$).

分析 对于变式1,因为

$$c_n = \sqrt{\frac{n-1}{n(n+1)}} < \frac{1}{\sqrt{n+1}} = \frac{2}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n+1}} < \frac{2}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} = 2\sqrt{n+1} - 2\sqrt{n},$$

所以 $c_1 + c_2 + \cdots + c_n < 2(\sqrt{2} - \sqrt{1} + \sqrt{3} - \sqrt{2} + \cdots + \sqrt{n+1} - \sqrt{n}) = 2\sqrt{n+1} - 2$.

对于变式2,因为

$$\frac{1}{\sqrt{n}} < \frac{2}{\sqrt{n+\frac{1}{2}} + \sqrt{n-\frac{1}{2}}} = \sqrt{2} \cdot \frac{2}{\sqrt{2n+1} + \sqrt{2n-1}} = \sqrt{2}(\sqrt{2n+1} - \sqrt{2n-1}),$$

所以 $c_1 + c_2 + \cdots + c_n < 2\sqrt{n+1} - 2 <$

$$1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n}} < \sqrt{2}(\sqrt{2n+1} - 1) < \sqrt{n} + \frac{n}{\sqrt{n+1}} < 2\sqrt{n}.$$

评注 当放缩无法达到预证目标时,可以通过调整放缩“量”的大小来实现放缩的精细化,提高放缩的精度.

3 迁移拓展

例3 已知数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n ,且 $S_n = \frac{n^2 + n}{2}$,公比大于0的等比数列 $\{b_n\}$ 满足 $b_1 = 1$ 且 $b_2 + b_3 = 20$.

1)求数列 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ 的通项公式;

2) 若 $c_n = \frac{(a_n)^2}{b_n}$, 求证: $c_1 + c_2 + \cdots + c_n < \frac{7}{2}$.

(2020 年 5 月浙江省嘉兴市数学模拟试题第 20 题)

分析 1) 略.

2) 方法 1 观察 $c_n = \frac{n^2}{4^{n-1}}$, 结构类似于等差乘

等比数列, 学生可用错位相减法直接求和再放缩.

记 $T_n = \frac{1^2}{4^0} + \frac{2^2}{4^1} + \frac{3^2}{4^2} + \cdots + \frac{n^2}{4^{n-1}}$, 则

$$\frac{1}{4}T_n = \frac{1^2}{4^1} + \frac{2^2}{4^2} + \frac{3^2}{4^3} + \cdots + \frac{(n-1)^2}{4^{n-1}} + \frac{n^2}{4^n},$$

相减得 $\frac{3}{4}T_n = \frac{1}{4^0} + \frac{3}{4^1} + \frac{5}{4^2} + \frac{7}{4^3} + \cdots + \frac{2n-1}{4^{n-1}} - \frac{n^2}{4^n}$.

记 $P_n = \frac{1}{4^0} + \frac{3}{4^1} + \frac{5}{4^2} + \frac{7}{4^3} + \cdots + \frac{2n-1}{4^{n-1}}$, 则

$$\frac{1}{4}P_n = \frac{1}{4^1} + \frac{3}{4^2} + \frac{5}{4^3} + \cdots + \frac{2n-3}{4^{n-1}} + \frac{2n-1}{4^n},$$

相减得 $\frac{3}{4}P_n = 1 + \frac{2}{4^1} + \frac{2}{4^2} + \cdots + \frac{2}{4^{n-1}} - \frac{2n-1}{4^n} =$

$$1 + \frac{\frac{2}{4} \left(1 - \frac{1}{4^{n-1}} \right)}{1 - \frac{1}{4}} - \frac{2n-1}{4^n} < \frac{5}{3},$$

即 $P_n < \frac{20}{9}$.

又 $\frac{3}{4}T_n < P_n$, 得 $T_n < \frac{80}{27} < \frac{7}{2}$.

