目 录

第一步　查缺补漏

回顾1　集合、常用逻辑用语、不等式

一、必备知识结论

1.集合

(1)子集、真子集个数计算公式

对于含有 n 个元素的有限集合 M,其子集、真子集、非空子集、非空真子集的个数依次为 2^n,2^n-1,2^n-1,2^n-2.

(2)集合运算中的常用方法

若已知的集合是不等式的解集,用数轴求解;若已知的集合是点集,用数形结合法求解;若已知的集合是抽象集合,用 Venn 图求解.

(3)集合的运算性质

①并集的性质:$A\cup\varnothing=A$;$A\cup A=A$;$A\cup B=B\cup A$;$A\cup B=A\Leftrightarrow B\subseteq A$.

②交集的性质:$A\cap\varnothing=\varnothing$;$A\cap A=A$;$A\cap B=B\cap A$;$A\cap B=A\Leftrightarrow A\subseteq B$.

③补集的性质:$A\cup(\complement_U A)=U$;$A\cap(\complement_U A)=\varnothing$;$\complement_U(\complement_U A)=A$;$\complement_U(A\cap B)=(\complement_U A)\cup(\complement_U B)$;$\complement_U(A\cup B)=(\complement_U A)\cap(\complement_U B)$.

2.全称命题、特称命题及其否定

(1)全称命题 p:$\forall x\in M$,$p(x)$,其否定为特称命题 $\neg p$:$\exists x_0\in M$,$\neg p(x_0)$.

(2)特称命题 p:$\exists x_0\in M$,$p(x_0)$,其否定为全称命题 $\neg p$:$\forall x\in M$,$\neg p(x)$.

3.充分条件与必要条件的三种判定方法

(1)定义法:正、反方向推理,若 $p\Rightarrow q$,则 p 是 q 的充分条件(或 q 是 p 的必要条件);若 $p\Rightarrow q$,且 $q\nRightarrow p$,则 p 是 q 的充分不必要条件(或 q 是 p 的必要不充分条件).

(2)集合法:利用集合间的包含关系.例如,若 $A\subseteq B$,则 A 是 B 的充分条件(B 是 A 的必要条件);若 $A\subsetneqq B$,则 A 是 B 的充分不必要条件(B 是 A 的必要不充分条件);若 $A=B$,则 A 是 B 的充要条件.

(3)等价法:将命题等价转化为另一个便于判断真假的命题.

4.一元二次不等式的恒成立问题

(1)$ax^2+bx+c>0(a\neq0)$恒成立的条件是$\begin{cases}a>0,\\\Delta<0.\end{cases}$

(2)$ax^2+bx+c<0(a\neq0)$恒成立的条件是$\begin{cases}a<0,\\\Delta<0.\end{cases}$

5.倒数性质

(1)$a>b,ab>0\Rightarrow\dfrac{1}{a}<\dfrac{1}{b}$;(2)$a<0<b\Rightarrow\dfrac{1}{a}<\dfrac{1}{b}$;

(3)$a>b>0,d>c>0\Rightarrow\dfrac{a}{c}>\dfrac{b}{d}$.

6.基本不等式

(1)$\dfrac{a+b}{2}\geqslant\sqrt{ab}(a,b\in(0,+\infty))$,当且仅当 $a=b$ 时取等号.

(2)在利用基本不等式求最值时,要特别注意“拆、拼、凑”等技巧,满足基本不等式中“正”、“定”、“等”的条件.

(3)不等式链:

设 $a>0,b>0$,则$\dfrac{2ab}{a+b}\leqslant\sqrt{ab}\leqslant\dfrac{a+b}{2}\leqslant\sqrt{\dfrac{a^2+b^2}{2}}$,当且仅当 $a=b$ 时取等号.

二、易错易混清零

1.描述法表示集合时,一定要理解好集合的含义——抓住集合的代表元素.如$\{x\mid y=\lg x\}$——函数的定义域;$\{y\mid y=\lg x\}$——函数的值域;$\{(x,y)\mid y=\lg x\}$——函数图象上的点集.

【例1】 已知集合$M=\left\{x\left|\dfrac{x^2}{16}+\dfrac{y^2}{9}=1\right.\right\}$,

$N=\left\{y\left|\dfrac{x}{4}+\dfrac{y}{3}=1\right.\right\}$,则 $M\cap N=$　　(　　)

A.$\varnothing$　　B.$\{(4,0),(3,0)\}$

C.$[-3,3]$　　D.$[-4,4]$

2.空集是任何集合的子集.由条件 $A\subseteq B$,$A\cap B=A$,$A\cup B=B$ 求解集合 A 时,务必分析研究 $A=\varnothing$ 的情况.

【例2】 设集合 $A=\{x\mid x^2-5x+6=0\}$,$B=\{x\mid mx-1=0\}$,若 $A\cap B=B$,则实数 m 组成的集合是________.

3.注重数形结合在集合问题中的应用,列举法常借助Venn图解题,描述法常借助数轴来运算,求解时要特别注意端点值.

【例3】 若集合$A=\{x|x>3-2a\}$,$B=\{x|(x-a+1)(x-a)\geqslant 0\}$,$A\cup B=\mathbf{R}$,则$a$的取值范围是________.

4.对于充分、必要条件问题,首先要弄清谁是条件,谁是结论."A的充分不必要条件是B"说明"B是条件"且B能推出A,但A不能推出B,而"A是B的充分不必要条件"表明"A是条件",A能推出B,但B不能推出A.

【例4】 "直线$x-y-k=0$与圆$(x-1)^2+y^2=2$有两个不同的交点"的一个充分不必要条件可以是( )

A.$-1\leqslant k<3$ B.$-1\leqslant k\leqslant 3$
C.$0<k<3$ D.$k<-1$或$k>3$

5.解形如不等式$ax^2+bx+c>0$时,易忽视对系数a的讨论导致漏解或错解,要注意分$a>0$,$a=0$,$a<0$进行讨论.

【例5】 若不等式$(a^2-4)x^2+(a+2)x-1\geqslant 0$的解集是空集,则实数$a$的取值范围是( )

A.$\left(-2,\frac{6}{5}\right)$ B.$\left[-2,\frac{6}{5}\right)$
C.$\left[-2,\frac{6}{5}\right]$ D.$\left[-2,\frac{6}{5}\right)\cup\{2\}$

6.容易忽视使用基本不等式求最值的条件,即"一正、二定、三相等"导致错解.

【例6】 若$mn>0$,$\frac{1}{m}+\frac{4}{n}=3$,则$m+n$的最小值为( )

A.2 B.6 C.3 D.9

三、基础检验查漏

1.已知集合$A=\{-1,0,1\}$,$B=\{x,x^2\}$,若$A\cap B=B$,则实数$x=$( )

A.-1 B.1
C.±1 D.0或±1

2.$a^2>b^2$的一个充要条件是( )

A.$a>b$ B.$a>|b|$
C.$|a|>|b|$ D.$\frac{1}{a}>\frac{1}{b}$

3.命题"若$a^2+b^2=0$,则$a=0$且$b=0$"的否定是( )

A.若$a^2+b^2\neq 0$,则$a\neq 0$且$b\neq 0$
B.若$a^2+b^2=0$,则$a\neq 0$且$b\neq 0$
C.若$a^2+b^2\neq 0$,则$a\neq 0$或$b\neq 0$
D.若$a^2+b^2=0$,则$a\neq 0$或$b\neq 0$

4.(多选)(2021·广东肇庆一模)已知集合$A=\{x\in\mathbf{R}|x^2-3x-18<0\}$,$B=\{x\in\mathbf{R}|x^2+ax+a^2-27<0\}$,则下列命题中正确的是( )

A. 若$A=B$,则$a=-3$
B.若$A\subseteq B$,则$a=-3$
C.若$B=\varnothing$,则$a\leqslant -6$或$a\geqslant 6$
D.若$B\subsetneqq A$,则$-6<a\leqslant -3$或$a\geqslant 6$

5.$\triangle ABC$中,"$\sin A=\frac{1}{2}$"是"$A=\frac{\pi}{6}$"的( )

A.充要条件
B.充分不必要条件
C.必要不充分条件
D.既不充分也不必要条件

6.若$a<b<0$,那么下列不等式成立的是( )

A.$-ab<-a^2$ B.$ab<b^2$
C.$-\frac{1}{a}<-\frac{1}{b}$ D.$\frac{1}{a}<\frac{1}{b}$

7.若关于x的不等式$x^2-4x-2-a>0$在区间$(1,4)$内有解,则实数a的取值范围是( )

A.$(-\infty,-2)$ B.$(-2,+\infty)$
C.$(-6,+\infty)$ D.$(-\infty,-6)$

8.(多选)(2021·湖北七市教研体联考)设a,b,c,d为实数,且$a>b>0>c>d$,则下列不等式正确的是( )

A.$c^2<cd$ B.$a-c<b-d$
C.$ac>bd$ D.$\frac{c}{a}-\frac{d}{b}>0$

9.某公司购买一批机器投入生产,若每台机器生产的产品可获得的总利润s(万元)与机器运转时间t(年数,$t\in\mathbf{N}^*$)的关系为$s=-t^2+23t-64$,要使年平均利润最大,则每台机器运转的年数t为( )

A.5 B.6 C.7 D.8

10.已知正项等比数列$\{a_n\}$满足$a_{2021}=a_{2020}+2a_{2019}$,若存在两项$a_p,a_r$,使得$\sqrt{a_pa_r}=2a_2$,则$\frac{1}{p}+\frac{4}{r}$的最小值为( )

A.2 B.3 C.$\frac{3}{2}$ D.$\frac{9}{4}$

回顾 2　复数与平面向量

一、必备知识结论

1.复数的相关概念及运算法则

(1)复数 $z=a+b\mathrm{i}(a,b\in\mathbf{R})$ 的分类

①z 是实数$\Leftrightarrow b=0$；②z 是虚数$\Leftrightarrow b\neq 0$；③z 是纯虚数$\Leftrightarrow a=0$ 且 $b\neq 0$.

(2)共轭复数：复数 $z=a+b\mathrm{i}(a,b\in\mathbf{R})$ 的共轭复数$\overline{z}=a-b\mathrm{i}$.

(3)复数的运算法则：除法：$(a+b\mathrm{i})\div(c+d\mathrm{i})=\dfrac{ac+bd}{c^2+d^2}+\dfrac{bc-ad}{c^2+d^2}\mathrm{i}$(其中 $a,b,c,d\in\mathbf{R}$).

2.复数的几个常见结论

(1)$(1\pm\mathrm{i})^2=\pm 2\mathrm{i}$.

(2)$\dfrac{1+\mathrm{i}}{1-\mathrm{i}}=\mathrm{i}$，$\dfrac{1-\mathrm{i}}{1+\mathrm{i}}=-\mathrm{i}$.

(3)$\mathrm{i}^{4n}=1$，$\mathrm{i}^{4n+1}=\mathrm{i}$，$\mathrm{i}^{4n+2}=-1$，$\mathrm{i}^{4n+3}=-\mathrm{i}$，$\mathrm{i}^{4n}+\mathrm{i}^{4n+1}+\mathrm{i}^{4n+2}+\mathrm{i}^{4n+3}=0(n\in\mathbf{Z})$.

(4)$\omega=-\dfrac{1}{2}\pm\dfrac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{i}$，且 $\omega^0=1$，$\omega^2=\overline{\omega}$，$\omega^3=1$，$1+\omega+\omega^2=0$.

3.平面向量的数量积

(1)若 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 为非零向量，夹角为 θ，则 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\cos\theta$.

(2)设 $\boldsymbol{a}=(x_1,y_1)$，$\boldsymbol{b}=(x_2,y_2)$，则 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=x_1x_2+y_1y_2$.

4.两个非零向量平行、垂直的充要条件

若 $\boldsymbol{a}=(x_1,y_1)$，$\boldsymbol{b}=(x_2,y_2)$，则

(1)$\boldsymbol{a}\parallel\boldsymbol{b}\Leftrightarrow\boldsymbol{a}=\lambda\boldsymbol{b}(\boldsymbol{b}\neq\boldsymbol{0})\Leftrightarrow x_1y_2-x_2y_1=0$.

(2)$\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{b}\Leftrightarrow\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=0\Leftrightarrow x_1x_2+y_1y_2=0$.

5.利用数量积求长度

(1)若 $\boldsymbol{a}=(x,y)$，则 $|\boldsymbol{a}|=\sqrt{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{a}}=\sqrt{x^2+y^2}$.

(2)若 $A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$，则 $|\overrightarrow{AB}|=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$.

6.利用数量积求夹角

若 $\boldsymbol{a}=(x_1,y_1)$，$\boldsymbol{b}=(x_2,y_2)$，θ 为 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的夹角，

则 $\cos\theta=\dfrac{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|}=\dfrac{x_1x_2+y_1y_2}{\sqrt{x_1^2+y_1^2}\sqrt{x_2^2+y_2^2}}$.

7.三角形"四心"向量形式的充要条件

设 O 为$\triangle ABC$ 所在平面上一点，角 A,B,C 所对的边分别为 a,b,c，则

(1)O 为$\triangle ABC$ 的外心$\Leftrightarrow|\overrightarrow{OA}|=|\overrightarrow{OB}|=|\overrightarrow{OC}|=\dfrac{a}{2\sin A}$.

(2)O 为$\triangle ABC$ 的重心$\Leftrightarrow\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}=\boldsymbol{0}$.

(3)O 为$\triangle ABC$ 的垂心$\Leftrightarrow\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{OB}\cdot\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{OC}\cdot\overrightarrow{OA}$.

(4)O 为$\triangle ABC$ 的内心$\Leftrightarrow a\overrightarrow{OA}+b\overrightarrow{OB}+c\overrightarrow{OC}=\boldsymbol{0}$.

二、易错易混清零

1.牢记两个向量的数量积等于它们对应坐标的乘积的和，注意与数乘运算的区别.

【例 1】 在平面直角坐标系中，已知向量 $\boldsymbol{a}=(1,2)$，O 是坐标原点，M 是曲线$|x|+2|y|=2$ 上的动点，则 $\boldsymbol{a}\cdot\overrightarrow{OM}$的取值范围是　　(　　)

A.$[-2,2]$　　B.$[-\sqrt{5},\sqrt{5}]$

C.$\left[-\dfrac{2\sqrt{5}}{5},\dfrac{2\sqrt{5}}{5}\right]$　　D.$\left[-\dfrac{2\sqrt{5}}{5},\sqrt{5}\right]$

2.设两个非零向量 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$，其夹角为 θ，当 θ 为锐角时，$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}>0$ 且 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 不同向；故 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}>0$ 是 θ 为锐角的必要不充分条件；当 θ 为钝角时，$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}<0$ 且 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 不反向，故 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}<0$ 是 θ 为钝角的必要不充分条件.

【例 2】 已知向量 $\boldsymbol{a}=(2,1)$，$\boldsymbol{b}=(\lambda,1)$，$\lambda\in\mathbf{R}$，设 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的夹角为 θ.若 θ 为锐角，则 λ 的取值范围是________.

3.切忌混淆三角形的"四心"，注意不同的向量表示形式.

【例 3】 若 O 是$\triangle ABC$ 所在平面内一点，且满足$|\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OC}|=|\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}-2\overrightarrow{OA}|$，则$\triangle ABC$ 的形状为________.

4.复数 z 为纯虚数的充要条件是 $a=0$ 且 $b\neq 0(z=a+b\mathrm{i},a,b\in\mathbf{R})$，还要注意巧妙运用参数问题和合理消参的技巧.

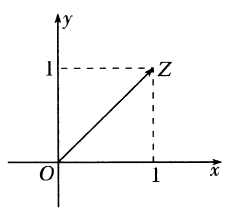
【例 4】 已知 i 为虚数单位，$a\in\mathbf{R}$，若$\dfrac{2-\mathrm{i}}{a+\mathrm{i}}$为纯虚数，则复数 $z=4a+\sqrt{2}\mathrm{i}$ 的模为 （　　）

A.$\sqrt{2}$　　B.$\sqrt{3}$

C.$\sqrt{6}$　　D.$\sqrt{11}$

5.复平面内，复数 $z=a+b\mathrm{i}(a,b\in\mathbf{R})$ 对应的点为 $Z(a,b)$，不是 $Z(a,b\mathrm{i})$；当且仅当 O 为坐标原点时，向量$\overrightarrow{OZ}$与点 Z 对应的复数相同.

【例 5】 如图，已知复数 z 在复平面内对应的向量为$\overrightarrow{OZ}$，O 为坐标原点，则$|z|$为 （　　）



A.1　　B.$\sqrt{2}$

C.$\sqrt{3}$　　D.2

三、基础检验查漏

1.若 $z=\dfrac{2+\mathrm{i}}{1-\mathrm{i}}$，其中 i 为虚数单位，则$|z|=$ （　　）

A.$\sqrt{10}$　　B.$\sqrt{5}$

C.$\dfrac{\sqrt{10}}{2}$　　D.$\dfrac{\sqrt{5}}{2}$

2.已知复数 $z=1+\mathrm{i}$，则$\dfrac{1+z}{z}$等于 （　　）

A.$\dfrac{3+\mathrm{i}}{2}$　　B.$\dfrac{3-\mathrm{i}}{2}$

C.$1-\mathrm{i}$　　D.$\dfrac{2-\mathrm{i}}{2}$

3.复数 $z=\dfrac{1+3\mathrm{i}}{1+\mathrm{i}}$的虚部是 （　　）

A.1　　B.i

C.-1　　D.2

4.（多选）（2021·辽宁六校联考）已知复数 $z=(a-\mathrm{i})\cdot(3+2\mathrm{i})(a\in\mathbf{R})$的实部为$-1$，则下列说法正确的有 （　　）

A.复数 z 的虚部为-5

B.复数 z 的共轭复数 $\bar{z}=1-5\mathrm{i}$

C.$|z|=\sqrt{26}$

D.z 在复平面内对应的点位于第三象限

5.设 $\boldsymbol{e}_1$，$\boldsymbol{e}_2$ 是两个不共线的平面向量，若 $\boldsymbol{a}=3\boldsymbol{e}_1-2\boldsymbol{e}_2$，$\boldsymbol{b}=\boldsymbol{e}_1+k\boldsymbol{e}_2$，且 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 共线，则实数 k 的值为 （　　）

A.$-\dfrac{1}{2}$　　B.$\dfrac{1}{2}$

C.$-\dfrac{2}{3}$　　D.$\dfrac{2}{3}$

6.已知 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$ 为单位向量，且满足$|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|=\sqrt{2}$，则$|2\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|=$ （　　）

A.$\sqrt{3}$　　B.$\sqrt{7}$

C.$\sqrt{5}$　　D.$2\sqrt{2}$

7.在$\triangle ABC$ 中，$\overrightarrow{BD}=\overrightarrow{DC}$，$\overrightarrow{AM}=2\overrightarrow{OD}$，$\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}=\lambda\overrightarrow{OM}$，则 $\lambda=$ （　　）

A.$\dfrac{1}{2}$　　B.1

C.2　　D.3

8.在$\triangle ABC$ 中，已知$\overrightarrow{AD}=-\dfrac{1}{3}\overrightarrow{AB}$，$\overrightarrow{BM}=\dfrac{1}{2}\overrightarrow{BC}$，若$\overrightarrow{MD}=\lambda\overrightarrow{AB}+\mu\overrightarrow{AC}(\lambda,\mu\in\mathbf{R})$，则 $\lambda-\mu=$ （　　）

A.$\dfrac{1}{3}$　　B.$-\dfrac{1}{3}$

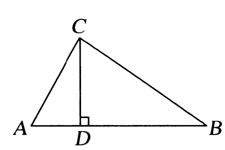
C.$\dfrac{2}{3}$　　D.$-\dfrac{2}{3}$

9.在$\triangle ABC$ 中，$AB=6$，$AC=8$，$BC=10$，$\overrightarrow{BC}=2\overrightarrow{DB}$，则$\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{BC}=$ （　　）

A.-86　　B.86

C.7　　D.-7

10.（多选）（2021·山东莱州一中月考）在 $\mathrm{Rt}\triangle ABC$ 中，CD 是斜边 AB 上的高，如图，则下列等式成立的是 （　　）



A.$|\overrightarrow{AC}|^2=\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AB}$

B.$|\overrightarrow{BC}|^2=\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC}$

C.$|\overrightarrow{AB}|^2=\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{CD}$

D.$|\overrightarrow{CD}|^2=\dfrac{(\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AB})(\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC})}{|\overrightarrow{AB}|^2}$

回顾 3　三角函数、解三角形

一、必备知识结论

1.函数 $y=A\sin(\omega x+\varphi)(\omega>0,A>0)$ 的图象

(1)"五点法"作图

设 $z=\omega x+\varphi$，令 $z=0,\frac{\pi}{2},\pi,\frac{3\pi}{2},2\pi$，求出相应的 x 的值与 y 的值，描点、连线可得.

(2)由三角函数的图象确定解析式时，一般利用五点中的零点或最值点作为解题突破口.

(3)图象变换

$y=\sin x\xrightarrow[\text{平移}|\varphi|\text{个单位长度}]{\text{向左}(\varphi>0)\text{或向右}(\varphi<0)}y=\sin(x+\varphi)$

$\xrightarrow[\text{纵坐标不变}]{\text{横坐标变为原来的}\frac{1}{\omega}(\omega>0)\text{倍}}y=\sin(\omega x+\varphi)$

$\xrightarrow[\text{横坐标不变}]{\text{纵坐标变为原来的}A(A>0)\text{倍}}y=A\sin(\omega x+\varphi)$.

2.三角函数的对称性

(1)曲线 $y=\sin x$ 的对称中心为 $(k\pi,0)$，$k\in\mathbf{Z}$，对称轴方程为 $x=k\pi+\frac{\pi}{2}$，$k\in\mathbf{Z}$.

(2)曲线 $y=\cos x$ 的对称中心为 $\left(k\pi+\frac{\pi}{2},0\right)$，$k\in\mathbf{Z}$，对称轴方程为 $x=k\pi$，$k\in\mathbf{Z}$.

(3)曲线 $y=\tan x$ 的对称中心为 $\left(\frac{k\pi}{2},0\right)$，$k\in\mathbf{Z}$，无对称轴.

(4)求曲线 $y=A\sin(\omega x+\varphi)$(或 $y=A\cos(\omega x+\varphi)$，$y=A\tan(\omega x+\varphi)$)的对称中心(或对称轴)，只需令 $\omega x+\varphi$ 等于对应的值，求出 x 即可.

3.准确记忆六组诱导公式

对于"$\frac{k\pi}{2}\pm\alpha,k\in\mathbf{Z}$"的三角函数值与 α 角的三角函数值的关系口诀：奇变偶不变，符号看象限.

4.三角函数恒等变换"四大策略"

(1)常值代换：特别是"1"的代换，$1=\sin^2\theta+\cos^2\theta=\tan 45°$等.

(2)降次与升次：正用二倍角公式升次，逆用二倍角公式降次.

(3)弦、切互化：一般是切化弦.

(4)灵活运用辅助角公式 $a\sin\alpha+b\cos\alpha=\sqrt{a^2+b^2}\sin(\alpha+\varphi)$ $\left(\text{其中}\tan\varphi=\frac{b}{a}\right)$.

5.正弦定理及其变形

$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}=2R$($2R$ 为 $\triangle ABC$ 外接圆的直径).

变形：①$a=2R\sin A$，$b=2R\sin B$，$c=2R\sin C$；

②$\sin A=\frac{a}{2R}$，$\sin B=\frac{b}{2R}$，$\sin C=\frac{c}{2R}$；

③$a:b:c=\sin A:\sin B:\sin C$.

6.余弦定理及其推论、变形

$a^2=b^2+c^2-2bc\cos A$，$b^2=a^2+c^2-2ac\cos B$，$c^2=a^2+b^2-2ab\cos C$.

推论：$\cos A=\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}$，$\cos B=\frac{a^2+c^2-b^2}{2ac}$，$\cos C=\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}$.

变形：$b^2+c^2-a^2=2bc\cos A$，$a^2+c^2-b^2=2ac\cos B$，$a^2+b^2-c^2=2ab\cos C$.