方法 2 将 c_n 放缩成等差乘等比数列, 用一次错位相减法求和证明, 即

$$4^{n-1} = (3+1)^{n-1} =$$

$$C_{n-1}^0 3^{n-1} + C_{n-1}^1 3^{n-2} + \cdots + C_{n-1}^{n-1} 3^0 \geq$$

$$C_{n-1}^0 3^{n-1} + C_{n-1}^1 3^{n-2} = (n+2)3^{n-2},$$

可知当 $n \geq 2$ 时,

$$\frac{n^2}{4^{n-1}} \leq \frac{n^2}{(n+2) \cdot 3^{n-2}} < \frac{n}{3^{n-2}}$$

成立. 那么应该从第几项开始放缩呢? 经过尝试, 须保留前 3 项, 从第 4 项开始放缩, 即

$$T_n \leq 1 + 1 + \frac{9}{16} + \frac{4}{3^2} + \frac{5}{3^3} + \cdots + \frac{n}{3^{n-2}} =$$

$$1 + 1 + \frac{9}{16} + \frac{2}{3} + \frac{1}{12} \left(1 - \frac{1}{3^{n-4}} \right) - \frac{3}{2} \cdot \frac{n}{3^{n-1}} <$$

万方数据

$$1 + 1 + \frac{9}{16} + \frac{3}{4} < \frac{7}{2},$$

当 $n=1, 2, 3$ 时, 检验证明成立即可.

方法 3 将 c_n 放缩成等比数列求和证明, 自然想到仍可利用二项式定理, 只是要保留的原项比较多. 我们的愿景: 存在等比数列 $\{d_n\}$, 使得

$$c_1 + c_2 + \cdots + c_n < d_1 + d_2 + \cdots + d_n,$$

且 $\lim_{n \rightarrow +\infty} (d_1 + d_2 + \cdots + d_n) = \frac{7}{2}$.

为了实现愿景:

第 1 步, 求出 d_n 满足

$$\sum_{i=1}^n d_i < \frac{d_1}{1-q} = \frac{7}{2},$$

此题可先约掉 c_1, c_2 , 调整为

$$\sum_{i=3}^n d_i < \frac{d_3}{1-q} = \frac{3}{2}.$$

第 2 步, 证明 $c_n < d_n$.

1) 若 $q = \frac{1}{2}$, 则 $d_3 = \frac{3}{4}$, 即证

$$\frac{n^2}{4^{n-1}} \leq \frac{3}{4} \times \frac{1}{2^{n-3}} \quad (\text{其中 } n \geq 3);$$

2) 若 $q = \frac{1}{4}$, 则 $d_3 = \frac{9}{8}$, 即证

$$\frac{n^2}{4^{n-1}} \leq \frac{9}{8} \times \frac{1}{4^{n-3}} \quad (\text{其中 } n \geq 3);$$

3) 若 $d_3 = \frac{9}{16}$, 则 $q = \frac{5}{8}$, 即证

$$\frac{n^2}{4^{n-1}} \leq \frac{9}{16} \times \left(\frac{5}{8} \right)^{n-3} \quad (\text{其中 } n \geq 3).$$

经分析知情形 2) 不成立.

评注 错位相减是学生害怕的, 两次错位相减无疑是雪上加霜, 因此有必要引导学生通过放缩成等比数列进行证明. 我们还可以从另一个角度来寻找等比数列 $\{d_n\}$.

方法 4 设 $q \geq \frac{c_{n+1}}{c_n} = \frac{1}{4} \left(1 + \frac{1}{n} \right)^2$, 当 $n \geq 2$ 时,

$q \geq \frac{9}{16}$, 即 $c_{n+1} \leq \frac{9}{16} c_n$, 从而

$$T_n < c_1 + c_2 + \frac{9}{16} c_2 + \left(\frac{9}{16} \right)^2 c_2 + \cdots + \left(\frac{9}{16} \right)^{n-2} c_2 =$$

$$1 + 1 + \frac{9}{16} + \left(\frac{9}{16} \right)^2 + \cdots + \left(\frac{9}{16} \right)^{n-2} =$$

$$1 + \frac{1 - \left(\frac{9}{16}\right)^{n-1}}{\frac{9}{16}} < 1 + \frac{16}{7} < \frac{7}{2}.$$

评注 得出应对策略:一般地,对于形如 $a_1 + a_2 + \cdots + a_n < k$ 的不等式,当左边无法直接求和时,可考虑放缩成等比数列,步骤如下:

第1步,研究 $\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{f(n+1)}{f(n)}$ 的最大值 q , 得到

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} \leq q.$$

第2步,放缩得

$$a_1 + a_2 + \cdots + a_n < a_1 + a_1 q + \cdots + a_1 q^{n-1} = \frac{a_1(1-q^n)}{1-q} < \frac{a_1}{1-q};$$

第3步,若 $k \geq \frac{a_1}{1-q}$, 则证毕;若 $k < \frac{a_1}{1-q}$, 则可考虑保留前几项不放缩. 此题亦可从第4项开始放缩,取 $q = \frac{4}{9}$ 来提高放缩的精度.