二、易错易混清零

1.三角函数值是一个比值，是实数，这个实数的大小和点 $P(x,y)$ 在终边上的位置无关，只由角的终边位置决定.

【例 1】 已知角 α 的终边过点 $P(-8m,-6\sin 30°)$，且 $\cos\alpha=-\frac{4}{5}$，则 m 的值为　(　　)

A.$-\frac{1}{2}$　　B.$-\frac{\sqrt{3}}{2}$　　C.$\frac{1}{2}$　　D.$\frac{\sqrt{3}}{2}$

2.求函数 $f(x)=A\sin(\omega x+\varphi)$ 的单调区间时，要注意 A 与 ω 的符号，当 $\omega<0$ 时，需把 ω 的符号化为正值后再求解.

【例 2】 函数 $y=\sin\left(\frac{\pi}{3}-2x\right)$ 的单调递减区间是________.

3.在三角函数图象变换中，注意由 $y=\sin\omega x$ 的图象变换得到 $y=\sin(\omega x+\varphi)$ 的图象时，平移量为 $\left|\frac{\varphi}{\omega}\right|$，而不是 φ.

【例 3】 要得到函数 $y=\sin\left(4x-\frac{\pi}{3}\right)$ 的图象，只需将函数 $y=\sin 4x$ 的图象　(　　)

A.向左平移 $\frac{\pi}{12}$ 个单位长度

B.向右平移 $\frac{\pi}{12}$ 个单位长度

C.向左平移 $\frac{\pi}{3}$ 个单位长度

D.向右平移 $\frac{\pi}{3}$ 个单位长度

4.在三角函数的求值中，易忽视隐含条件的制约导致增解.

【例 4】 已知 $\cos\alpha=\frac{1}{7}$，$\sin(\alpha+\beta)=\frac{5\sqrt{3}}{14}$，$0<\alpha<\frac{\pi}{2}$，$0<\beta<\frac{\pi}{2}$，则 $\cos\beta=$________.

5.已知三角形两边及一边的对角，利用正弦定理解三角形时，注意解的个数的讨论，可能有一解、两解或无解.在△ABC 中，$A>B\Leftrightarrow\sin A>\sin B$.

【例 5】 在△ABC 中，角 A,B,C 的对边分别为 a,b,c，若 $c=2$，$b=2\sqrt{3}$，$C=30°$，则 B 等于 ( )

A.30°　B.60°

C.30°或 60°　D.60°或 120°

三、基础检验查漏

1.已知 $2\cos(\pi+\theta)=\sin(-\theta)$，则 $\tan\left(\theta+\frac{\pi}{4}\right)=$ ( )

A.$\frac{1}{5}$　B.$\frac{2}{3}$　C.-1　D.-3

2.已知 $\sin\left(\alpha-\frac{\pi}{6}\right)=\frac{1}{3}$，则 $\cos\left(\frac{\pi}{3}-2\alpha\right)=$ ( )

A.$-\frac{7}{9}$　B.$-\frac{2}{3}$　C.$\frac{2}{3}$　D.$\frac{7}{9}$

3.将函数 $f(x)=4\sin\left(2x+\frac{5\pi}{12}\right)-1$ 的图象向右平移 $\frac{\pi}{12}$ 个单位长度后，所得图象对应的函数 $g(x)$ 在 $\left[-\frac{\pi}{8},\frac{\pi}{4}\right]$ 上的值域为 ( )

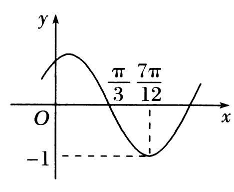
A.$[0,1]$　B.$[-1,3]$

C.$[-1,2\sqrt{2}-1]$　D.$[1,3]$

4.已知角 α 的顶点为坐标原点，始边与 x 轴的非负半轴重合，终边上有两点 $A(1,m)$，$B(2,n)$，且 $\cos 2\alpha=\frac{2}{3}$，则 $m-n$ 的值等于 ( )

A.-1　B.$\pm\frac{2\sqrt{5}}{5}$　C.$\pm\frac{\sqrt{5}}{5}$　D.$\pm\frac{1}{5}$

5.函数 $f(x)=A\sin(\omega x+\varphi)\left(\text{其中 }A>0,|\varphi|<\frac{\pi}{2}\right)$ 的图象如图所示，为了得到 $g(x)=\sin 2x$ 的图象，则只需将 $f(x)$ 的图象 ( )



A.向右平移 $\frac{\pi}{6}$ 个长度单位　B.向右平移 $\frac{\pi}{12}$ 个长度单位

C.向左平移 $\frac{\pi}{6}$ 个长度单位　D.向左平移 $\frac{\pi}{12}$ 个长度单位

6.已知 $\alpha\in\left(\frac{\pi}{2},\pi\right)$，$\sin\alpha+2\cos\alpha=-1$，则 $\tan 2\alpha=$ ( )

A.$-\frac{24}{7}$　B.$-\frac{6}{7}$　C.$\frac{6}{7}$　D.$\frac{24}{7}$

7.已知函数 $f(x)=\sin x-\sqrt{3}\cos x$，则下列结论正确的是 ( )

A.函数 $f(x)$ 的图象关于点 $\left(\frac{5\pi}{6},0\right)$ 对称

B.函数 $f(x)$ 的图象关于直线 $x=\frac{\pi}{6}$ 对称

C.函数 $f(x)$ 在区间 $\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$ 上单调递增

D.函数 $f(x)$ 的图象与直线 $y=1$ 的交点间的最小距离为 $\frac{2\pi}{3}$

8.(多选)(2021·山东淄博期末)已知 $\theta\in(0,\pi)$，$\sin\theta+\cos\theta=\frac{1}{5}$，则下列结论正确的是 ( )

A.$\theta\in\left(\frac{\pi}{2},\pi\right)$　B.$\cos\theta=-\frac{3}{5}$

C.$\tan\theta=-\frac{3}{4}$　D.$\sin\theta-\cos\theta=\frac{7}{5}$

9.已知△ABC 的内角 A,B,C 的对边分别是 a,b,c，且 $2a\cos B=2c+b$.

(1)求 A；

(2)若 $a=3\sqrt{3}$，$b=3$，求△ABC 的面积.

10.请从下面三个条件中任选一个补充在下面的横线上，并作答.

①$2c\cos B=2a-b$；②$c\cos(B-A)=\cos C(2\sqrt{3}b\sin A-c)$；③$a\tan C=2c\sin(B+C)$.

已知△ABC 的内角 A,B,C 的对边分别为 a,b,c，且________.

(1)求 C；

(2)若 D 为 AB 的中点，且 $c=2$，$CD=\sqrt{3}$，试判断△ABC 的形状.

注：如果选择多个条件分别解答，按第一个解答计分.

回顾4　数　列

一、必备知识结论

1.等差数列、等比数列的前 n 项和公式

(1)等差数列：$S_n=\frac{1}{2}n(a_1+a_n)=na_1+\frac{1}{2}n(n-1)d$ $=\frac{d}{2}n^2+\left(a_1-\frac{d}{2}\right)n$；

(2)等比数列：当公比 $q\neq1$ 时，$S_n=\frac{a_1(1-q^n)}{1-q}=\frac{a_1-a_nq}{1-q}=-\frac{a_1}{1-q}q^n+\frac{a_1}{1-q}$.

2.活用定理与结论

(1)等差、等比数列$\{a_n\}$的常用性质

	等差数列	等比数列
性质	①若 $m,n,p,q\in\mathbf{N}^*$，且 $m+n=p+q$，则 $a_m+a_n=a_p+a_q$；②$a_n=a_m+(n-m)d$；③$S_m,S_{2m}-S_m,S_{3m}-S_{2m},\cdots$仍成等差数列	①若 $m,n,p,q\in\mathbf{N}^*$，且 $m+n=p+q$，则 $a_m\cdot a_n=a_p\cdot a_q$；②$a_n=a_mq^{n-m}$；③$S_m,S_{2m}-S_m,S_{3m}-S_{2m},\cdots$仍成等比数列($S_m\neq0$)

(2)判断等差数列的常用方法

①定义法：$a_{n+1}-a_n=d$(常数)$(n\in\mathbf{N}^*)\Leftrightarrow\{a_n\}$是等差数列.

②通项公式法：$a_n=pn+q$(p,q 为常数，$n\in\mathbf{N}^*$)$\Leftrightarrow\{a_n\}$是等差数列.

③中项公式法：$2a_{n+1}=a_n+a_{n+2}(n\in\mathbf{N}^*)\Leftrightarrow\{a_n\}$是等差数列.

④前 n 项和公式法：$S_n=An^2+Bn$(A,B 为常数，$n\in\mathbf{N}^*$)$\Leftrightarrow\{a_n\}$是等差数列.

(3)判断等比数列的常用方法

①定义法：$\frac{a_{n+1}}{a_n}=q$(q 是不为 0 的常数，$n\in\mathbf{N}^*$)$\Leftrightarrow\{a_n\}$是等比数列.

②通项公式法：$a_n=cq^n$(c,q 均是不为 0 的常数，$n\in\mathbf{N}^*$)$\Leftrightarrow\{a_n\}$是等比数列.

③中项公式法：$a_{n+1}^2=a_n\cdot a_{n+2}(a_n\cdot a_{n+1}\cdot a_{n+2}\neq0,n\in\mathbf{N}^*)\Leftrightarrow\{a_n\}$是等比数列.

3.数列求和的常用方法

(1)等差数列或等比数列的求和，直接利用公式求和.

(2)形如$\{a_n\cdot b_n\}$(其中$\{a_n\}$为等差数列，$\{b_n\}$为等比数列)的数列，利用错位相减法求和.

(3)通项公式形如 $a_n=\frac{c}{(an+b_1)(an+b_2)}$(其中 a,b_1,b_2,c 为常数)用裂项相消法求和.

(4)并项求和法：先将某些项放在一起求和，然后再求 S_n.通项公式形如 $a_n=(-1)^n\cdot n$ 或 $a_n=a\cdot(-1)^n$(其中 a 为常数，$n\in\mathbf{N}^*$)等正负项交叉的数列求和一般用并项法.并项时应注意分 n 为奇数、偶数两种情况讨论.

(5)分组求和法：分组求和法是解决通项公式可以写成 $c_n=a_n+b_n$形式的数列求和问题的方法，其中$\{a_n\}$与$\{b_n\}$是等差(比)数列或一些可以直接求和的数列.

二、易错易混清零

1.已知数列$\{a_n\}$的前 n 项和 S_n 求 a_n，易忽视 $n=1$ 的情形，直接用 S_n-S_{n-1} 表示.事实上，当 $n=1$ 时，$a_1=S_1$；当 $n\geqslant2$ 时，$a_n=S_n-S_{n-1}$.

【例 1】 已知数列$\{a_n\}$对任意的 $n\in\mathbf{N}^*$ 都满足 $a_1+2a_2+2^2a_3+\cdots+2^{n-1}a_n=8-5n$，则数列$\{a_n\}$的通项公式为________.

2.等差数列中不能熟练利用数列的性质转化已知条件，并灵活运用整体代换进行基本运算.如等差数列$\{a_n\}$与$\{b_n\}$的前 n 项和分别为 S_n 和 T_n，已知$\frac{S_n}{T_n}=\frac{n+1}{2n+3}$，求$\frac{a_n}{b_n}$时，无法正确赋值求解.

【例 2】 等差数列$\{a_n\}$，$\{b_n\}$的前 n 项和分别为 S_n,T_n，且$\frac{S_n}{T_n}=\frac{3n-1}{2n+3}$，则$\frac{a_8}{b_8}=$________.

3.运用等比数列的前 n 项和公式时，易忘记分类讨论.一定分 $q=1$ 和 $q\neq1$ 两种情况进行讨论.

【例 3】 设等比数列$\{a_n\}$的前 n 项和为 S_n，若 $S_3+S_6=S_9$，则公比 $q=$________.

4.利用等差数列的定义求解问题时，易忽视 $a_n-a_{n-1}=d$(常数)中，$n\geqslant2,n\in\mathbf{N}^*$ 的限制，类似地，在等比数列中，$\frac{b_{n+1}}{b_n}=q$(q 为常数且 $q\neq0$)，忽视 $n\in\mathbf{N}^*$ 的条件限制.

【例 4】 已知在数列$\{a_n\}$中，$a_1=a_2=1$，$a_{n+1}=a_n+\frac{1}{2}$($n\geqslant2$)，则数列$\{a_n\}$的前 9 项和 $S_9=$________.

5.利用错位相减法求和，切忌漏掉第一项和最后一项；裂项相消求和，相消后剩余的前、后项数要相等.

【例5】 已知数列$\{a_n\}$为等比数列，数列$\{b_n\}$为等差数列，且$b_1=a_1=1$，$b_2=a_1+a_2$，$a_3=2b_3-6$.

(1)求数列$\{a_n\}$，$\{b_n\}$的通项公式；

(2)设$c_n=\frac{1}{b_nb_{n+2}}$，数列$\{c_n\}$的前n项和为T_n，证明：$\frac{1}{5}\leqslant T_n<\frac{1}{3}$.

6.对于通项公式中含有$(-1)^n$的一类数列，在求S_n时，切莫忘记讨论n为奇数、偶数；遇到已知$a_{n+1}-a_{n-1}=d$或$\frac{a_{n+1}}{a_{n-1}}=q(n\geqslant 2)$，求$\{a_n\}$的通项公式时，要注意对$n$进行分类讨论.

【例6】 若$a_n=2n-1$，$b_n=(-1)^{n-1}a_n$，则数列$\{b_n\}$的前n项和$T_n=$________.

三、基础检验查漏

1.已知等差数列$\{a_n\}$的前n项和为S_n，若$a_3=1$，$S_9=18$，则$a_7=$ (　　)

A.1　　B.2　　C.3　　D.4

2.若等比数列$\{a_n\}$的各项均为正数，且$a_1a_{10}=9$，则$\log_9a_1+\log_9a_2+\cdots+\log_9a_{10}=$ (　　)

A.6　　B.5　　C.4　　D.$1+\frac{\log_35}{2}$

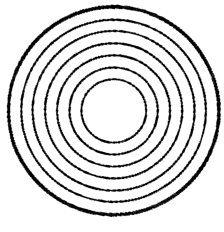
3.已知等差数列$\{a_n\}$的前n项和为S_n，且$a_2=5$，$S_5=35$，则$S_{10}=$ (　　)

A.100　　B.110　　C.120　　D.130

4.已知各项均为正数的等比数列$\{a_n\}$的前n项和为S_n，若$a_1=1$，$S_4=a_5-1$，则$a_6=$ (　　)

A.27　　B.32　　C.64　　D.81

5.《周髀算经》规定“一衡之间万九千八百三十三里三分里之一”，就是相邻两衡间距离(半径差)为19 833$\frac{1}{3}$里，给出了计算各衡直径的一般法则，即“预知次衡径，倍而增内衡之径，二而增内衡径，得三衡径”.这段话的意思是说想求出次二衡的直径，须把半径差二倍加上内一衡(最小圆圈)的直径，次三衡以及以后的都这样要求.已知内一衡径=238 000里000步(当时300步为1里)，则次三衡径为 (　　)



A.396 666里200步　　B.357 000里000步

C.317 333里100步　　D.277 666里200步

6.等差数列$\{a_n\}$中，$S_{16}>0$，$S_{18}<0$，则数列$\{a_n\}$各项中取值为正数的有 (　　)

A.8项或9项　　B.7项或8项

C.17项或18项　　D.16项或17项

7.(多选)(2021·江苏徐州期中)在公比q为整数的等比数列$\{a_n\}$中，S_n是数列$\{a_n\}$的前n项和.若$a_1a_4=32$，$a_2+a_3=12$，则下列说法正确的是 (　　)

A.$q=2$

B.数列$\{S_n+2\}$是等比数列

C.$S_8=510$

D.数列$\{\lg a_n\}$是公差为2的等差数列

8.在等比数列$\{a_n\}$中，$a_7^2=a_9$且$a_8>a_9$，则使得$a_n-\frac{1}{a_1}>0$的自然数n的最大值为 (　　)

A.10　　B.9　　C.8　　D.7

9.设等差数列$\{a_n\}$满足$a_1=2$，$a_{n+1}=2a_n-2(n-1)$.

(1)求数列$\{a_n\}$的公差d，并求数列$\{a_n\}$的通项公式；

(2)设$b_n=\frac{1}{a_n\cdot a_{n+1}}$，求数列$\{b_n\}$的前$n$项和$S_n$.

10.(2021·佛山市教学质量检测)已知等差数列$\{a_n\}$与正项等比数列$\{b_n\}$满足$a_1=b_1=3$，且b_3-a_3，20，a_5+b_2既是等差数列，又是等比数列.

(1)求数列$\{a_n\}$和$\{b_n\}$的通项公式.

(2)在①$c_n=\frac{1}{a_n\cdot a_{n+1}}+(-1)^nb_n$，②$c_n=a_n\cdot b_n$，③$c_n=\frac{2(a_n+3)}{a_na_{n+1}b_{n+1}}$这三个条件中任选一个，补充在下面问题中，并完成求解.

若________，求数列$\{c_n\}$的前n项和S_n.

注：如果选择多个条件分别解答，按第一个解答计分.

回顾5　排列、组合、二项式定理、概率统计

一、必备知识结论

1.关于两个计数原理应用的注意事项

(1)分类加法和分步乘法计数原理，都是关于做一件事的不同方法的种数的问题，区别在于：分类加法计数原理针对“分类”问题，其中各种方法相互独立，用其中任何一种方法都可以做完这件事；分步乘法计数原理针对“分步”问题，各个步骤相互依存，只有各个步骤都完成了才算完成这件事.

(2)混合问题一般是先分类再分步.

(3)分类时标准要明确，做到不重复不遗漏.

(4)要恰当画出示意图或树状图，使问题的分析更直观、清楚，便于探索规律.

2.对于有附加条件的排列、组合应用题，通常从三个途径考虑：

(1)以元素为主考虑，即先满足特殊元素的要求，再考虑其他元素.

(2)以位置为主考虑，即先满足特殊位置的要求，再考虑其他位置.

(3)先不考虑附加条件，计算出排列数或组合数，再减去不合要求的排列数或组合数.

3.排列、组合问题的求解方法与技巧

(1)特殊元素优先安排.(2)合理分类与准确分步.(3)排列、组合混合问题先选后排.(4)相邻问题捆绑处理.(5)不相邻问题插空处理.(6)定序问题排除法处理.(7)分排问题直排处理.(8)“小集团”排列问题先整体后局部.(9)构造模型.(10)正难则反，等价条件.

4.二项展开式的特点

(1)项数为 $n+1$.

(2)各项的次数都等于二项式的幂指数 n，即 a 与 b 的指数的和为 n.

(3)字母 a 按降幂排列，从第一项开始，次数由 n 逐项减1直到零；字母 b 按升幂排列，从第一项起，次数由零逐项增1直到 n.

(4)二项式的系数从 C_n^0，C_n^1，一直到 C_n^{n-1}，C_n^n.

5.二项式系数的性质

(1)对称性：与首末两端“等距离”的两个二项式系数相等，即 $C_n^m=C_n^{n-m}$.

(2)增减性与最大值：二项式系数 C_n^k，当 $k<\frac{n+1}{2}$ 时，二项式系数是递增的；当 $k>\frac{n+1}{2}$ 时，二项式系数是递减的.

当 n 是偶数时，那么其展开式中间一项 $T_{\frac{n}{2}+1}$ 的二项式系数最大.

当 n 是奇数时，那么其展开式中间两项 $T_{\frac{n-1}{2}+1}$ 和 $T_{\frac{n+1}{2}+1}$ 的二项式系数相等且最大.

(3)各二项式系数的和

$(a+b)^n$ 的展开式的各个二项式系数的和等于 2^n，即 $C_n^0+C_n^1+C_n^2+\cdots+C_n^k+\cdots+C_n^n=2^n$.

二项展开式中，偶数项的二项式系数的和等于奇数项的二项式系数的和，即 $C_n^1+C_n^3+C_n^5+\cdots=C_n^0+C_n^2+C_n^4+\cdots=2^{n-1}$.

6.条件概率的计算公式：$P(B|A)=\frac{P(AB)}{P(A)}$.

7.统计中四个数据特征

(1)众数：在样本数据中，出现次数最多的那个数据.

(2)中位数：在样本数据中，将数据按大小排列，位于最中间的数据.如果数据的个数为偶数，就取中间两个数据的平均数作为中位数.

(3)平均数：样本数据的算术平均数，即 $\overline{x}=\frac{1}{n}(x_1+x_2+\cdots+x_n)$.

(4)方差与标准差

方差：$s^2=\frac{1}{n}[(x_1-\overline{x})^2+(x_2-\overline{x})^2+\cdots+(x_n-\overline{x})^2]$.

8.离散型随机变量

(1)离散型随机变量的分布列的两个性质

①$p_i\geqslant 0(i=1,2,\cdots,n)$；②$p_1+p_2+\cdots+p_n=1$.

(2)期望的性质：①$E(aX+b)=aE(X)+b$；

②若 $X\sim B(n,p)$，则 $E(X)=np$；

③若 X 服从两点分布，则 $E(X)=p$.

(3)方差公式：$D(X)=[x_1-E(X)]^2\cdot p_1+[x_2-E(X)]^2\cdot p_2+\cdots+[x_n-E(X)]^2\cdot p_n$，标准差为 $\sqrt{D(X)}$.

(4)方差的性质：①$D(aX+b)=a^2D(X)$；

②若 $X\sim B(n,p)$，则 $D(X)=np(1-p)$；

③若 X 服从两点分布，则 $D(X)=p(1-p)$.

(5)独立重复试验的概率计算公式：$P_n(k)=C_n^kp^k(1-p)^{n-k}$.

9.线性回归

线性回归直线 $\hat{y}=\hat{b}x+\hat{a}$ 一定过样本点的中心 $(\overline{x},\overline{y})$.

10.独立性检验

利用随机变量 $K^2=\frac{n(ad-bc)^2}{(a+b)(c+d)(a+c)(b+d)}$ 来判断“两个分类变量有关系”的方法称为独立性检验.如果 K^2 的观测值 k 越大，说明“两个分类变量有关系”的可能性越大.

11.正态分布

如果随机变量 X 服从正态分布，则记为 $X\sim N(\mu,\sigma^2)$.满足正态分布的三个基本概率的值是：①$P(\mu-\sigma<X\leqslant\mu+\sigma)=0.682\ 7$；②$P(\mu-2\sigma<X\leqslant\mu+2\sigma)=0.954\ 5$；③$P(\mu-3\sigma<X\leqslant\mu+3\sigma)=0.997\ 3$.

二、易错易混清零

1.正确应用计数原理：分类加法计数原理针对“分类”问题，其中各种方法相互独立，用其中任何一种方法都

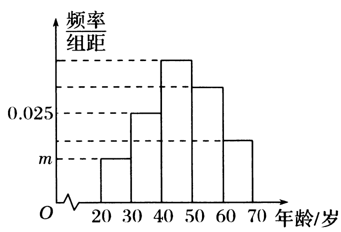
可以做完这件事；分步乘法计数原理针对“分步”问题，各个步骤相互依存，只有各个步骤都完成了才算完成这件事.

【例 1】 中国有十二生肖，又叫十二属相，每一个人的出生年份对应了十二种动物（鼠、牛、虎、兔、龙、蛇、马、羊、猴、鸡、狗、猪）的一种.现有十二生肖的吉祥物各一个，甲、乙、丙三位同学依次选一个作为礼物，甲同学喜欢牛和马，乙同学喜欢牛、兔、狗和羊，丙同学哪个吉祥物都喜欢，如果让三位同学对自己选取的礼物都满意，那么不同的选法有 （　）

A.50 种　　B.60 种　　C.70 种　　D.90 种

2.混淆频率分布条形图和频率分布直方图，误把频率分布直方图纵轴的几何意义当成频率，导致样本数据的频率求错.