方法5 将 c_n 裂成可相消数列. 令

$$c_n = \frac{n^2}{4^{n-1}} = \frac{An^2 + Bn + C}{4^{n-1}} - \frac{A(n+1)^2 + B(n+1) + C}{4^n} = \frac{3An^2 + (3B-2A)n + 3C - A - B}{4^n},$$

$$\text{即 } 4n^2 = 3An^2 + (3B-2A)n + 3C - A - B,$$

$$\text{可得 } A = \frac{4}{3}, \quad B = \frac{8}{9}, \quad C = \frac{20}{27},$$

从而 $c_1 + c_2 + \cdots + c_n <$

$$\frac{4}{3} + \frac{8}{9} + \frac{20}{27} - \frac{\frac{4}{3}(n+1)^2 + \frac{8}{9}(n+1) + \frac{20}{27}}{4^n} < \frac{7}{2}.$$

方法6 此处数学归纳法看似失效了,此时可引导学生加强命题为“ $c_1 + c_2 + \cdots + c_n < \frac{7}{2} - g(n)$, 其中 $g(n) > 0$ ”. 当 $n=1$ 时,

$$1 < \frac{7}{2} - g(1), \quad (1)$$

假设当 $n=k$ 时,

$$1 + \frac{2^2}{4^1} + \frac{3^2}{4^2} + \cdots + \frac{k^2}{4^{k-1}} < \frac{7}{2} - g(k),$$

则当 $n=k+1$ 时,

万方数据

$$1 + \frac{2^2}{4^1} + \frac{3^2}{4^2} + \cdots + \frac{(k+1)^2}{4^k} < \frac{7}{2} - g(k) + \frac{(k+1)^2}{4^k},$$

$$\text{即只需证 } \frac{7}{2} - g(k) + \frac{(k+1)^2}{4^k} \leq \frac{7}{2} - g(k+1),$$

$$\text{即证 } g(k) - g(k+1) \geq \frac{(k+1)^2}{4^k}. \quad (2)$$

由于 $g(n)$ 需同时满足式(1)和式(2),可设 $g(n) = \frac{an^2 + bn + c}{4^n}$, 并取 $a = \frac{3}{2}, b = c = 4$, 接下去用数学归纳法证明加强的命题就可以.

评注 一题多解,不断寻求解题的最佳途径和方法,意在调动学生的学习积极性,激活学生思维的发散性,鼓励学生在日常生活中通过多种渠道解决问题.

4 反馈训练

$$1) c_n = \sqrt{\frac{1}{n(n+1)(n+2)}} \quad (\text{其中 } n \in \mathbf{N}^*), \text{ 求证:}$$

$$c_1 + c_2 + \cdots + c_n < 2 \left(1 - \frac{1}{\sqrt{n+1}} \right);$$

$$2) \text{ 求证: } \frac{1}{n} \left(\sqrt{\frac{n}{1}} + \sqrt{\frac{n}{2}} + \cdots + \sqrt{\frac{n}{n}} \right) < 1 + \sqrt{\frac{n}{n+1}}$$

(其中 $n \in \mathbf{N}^*$);

$$3) \text{ 求证: } \frac{2}{1} \times \frac{4}{3} \times \frac{6}{5} \times \cdots \times \frac{2n}{2n-1} > \sqrt{2n+1} \quad (\text{其中}$$

$n \in \mathbf{N}^*$).

5 结束语

美国数学家波利亚在《怎样解题》中说:“解题的价值不是答案的本身,而在于弄清‘是怎样想到这个解法的?’‘是什么促使你这样想,这样做的?’”^[1] 在数学学习中,我们就是要教给学生如何思考问题、如何将问题深化、如何挖掘数学问题的本质. 让学生在数学问题的解决过程中培养自己的数学思维能力,体会数学的思维方式,提升数学的核心素养^[2].

参 考 文 献

- [1] 波利亚. 怎样解题[M]. 涂泓,冯承天,译. 上海:上海教育出版社,2002.
- [2] 廖林. 基于核心素养的“函数与导数”复习研讨[J]. 中学数学教学参考,2021(2):13-16.