【例 2】 近年呼吁高校招生改革的呼声越来越高，在赞成高校招生改革的市民中按年龄分组，得到样本频率分布直方图如图所示，其中年龄在区间$[30,40)$内的有 2 500 人，在区间$[20,30)$内的有 1 200 人，则 m 的值为 （　）



A.0.013　　B.0.13　　C.0.012　　D.0.12

3.应用互斥事件的概率加法公式，一定要注意确定各事件是否彼此互斥，并且注意对立事件是互斥事件的特殊情况，但互斥事件不一定是对立事件，“互斥”是“对立”的必要不充分条件.

【例 3】 抛掷一枚骰子，观察掷出的点数，设事件 A 为出现奇数点，事件 B 为出现 2 点，已知 $P(A)=\frac{1}{2}$，$P(B)=\frac{1}{6}$，则出现奇数点或 2 点的概率之和为________.

4.二项式$(a+b)^n$与$(b+a)^n$的展开式相同，但通项公式不同，对应项也不相同，在遇到类似问题时，要注意区分.还要注意二项式系数与项的系数的区别与联系，同时明确二项式系数最大项与展开式系数最大项的不同.

【例 4】 若$\left(2x-\frac{3}{x}\right)^5$的展开式中的二项式系数和为 A，各项系数和为 B，则 $A-B=$ （　）

A.33　　B.31　　C.-33　　D.-31

5.要注意概率 $P(A|B)$ 与 $P(AB)$ 的区别：(1)在 $P(A|B)$ 中，事件 A，B 发生有时间上的差异，B 先 A 后；在 $P(AB)$ 中，事件 A，B 同时发生.(2)样本空间不同，在 $P(A|B)$ 中，事件 B 成为样本空间；在 $P(AB)$ 中，样本空间仍为 Ω，因而有 $P(A|B)\geqslant P(AB)$.

【例 5】 设 A，B 为两个事件，若事件 A 和 B 同时发生的概率为$\frac{3}{10}$，在事件 A 发生的条件下，事件 B 发生的概率为$\frac{1}{2}$，则事件 A 发生的概率为________.

6.正态密度曲线具有对称性，注意 $X\sim N(\mu,\sigma^2)$ 时，$P(X\geqslant\mu)=0.5$ 的灵活应用.

【例 6】 已知随机变量 ξ 服从正态分布 $N(2,\sigma^2)$，且 $P(\xi<4)=0.8$，则 $P(0<\xi<2)=$ （　）

A.0.6　　B.0.4　　C.0.3　　D.0.2

7.混淆直线方程 $y=ax+b$ 与回归直线 $\hat{y}=\hat{b}x+\hat{a}$ 系数的含义，导致回归分析中致误.

【例 7】 在一组样本数据(x_1,y_1)，(x_2,y_2)，…，(x_6,y_6)的散点图中，若所有样本点$(x_i,y_i)(i=1,2,\cdots,6)$都在曲线 $y=bx^2-\frac{1}{2}$ 附近波动.经计算$\sum_{i=1}^{6}x_i=12$，$\sum_{i=1}^{6}y_i=14$，$\sum_{i=1}^{6}x_i^2=23$，则实数 b 的值为________.

8.易忘判定随机变量是否服从二项分布，盲目使用二项分布的数学期望和方差公式计算致误.

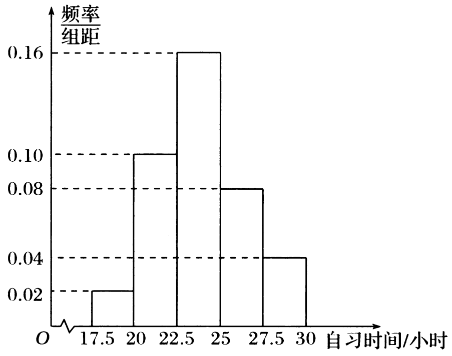
【例 8】 现有 4 人去旅游，旅游地点有 A，B 两个地方可以选择，但 4 人都不知道去哪里玩，于是决定通过掷一枚质地均匀的骰子去决定自己去哪里玩，掷出能被 3 整除的数时去 A 地，掷出其他的则去 B 地.

(1)求这 4 个人中恰好有 1 个人去 A 地的概率；

(2)用 X，Y 分别表示这 4 个人中去 A，B 两地的人数，记 $\xi=X\cdot Y$.求随机变量 ξ 的分布列与数学期望 $E(\xi)$.

三、基础检验查漏

1.某学校调查了高三 1 000 名学生每周的自习时间(单位:小时),制成了如图所示的频率分布直方图,其中自习时间的范围是[17.5,30],样本数据分组为[17.5,20),[20,22.5),[22.5,25),[25,27.5),[27.5,30].根据直方图,以下结论不正确的是 ( )



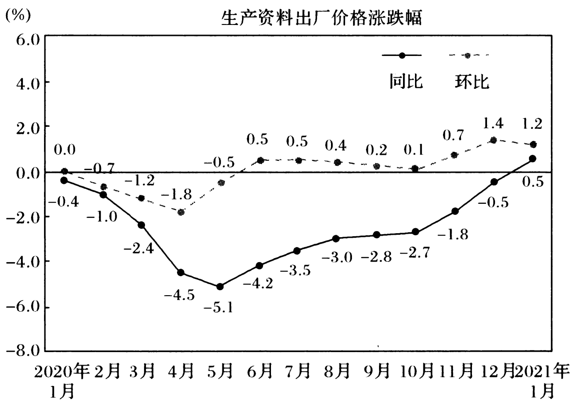
A.估计这 1 000 名学生中每周的自习时间不少于 25 小时的人数是 300

B.估计这 1 000 名学生每周的自习时间的众数是 23.85

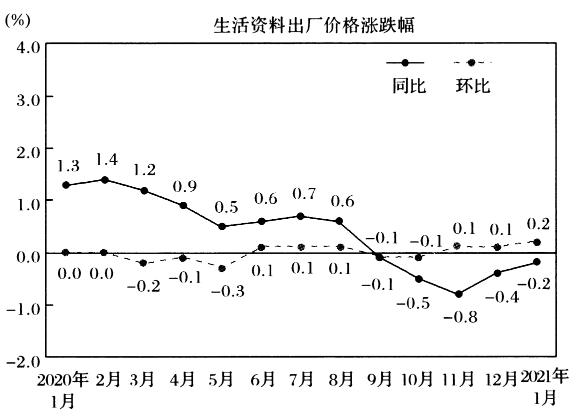
C.估计这 1 000 名学生每周的自习时间的中位数是 23.75

D.估计这 1 000 名学生每周的自习时间的平均数是 23.875

2.(多选)下图是国家统计局发布的生产资料出厂价格涨跌幅以及生活资料出厂价格涨跌幅的统计图,现有如下说法正确的是 ( )



图(1)



图(2)

A.2020 年下半年生产资料出厂价格的环比涨幅呈现上升趋势

B.可以预测,在市场平稳的前提下,2021 年 2 月生活资料出厂价格的环比可能为正数

C.从 2020 年 1 月～12 月生活资料出厂价格同比的数据中随机抽取 3 个,恰有 2 个是正数的概率为 $P=\frac{28}{55}$

D.将 2020 年 1 月～2021 年 1 月生产资料出厂价格的环比涨跌幅从小到大排列后,所得的中位数为0.2%

3.已知两个线性相关变量 x 与 y 的统计数据如下表:

x	3	4	5	6
y	2.5	3	4	m

其回归直线方程是 $\hat{y}=0.7x+\hat{a}$,据此计算,样本(4,3)处的残差为-0.15,则表中 m 的值为 ( )

A.4　　B.4.5　　C.5　　D.5.5

4.第 24 届冬季奥林匹克运动会将于 2022 年在北京举办.为了解某城市居民对冰雪运动的关注情况,随机抽取了该市 100 人进行调查统计,得到如下 2×2 列联表.

	男	女	合计
关注冰雪运动	35	25	60
不关注冰雪运动	15	25	40
合计	50	50	100

根据列联表可知 ( )

参考公式:$K^2=\frac{n(ad-bc)^2}{(a+b)(c+d)(a+c)(b+d)}$,其中 $n=a+b+c+d$.

附表:

$P(K^2\geqslant k_0)$	0.100	0.050	0.010	0.001
k_0	2.706	3.841	6.635	10.828

A.该市女性居民中大约有 5%的人关注冰雪运动

B.该市男性居民中大约有 95%的人关注冰雪运动

C.有 95%的把握认为该市居民是否关注冰雪运动与性别有关

D.有 99%的把握认为该市居民是否关注冰雪运动与性别有关

5.$(x^2+1)\left(2x-\frac{1}{x}\right)^6$ 展开式中的常数项是 ( )

A.160　　B.100

C.-100　　D.-160

6.2021 年 1 月 18 日,国家航天局探月与航天工程中心组织完成了我国首辆火星车全球征名活动的初次评审.初次环节遴选出弘毅、麒麟、哪吒、赤兔、祝融、求索、风火轮、追梦、天行、火星共 10 个名称,作为我国首辆火星车的命名范围.某同学为了研究这些初选名称的内含,计划从中随机选取 4 个名称依次进行分析,若选中赤兔,则赤兔不是第一个被分析的情况有 ( )

A.2 016 种　　B.1 512 种

C.1 426 种　　D.1 362 种

7.从 1,2,3,4,5 中选出三个不同的数字组成一个三位数,则这个三位数是 3 的倍数的概率为 ( )

A.$\frac{3}{20}$ B.$\frac{3}{10}$ C.$\frac{2}{5}$ D.$\frac{1}{5}$

8.某班有 60 名学生,一次考试后数学成绩 $\xi\sim N(110,\sigma^2)$,若 $P(100\leqslant\xi\leqslant110)=0.35$,则估计该班学生数学成绩在 120 分以上的人数为 ( )

A.10 B.9 C.8 D.7

9.2021 年 4 月 17 日,江苏园博会正式向公众开放.昔日废弃采矿区化茧成蝶,变身成了“世界级山地花园群”.园博园的核心景区苏韵荟谷以流水串联,再现了江苏 13 个地市历史名园的芳华,行走其间,仿佛穿游在千年历史长河中,吸引众多游客前来打卡.某旅行社开发了江苏园博园一日游线路,考虑成本与防疫要求,每团人数限定为不少于 35 人,不多于 40 人,除去成本,旅行社盈利 100 元/人.已知该旅行社已经发出的 10 个旅行团的游客人数如下表所示:

序号	1	2	3	4	5
游客人数	39	35	38	38	36
序号	6	7	8	9	10
游客人数	39	40	37	40	38

(1)该旅行社计划从这 10 个团队中随机抽取 3 个团队的游客,就服务满意度进行回访,求这 3 个团队人数不全相同的概率;

(2)预计暑假期间发团 200 个,将盈利总额记为 X(单位:万元),用上表中的频率估计概率,求 X 的数学期望.

10.2021 年是“十四五”开局之年,是在全面建成小康社会,实现第一个百年奋斗目标之后,全面建设社会主义现代化国家新征程开启之年,新征程的第一阶段是 2020 年到 2035 年,基本实现社会主义现代化,其中保障农村农民的生活达到富裕是一个关键指标.某地区在 2020 年底全面建成小康社会,随着实施乡村振兴战略规划,该地区农村居民的收入逐渐增加,可支配消费支出也逐年增加.该地区统计了 2016 年—2020 年农村居民人均消费支出情况,对有关数据处理后,制作如图 1 的折线图(其中变量 y(万元)表示该地区农村居民人均年消费支出,年份用变量 t 表示,其取值依次为 1,2,3,……).

(1)由图 1 可知,变量 y 与 t 具有很强的线性相关关系,求 y 关于 t 的回归方程,并预测 2021 年该地区农村居民人均消费支出;

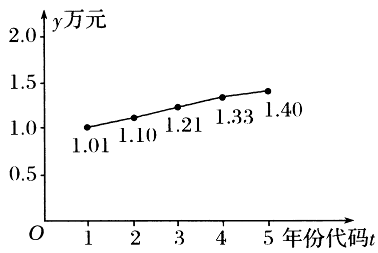


图 1

2016～2020 年该地区农村居民人均消费支出

(2)在国际上,常用恩格尔系数(其含义是指食品类支出总额占个人消费支出总额的比重)来衡量一个国家和地区人民生活水平的状况.根据联合国粮农组织的标准:恩格尔系数在 40%～50%为小康,30%～40%为富裕.已知 2020 年该地区农村居民平均消费支出构成如图 2 所示,预测 2021 年该地区农村居民食品类支出比 2020 年增长 3%,从恩格尔系数判断 2021 年底该地区农村居民生活水平能否达到富裕生活标准.

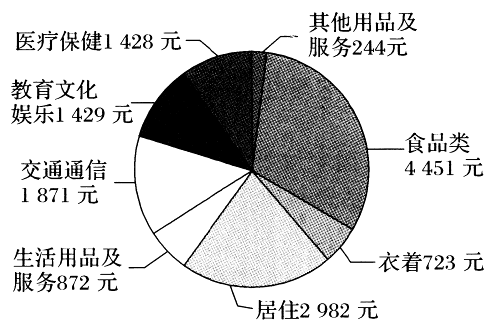


图 2

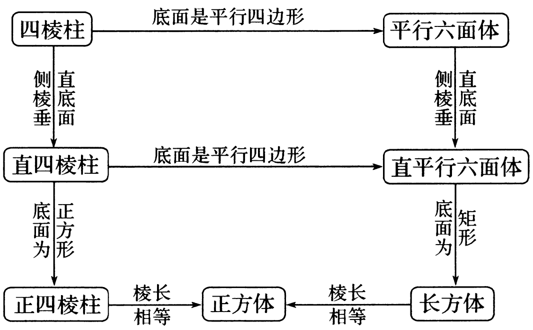
2020 年该地区农村居民人均消费支出构成

参考公式:回归方程 $\hat{y}=\hat{b}x+\hat{a}$ 中斜率和截距的最小二乘估计公式分别为:$\hat{b}=\dfrac{\sum\limits_{i=1}^{n}(x_i-\overline{x})(y_i-\overline{y})}{\sum\limits_{i=1}^{n}(x_i-\overline{x})^2}=\dfrac{\sum\limits_{i=1}^{n}x_iy_i-n\overline{x}\,\overline{y}}{\sum\limits_{i=1}^{n}x_i^2-n\overline{x}^2}$,$\hat{a}=\overline{y}-\hat{b}\,\overline{x}$.

回顾 6　空间向量与立体几何

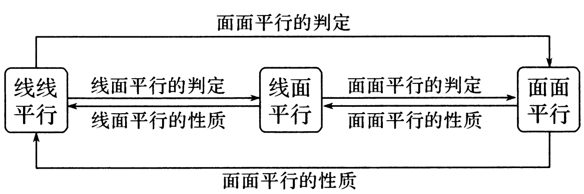
一、必备知识结论

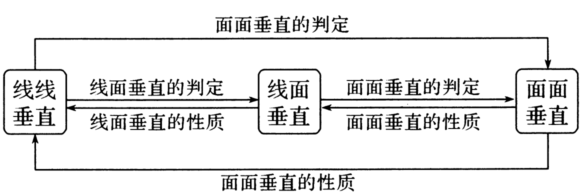
1.四棱柱、直四棱柱、正四棱柱、正方体、平行六面体、直平行六面体、长方体之间的关系



2.平行、垂直关系的转化示意图

(1)





(2)两个结论：① $\left.\begin{matrix}a\perp\alpha\\ b\perp\alpha\end{matrix}\right\}\Rightarrow a/\!/b$，② $\left.\begin{matrix}a/\!/b\\ a\perp\alpha\end{matrix}\right\}\Rightarrow b\perp\alpha$.

3.证明空间位置关系的方法

(1)线面平行：$\left.\begin{matrix}a/\!/b\\ b\subset\alpha\\ a\not\subset\alpha\end{matrix}\right\}\Rightarrow a/\!/\alpha$，$\left.\begin{matrix}\alpha/\!/\beta\\ a\subset\beta\end{matrix}\right\}\Rightarrow a/\!/\alpha$，$\left.\begin{matrix}\alpha\perp\beta\\ a\perp\beta\\ a\not\subset\alpha\end{matrix}\right\}\Rightarrow a/\!/\alpha$.

(2)线线平行：$\left.\begin{matrix}a/\!/\alpha\\ a\subset\beta\\ \alpha\cap\beta=b\end{matrix}\right\}\Rightarrow a/\!/b$，$\left.\begin{matrix}a\perp\alpha\\ b\perp\alpha\end{matrix}\right\}\Rightarrow a/\!/b$，$\left.\begin{matrix}\alpha/\!/\beta\\ \alpha\cap\gamma=a\\ \beta\cap\gamma=b\end{matrix}\right\}\Rightarrow a/\!/b$，$\left.\begin{matrix}a/\!/b\\ a/\!/c\end{matrix}\right\}\Rightarrow c/\!/b$.

(3)面面平行：$\left.\begin{matrix}a\subset\alpha,b\subset\alpha\\ a\cap b=O\\ a/\!/\beta,b/\!/\beta\end{matrix}\right\}\Rightarrow\alpha/\!/\beta$，$\left.\begin{matrix}a\perp\alpha\\ a\perp\beta\end{matrix}\right\}\Rightarrow\alpha/\!/\beta$，$\left.\begin{matrix}\alpha/\!/\beta\\ \gamma/\!/\beta\end{matrix}\right\}\Rightarrow\alpha/\!/\gamma$.

(4)线线垂直：$\left.\begin{matrix}a\perp\alpha\\ b\subset\alpha\end{matrix}\right\}\Rightarrow a\perp b$.

(5)线面垂直：$\left.\begin{matrix}a\subset\alpha,b\subset\alpha\\ a\cap b=O\\ l\perp a,l\perp b\end{matrix}\right\}\Rightarrow l\perp\alpha$，$\left.\begin{matrix}\alpha\perp\beta\\ \alpha\cap\beta=l\\ a\subset\alpha,a\perp l\end{matrix}\right\}\Rightarrow a\perp\beta$，$\left.\begin{matrix}\alpha/\!/\beta\\ a\perp\alpha\end{matrix}\right\}\Rightarrow a\perp\beta$，$\left.\begin{matrix}a/\!/b\\ a\perp\alpha\end{matrix}\right\}\Rightarrow b\perp\alpha$.

(6)面面垂直：$\left.\begin{matrix}a\subset\beta\\ a\perp\alpha\end{matrix}\right\}\Rightarrow\alpha\perp\beta$，$\left.\begin{matrix}a/\!/\beta\\ a\perp\alpha\end{matrix}\right\}\Rightarrow\alpha\perp\beta$.

4.用向量求空间角

(1)直线 l_1,l_2 的夹角 θ 满足 $\cos\theta=|\cos\langle\boldsymbol{l}_1,\boldsymbol{l}_2\rangle|$(其中 $\boldsymbol{l}_1,\boldsymbol{l}_2$ 分别是直线 l_1,l_2 的方向向量).

(2)直线 l 与平面 α 的夹角 θ 满足 $\sin\theta=|\cos\langle\boldsymbol{l},\boldsymbol{n}\rangle|$(其中 $\boldsymbol{l}$ 是直线 l 的方向向量，$\boldsymbol{n}$ 是平面 α 的法向量).

(3)平面 α,β 的夹角 θ 满足 $\cos\theta=|\cos\langle\boldsymbol{n}_1,\boldsymbol{n}_2\rangle|$，则二面角 $\alpha-l-\beta$ 的平面角为 θ 或 $\pi-\theta$(其中 $\boldsymbol{n}_1,\boldsymbol{n}_2$ 分别是平面 α,β 的法向量).

二、易错易混清零

1.易混淆几何体的表面积与侧面积的区别，几何体的表面积是几何体的侧面积与所有底面面积之和，不能漏掉几何体的底面积；求锥体体积时，易漏掉体积公式中的系数 $\frac{1}{3}$.

【例 1】 在梯形 $ABCD$ 中，$\angle ABC=\frac{\pi}{2}$，$AD/\!/BC$，$BC=2AD=2AB=2$.将梯形 $ABCD$ 绕 AD 所在的直线旋转一周而形成的曲面所围成的几何体的表面积为 (　　)

A.$(5+\sqrt{2})\pi$　　B.$(4+\sqrt{2})\pi$

C.$(5+2\sqrt{2})\pi$　　D.$(3+\sqrt{2})\pi$

2.不清楚空间线面平行与垂直关系中的判定定理和性质定理，忽视判定定理和性质定理中的条件，导致判断出错.如由 $\alpha\perp\beta$，$\alpha\cap\beta=l$，$m\perp l$，易误得出 $m\perp\beta$ 的结论，这是因为忽视面面垂直的性质定理中 $m\subset\alpha$ 的限制条件.

【例 2】 已知 m,n 是不同的直线，α,β,γ 是不同的平面.给出下列命题：

①若 $\alpha\perp\beta$，$\alpha\cap\beta=m$，$n\perp m$，则 $n\perp\alpha$ 或 $n\perp\beta$；

②若 $\alpha/\!/\beta$，$\alpha\cap\gamma=m$，$\beta\cap\gamma=n$，则 $m/\!/n$；

③若 m 不垂直于 α，则 m 不可能垂直于 α 内的无数条直线；

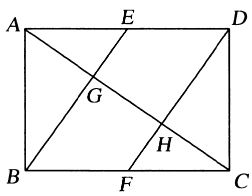
④若 $\alpha \cap \beta = m$，$n /\!/ m$，且 $n \not\subset \alpha$，$n \not\subset \beta$，则 $n /\!/ \alpha$，且 $n /\!/ \beta$；

⑤若 m，n 为异面直线，则存在平面 α 过 m 且使 $n \perp \alpha$。

其中正确的是________。(填序号)

3.注意图形的翻折与展开前后变与不变的量以及位置关系.对照前后图形，弄清楚变与不变的元素后，再立足于不变的元素的位置关系与数量关系去探求变化后的元素在空间中的位置与数量关系.

【例3】 在一张矩形白纸 $ABCD$ 中，$AB=10$，$AD=10\sqrt{2}$，E，F 分别为 AD，BC 的中点，现分别将 $\triangle ABE$，$\triangle CDF$ 沿 BE，DF 折起，且 A，C 在平面 $BFDE$ 同侧，则下列命题正确的是________。(写出所有正确命题的序号)



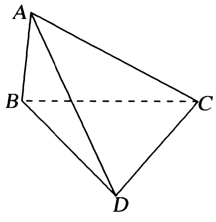
①当平面 $ABE /\!/$ 平面 CDF 时，$AC /\!/$ 平面 $BFDE$；

②当平面 $ABE /\!/$ 平面 CDF 时，$AE /\!/ CD$；

③当 A，C 重合于点 P 时，三棱锥 $P-DEF$ 的外接球的表面积为 150π。

4.用空间向量求角时易忽视向量的夹角与所求角之间的关系，如求解二面角时，忽视法向量的方向，误以为两个法向量的夹角就是所求的二面角，导致出错.

【例4】 如图，在四面体 $ABCD$ 中，$AB=1$，$AD=2\sqrt{3}$，$BC=3$，$CD=2$，$\angle ABC=\angle DCB=\dfrac{\pi}{2}$，则二面角 $A-BC-D$ 的大小为________.



三、基础检验查漏

1.已知直线 l，m 和平面 α，下列命题中正确的是（　　）

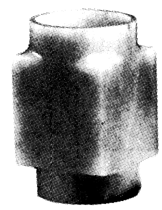
A.若 $l /\!/ m$，$m \subset \alpha$，则 $l /\!/ \alpha$

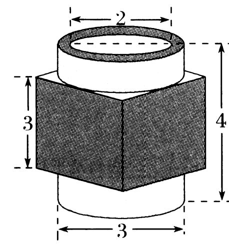
B.若 $l /\!/ \alpha$，$m \subset \alpha$，则 $l /\!/ m$

C.若 $l \perp \alpha$，$m \subset \alpha$，则 $l \perp m$

D.若 $l \perp m$，$l \perp \alpha$，则 $m \perp \alpha$

2.三星堆遗址，位于四川省广汉市，距今约三千到五千年.2021年2月4日，在三星堆遗址祭祀坑区4号坑发现了玉琮，玉琮是一种内圆外方的筒型玉器，是一种古人用于祭祀的礼器.假定某玉琮中间内空，形状对称，如图所示，圆筒内径长 2 cm，外径长 3 cm，筒高4 cm，中部为棱长是 3 cm 的正方体的一部分，圆筒的外侧面内切于正方体的侧面，则该玉琮的体积为（　　）





A.$\left(27-\dfrac{7\pi}{4}\right)\text{cm}^3$　　B.$\left(24+\dfrac{\pi}{4}\right)\text{cm}^3$

C.$\left(36-\dfrac{9\pi}{4}\right)\text{cm}^3$　　D.$\left(18+\dfrac{7\pi}{4}\right)\text{cm}^3$

3.有下列四个命题：

①三个点可以确定一个平面；

②圆锥的侧面展开图可以是一个圆面；

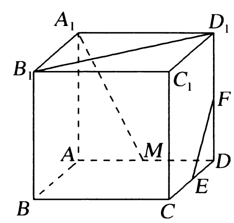
③底面是等边三角形，三个侧面都是等腰三角形的三棱锥是正三棱锥；

④过球面上任意两不同点的大圆有且只有一个.

其中正确命题的个数是（　　）

A.0　　B.1　　C.2　　D.3

4.在正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，E，F，M 分别为 CD，DD_1，AD 的中点，则异面直线 A_1M 与 EF 所成角的余弦值为（　　）



A.$\dfrac{1}{2}$　　B.$\dfrac{\sqrt{10}}{5}$

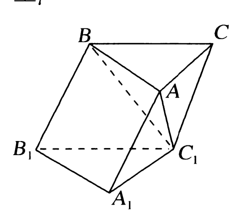
C.$\dfrac{\sqrt{15}}{5}$　　D.$\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

5.已知三条不重合的直线 m，n，l，三个不重合的平面 α，β，γ，下列命题中正确的是（　　）

A.$\begin{cases} m \perp l, \\ n \perp l \end{cases} \Rightarrow m /\!/ n$　　B.$\begin{cases} l \perp \alpha, \\ l \perp n \end{cases} \Rightarrow n /\!/ \alpha$

C.$\begin{cases} \alpha \perp \gamma, \\ \beta \perp \gamma \end{cases} \Rightarrow \alpha /\!/ \beta$　　D.$\begin{cases} m \perp \alpha, \\ m \perp \beta \end{cases} \Rightarrow \alpha /\!/ \beta$

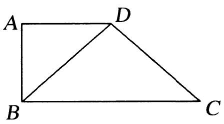
6.如图，在斜三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中，$\angle BAC=90^\circ$，$BC_1 \perp AC$，点 P 为 AC_1 上的一个动点，则点 P 在底面 ABC 上的射影 H 必在（　　）



A.直线 AB 上　　B.直线 BC 上

C.直线 AC 上　　D.$\triangle ABC$ 内部

7.如图所示，四边形 $ABCD$ 中，$AD \parallel BC$，$AD=AB$，$\angle BCD=45^{\circ}$，$\angle BAD=90^{\circ}$，将 $\triangle ABD$ 沿 BD 折起，使面 $ABD\perp$ 面 BCD，连接 AC，则下列命题正确的是 (　　)



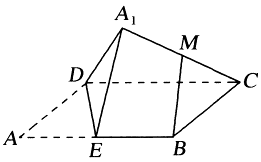
A.面 $ABD\perp$ 面 ABC

B.面 $ADC\perp$ 面 BDC

C.面 $ABC\perp$ 面 BDC

D.面 $ADC\perp$ 面 ABC

8.(多选)如图，在矩形 $ABCD$ 中，$AB=2AD=2$，点 E 为 AB 边上的中点.将 $\triangle ADE$ 沿直线 DE 翻折成 $\triangle A_1DE$(点 A_1 不落在底面 $BCDE$ 内).若点 M 为线段 A_1C 的中点，则在 $\triangle ADE$ 翻折过程中，以下命题正确的是 (　　)



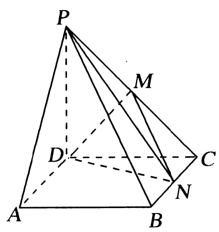
A.四棱锥 A_1-BCDE 的体积的最大值为 $\frac{\sqrt{2}}{4}$

B.线段 BM 的长度是定值

C.$MB\parallel$ 平面 A_1DE 一定成立

D.存在某个位置，使 $DE\perp A_1C$

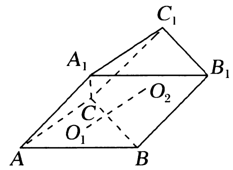
9.如图，在四棱锥 $P-ABCD$ 中，底面 $ABCD$ 为正方形，$PD\perp$ 底面 $ABCD$，M 为线段 PC 的中点，$PD=AD=2$，N 为线段 BC 上的动点.



(1)证明：$MD\perp PN$；

(2)当 N 为线段 BC 的中点时，求直线 PA 与平面 MND 所成角的正弦值.

10.如图，三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中，底面 $\triangle ABC$ 是正三角形，O_1 是其中心，侧面 BCC_1B_1 是正方形，O_2 是其中心.



(1)判断直线 O_1O_2 与直线 AA_1 的位置关系，并说明理由；

(2)若四面体 A_1-ABC 是正四面体，求平面 BCC_1B_1 与平面 ABC 所成锐二面角的余弦值.

回顾 7　解析几何

一、必备知识结论

1.直线 $l_1:A_1x+B_1y+C_1=0$ 与直线 $l_2:A_2x+B_2y+C_2=0$ 的位置关系

(1)平行$\Leftrightarrow A_1B_2-A_2B_1=0$(斜率相等)且 $B_1C_2-B_2C_1\neq0$(在 y 轴上截距不相等).

(2)相交$\Leftrightarrow A_1B_2-A_2B_1\neq0$.

(3)重合$\Leftrightarrow A_1B_2-A_2B_1=0$ 且 $B_1C_2-B_2C_1=0$.

(4)垂直$\Leftrightarrow A_1A_2+B_1B_2=0$.

2.两直线的位置关系的应用

(1)讨论两条直线的位置关系应注意斜率不存在或斜率为 0 的情况,当两条直线中的一条直线斜率不存在,另一条直线斜率为 0 时,它们也垂直.

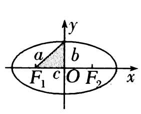
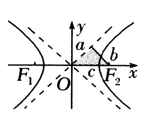
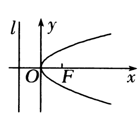
(2)已知直线 $l:Ax+By+C=0$,则与直线 l 平行的直线方程可设为 $Ax+By+m=0(m\neq C)$,与直线 l 垂直的直线方程可设为 $Bx-Ay+n=0$.

3.直线与圆、圆与圆的位置关系及判断方法

(1)直线与圆的位置关系:相交、相切、相离,代数判断法与几何判断法.

(2)圆与圆的位置关系:相交、内切、外切、外离、内含,代数判断法与几何判断法.

4.圆锥曲线的定义、标准方程与几何性质

名称		椭圆	双曲线	抛物线
定义		$\|PF_1\|+\|PF_2\|=2a(2a>\|F_1F_2\|)$	$\|\|PF_1\|-\|PF_2\|\|=2a(2a<\|F_1F_2\|)$	$\|PF\|=\|PM\|$ 点 F 不在直线 l 上,$PM\perp l$ 于 M
标准方程		$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ $(a>b>0)$	$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ $(a>0,b>0)$	$y^2=2px$ $(p>0)$
图形				
几何性质	范围	$\|x\|\leqslant a,\|y\|\leqslant b$	$\|x\|\geqslant a$	$x\geqslant0$
	顶点	$(\pm a,0)$,$(0,\pm b)$	$(\pm a,0)$	$(0,0)$
	对称性	关于 x 轴,y 轴和原点对称		关于 x 轴对称
	焦点	$(\pm c,0)$		$\left(\frac{p}{2},0\right)$
	轴	长轴长 $2a$,短轴长 $2b$	实轴长 $2a$,虚轴长 $2b$	
	离心率	$e=\frac{c}{a}=\sqrt{1-\frac{b^2}{a^2}}(0<e<1)$	$e=\frac{c}{a}=\sqrt{1+\frac{b^2}{a^2}}(e>1)$	$e=1$
	准线			$x=-\frac{p}{2}$
	渐近线		$y=\pm\frac{b}{a}x$	

5.直线与圆锥曲线的位置关系

判断方法:通过解直线方程与圆锥曲线方程联立得到的方程组进行判断.

弦长公式:$|AB|=\sqrt{1+k^2}|x_1-x_2|=\sqrt{1+\frac{1}{k^2}}|y_1-y_2|$.

6.解决范围、最值问题的常用解法

(1)数形结合法:利用待求量的几何意义,确定出极端位置后,数形结合求解.

(2)构建不等式法:利用已知或隐含的不等关系,构建以待求量为元的不等式求解.

(3)构建函数法:先引入变量构建以待求量为因变量的函数,再求其值域.

7.定点问题的思路

(1)动直线 l 过定点问题,解法:设动直线方程(斜率存在)为 $y=kx+t$,由题设条件将 t 用 k 表示为 $t=mk$,得 $y=k(x+m)$,故动直线过定点$(-m,0)$.

(2)动曲线 C 过定点问题,解法:引入参变量建立曲线 C 的方程,再根据其对参变量恒成立,令其系数等于零,得出定点.

8.求解定值问题的两大途径

(1) 由特例得出一个值(此值一般就是定值) → 证明定值:将问题转化为证明待证式与参数(某些变量)无关

(2)先将式子用动点坐标或动线中的参数表示,再利用其满足的约束条件使其绝对值相等的正负项抵消或分子、分母约分得定值.

9.解决存在性问题的解题步骤

第一步:先假设存在,引入参变量,根据题目条件列出关于参变量的方程(组)或不等式(组);

第二步:解此方程(组)或不等式(组),若有解则存在,若无解则不存在;

第三步:得出结论.

二、易错易混清零

1.不能准确区分直线倾斜角的取值范围以及斜率与倾斜角的关系，导致由斜率的取值范围确定倾斜角的范围时出错.

【例1】 直线 $x\cos\theta+\sqrt{3}y-2=0$ 的倾斜角 α 的取值范围是________.

2.易忽视直线方程的几种形式的限制条件，如根据直线在两坐标轴上的截距相等设方程时，忽视截距为0的情况.

【例2】 经过点 $A(4,2)$，且在 x 轴上的截距等于在 y 轴上的截距的3倍的直线 l 的方程的一般式为________.

3.讨论两条直线的位置关系时，易忽视系数等于零时的情况导致漏解，如两条直线垂直时，一条直线的斜率不存在，另一条直线斜率为零.

【例3】 $a=3$ 是直线 $ax+2y+3a=0$ 和 $3x+(a-1)y=a-7$ 平行的 ( )

A.充分不必要条件　　B.必要不充分条件

C.充要条件　　D.既不充分也不必要条件

4.两圆的位置关系可根据圆心距与半径的关系判定，在两圆相切的关系中，误认为相切为两圆外切，忽视内切的情形；求圆的切线方程时，易忽视斜率不存在的情形.

【例4】 (1)若点 $P(1,2)$ 在以坐标原点为圆心的圆上，则该圆在点 P 处的切线方程为________.

(2)双曲线 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$ 的左焦点为 F_1，顶点为 A_1,A_2，P 是双曲线右支上任意一点，则分别以线段 PF_1，A_1A_2 为直径的两圆的位置关系为________.

5.易混淆椭圆的标准方程与双曲线的标准方程，尤其是方程中 a,b,c 三者之间的关系，导致计算错误.

【例5】 已知双曲线 $C:\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$ 的离心率 $e=\frac{5}{4}$，且其右焦点为 $F_2(5,0)$，则双曲线 C 的标准方程为________.

6.利用椭圆、双曲线的定义解题时，要注意两种曲线的定义形式及其限制条件.如在双曲线的定义中，有两点是缺一不可的：其一，绝对值；其二，$2a<|F_1F_2|$.如果不满足第一个条件，动点到两定点的距离之差为常数，而不是差的绝对值为常数，那么其轨迹只能是双曲线的一支.

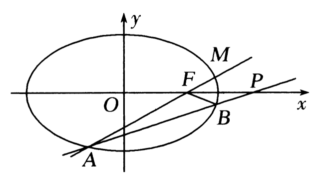
【例6】 已知圆 $C_1:(x+3)^2+y^2=1$ 和圆 $C_2:(x-3)^2+y^2=9$，动圆 M 同时与圆 C_1 及圆 C_2 外切，则动圆圆心 M 的轨迹方程为________.

7.由圆锥曲线方程讨论几何性质时，易忽视讨论焦点所在的坐标轴导致漏解.

【例7】 已知椭圆 $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{m}=1$ 的离心率等于 $\frac{\sqrt{3}}{2}$，则 $m=$________.

8.直线与圆锥曲线相交的必要条件是它们构成的方程组有实数解，消元后得到的方程中要注意：二次项的系数是否为零，$\Delta\geqslant0$ 的限制.尤其是在应用根与系数的关系解决问题时，必须先有"$\Delta\geqslant0$"；在求交点、弦长、中点、斜率、对称或存在性问题都应在"$\Delta>0$"下进行.

【例8】 已知椭圆 $C:\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 的离心率为 $\frac{\sqrt{2}}{2}$，右焦点为 F，以原点 O 为圆心，椭圆 C 的短半轴长为半径的圆与直线 $x-y+\sqrt{2}=0$ 相切.



(1)求椭圆 C 的方程；

(2)如图，过定点 $P(2,0)$ 的直线 l 交椭圆 C 于 A,B 两点，连接 AF 并延长交椭圆 C 于点 M，求证：$\angle PFM=\angle PFB$.

三、基础检验查漏

1.设直线 $l:3x+2y-6=0$，$P(m,n)$ 为直线 l 上动点，则 $(m-1)^2+n^2$ 的最小值为 ( )

A.$\frac{9}{13}$　B.$\frac{3}{13}$　C.$\frac{3\sqrt{13}}{13}$　D.$\frac{\sqrt{13}}{13}$

2.已知椭圆 C 的方程是 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$，点 $A\left(-1,\frac{3}{2}\right)$ 在椭圆 C 上，过点 A 且斜率为 $-\frac{3}{4}$ 的直线恰好经过椭圆的一个焦点，则椭圆 C 的方程为 ( )

A.$\frac{x^2}{5}+\frac{y^2}{3}=1$　B.$\frac{x^2}{5}+\frac{2y^2}{5}=1$

C.$\frac{x^2}{10}+\frac{2y^2}{5}=1$　D.$\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1$

3.已知双曲线 $C:\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$ 的一条渐近线被圆 $x^2+y^2-4x=0$ 截得的线段长为 $\frac{16}{5}$，则双曲线 C 的离心率为 ( )

A.$\frac{4}{3}$　B.$\frac{5}{3}$　C.$\frac{3}{2}$　D.$\frac{5}{4}$

4.过双曲线 $C:\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$ 的右焦点 F 作 x 轴的垂线，与双曲线 C 及其一条渐近线在第一象限分别交于 A,B 两点，且 $\overrightarrow{OF}=2\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OB}$($O$ 为坐标原点)，则该双曲线的离心率是 ( )

A.2　B.$\sqrt{3}$　C.$\frac{3\sqrt{2}}{2}$　D.$\frac{2\sqrt{3}}{3}$

5.已知 F 是抛物线 $C:y^2=4x$ 的焦点，过 C 上一点 M 作其准线的垂线，垂足为 N，若 $\angle NMF=120°$，则点 M 的横坐标是 ( )

A.$\frac{1}{3}$　B.$\frac{1}{2}$　C.$\frac{2}{3}$　D.1

6.已知双曲线 $y=\frac{2}{x}$ 绕原点顺时针转动 $45°$，就会得到双曲线 $x^2-y^2=4$，类比可知，以双曲线 $y=\frac{2x+2}{x-1}$ 的对称中心为圆心，焦距为直径的圆的标准方程为 ( )

A.$(x-1)^2+(y-2)^2=16$

B.$(x-1)^2+(y+2)^2=8$

C.$(x-1)^2+(y-2)^2=8$

D.$(x+1)^2+(y-2)^2=16$

7.若 $kxy-x+6y-3=0$ 表示两条直线，则实数 k 的值为 ( )

A.3　B.2　C.1　D.0

8.(多选)(2021·山东临沂期末)已知圆 $C:x^2+y^2=4$，直线 $l:(3+m)x+4y-3+3m=0(m\in\mathbf{R})$，则下列四个说法正确的是 ( )

A.直线 l 恒过定点 $(-3,3)$

B.当 $m=0$ 时，圆 C 上有且仅有三个点到直线 l 的距离都等于 1

C.若圆 C 与曲线 $x^2+y^2-6x-8y+m=0$ 恰有三条公切线，则 $m=16$

D.当 $m=13$ 时，若由直线 l 上一个动点 P 向圆 C 引两条切线 PA,PB，其中 A,B 为切点，则直线 AB 经过点 $\left(-\frac{16}{9},-\frac{4}{9}\right)$

9.已知经过圆 $C_1:x^2+y^2=r^2$ 上点 (x_0,y_0) 的切线方程是 $x_0x+y_0y=r^2$.

(1)类比上述性质，直接写出经过椭圆 $C_2:\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ $(a>b>0)$ 上一点 (x_0,y_0) 的切线方程；

(2)已知椭圆 $E:\frac{x^2}{6}+y^2=1$，P 为直线 $x=3$ 上的动点，过 P 作椭圆 E 的两条切线，切点分别为 A、B，求证：直线 AB 过定点.

10.已知抛物线 $y^2=2px(0<p<4)$ 的焦点为 F，点 P 在抛物线上，点 P 的纵坐标为 6，且 $|PF|=10$.

(1)求抛物线的标准方程；

(2)若 A,B 为抛物线上的两个动点(异于 P 点)且 $AP\perp AB$，求点 B 纵坐标的取值范围.

回顾 8　函数与导数

一、必备知识结论

1.函数的定义域和值域

(1)求函数定义域的类型和相应方法

①若已知函数的解析式,则函数的定义域是使解析式有意义的自变量的取值范围;

②若已知 $f(x)$的定义域为$[a,b]$,则 $f(g(x))$的定义域为不等式 $a\leqslant g(x)\leqslant b$ 的解集;反之,已知$f(g(x))$的定义域为$[a,b]$,则 $f(x)$的定义域为函数 $y=g(x)$ $(x\in[a,b])$的值域.

(2)常见函数的值域

①一次函数 $y=kx+b(k\neq 0)$的值域为 $\mathbf{R}$;

②二次函数 $y=ax^2+bx+c(a\neq 0)$:当 $a>0$ 时,值域为$\left[\frac{4ac-b^2}{4a},+\infty\right)$,当 $a<0$ 时,值域为$\left(-\infty,\frac{4ac-b^2}{4a}\right]$;

③反比例函数 $y=\frac{k}{x}(k\neq 0)$的值域为$\{y\in\mathbf{R}|y\neq 0\}$.

2.函数的奇偶性、周期性

(1)奇偶性是函数在其定义域上的整体性质,对于定义域内的任意 x(定义域关于原点对称),都有 $f(-x)=-f(x)$成立,则 $f(x)$为奇函数(都有 $f(-x)=f(x)$成立,则 $f(x)$为偶函数).

(2)周期性是函数在其定义域上的整体性质,一般地,对于函数 $f(x)$,如果对于定义域内的任意一个 x 的值,若 $f(x+T)=f(x)(T\neq 0)$,则 $f(x)$是周期函数,T 是它的一个周期.

3.关于函数周期性、对称性的结论

(1)函数的周期性

由周期函数的定义“函数 $f(x)$满足 $f(x)=f(a+x)$ $(a>0)$,则 $f(x)$是周期为 a 的周期函数”得:

①若 $f(a+x)=-f(x)(a\neq 0)$成立,则 $T=2a$;

②若 $f(x+a)=\frac{1}{f(x)}(a\neq 0)$成立,则 $T=2a$;

③若 $f(x+a)=-\frac{1}{f(x)}(a\neq 0)$成立,则 $T=2a$;

④若 $f(x+a)=f(x-a)(a\neq 0)$成立,则 $T=2a$.

(2)函数图象的对称性

①若函数 $y=f(x)$满足 $f(a+x)=f(a-x)$,即 $f(x)=f(2a-x)$,则 $f(x)$的图象关于直线 $x=a$ 对称;

②若函数 $y=f(x)$满足 $f(a+x)=-f(a-x)$,即 $f(x)=-f(2a-x)$,则 $f(x)$的图象关于点$(a,0)$对称;

③若函数 $y=f(x)$满足 $f(a+x)=f(b-x)$,则函数 $f(x)$的图象关于直线 $x=\frac{a+b}{2}$对称.

4.函数的单调性

函数的单调性是函数在其定义域上的局部性质.

①单调性的定义的等价形式:设任意 $x_1,x_2\in[a,b]$,那么$(x_1-x_2)[f(x_1)-f(x_2)]>0\Leftrightarrow\frac{f(x_1)-f(x_2)}{x_1-x_2}>0\Leftrightarrow f(x)$在$[a,b]$上是增函数;

$(x_1-x_2)[f(x_1)-f(x_2)]<0\Leftrightarrow\frac{f(x_1)-f(x_2)}{x_1-x_2}<0\Leftrightarrow f(x)$在$[a,b]$上是减函数.

②若函数 $f(x)$和 $g(x)$都是减函数,则在公共定义域内,$f(x)+g(x)$是减函数;若函数 $f(x)$和 $g(x)$都是增函数,则在公共定义域内,$f(x)+g(x)$是增函数;根据同增异减判断复合函数 $y=f(g(x))$的单调性.

5.函数图象的基本变换

(1)平移变换:$y=f(x)\xrightarrow[h<0,\text{左移}]{h>0,\text{右移}}y=f(x-h)$,$y=f(x)\xrightarrow[k<0,\text{下移}]{k>0,\text{上移}}y=f(x)+k$.

(2)伸缩变换:$y=f(x)\xrightarrow[\omega>1,\text{缩}]{0<\omega<1,\text{伸}}y=f(\omega x)$,$y=f(x)\xrightarrow[A>1,\text{伸}]{0<A<1,\text{缩}}y=Af(x)$.

(3)对称变换:$y=f(x)\xrightarrow{x\text{ 轴}}y=-f(x)$,$y=f(x)\xrightarrow{y\text{ 轴}}y=f(-x)$,$y=f(x)\xrightarrow{\text{原点}}y=-f(-x)$.

6.准确记忆指数函数与对数函数的基本性质

(1)定点:$y=a^x(a>0$,且 $a\neq 1)$的图象恒过$(0,1)$点;$y=\log_a x(a>0$,且 $a\neq 1)$的图象恒过$(1,0)$点.

(2)单调性:当 $a>1$ 时,$y=a^x$ 在 $\mathbf{R}$ 上单调递增;$y=\log_a x$ 在$(0,+\infty)$上单调递增;

当 $0<a<1$ 时,$y=a^x$ 在 $\mathbf{R}$ 上单调递减;$y=\log_a x$ 在$(0,+\infty)$上单调递减.

7.函数与方程

(1)零点定义:x_0 为函数 $f(x)$的零点$\Leftrightarrow f(x_0)=0\Leftrightarrow(x_0,0)$为 $f(x)$的图象与 x 轴的交点.

(2)确定函数零点的三种常用方法

①解方程判定法:解方程 $f(x)=0$;

②零点定理法:根据连续函数 $y=f(x)$满足$f(a)f(b)<0$,判断函数在区间(a,b)内存在零点;

③数形结合法:方程两端对应的函数类型不同时多用此法求解.

8.易忘的求导公式

(1)$(\sin x)'=\cos x$,$(\cos x)'=-\sin x$.

(2)$(\ln x)'=\frac{1}{x}(x>0)$,$(\log_a x)'=\frac{1}{x\ln a}(x>0,a>0$,且$a\neq1)$.

(3)$(e^x)'=e^x$,$(a^x)'=a^x\ln a(a>0$,且$a\neq1)$.

9.导数的几何意义

(1)$f'(x_0)$的几何意义:曲线$y=f(x)$在点$(x_0,f(x_0))$处的切线的斜率,该切线的方程为$y-f(x_0)=f'(x_0)\cdot(x-x_0)$.

(2)切点的两大特征:①在曲线$y=f(x)$上;②在切线上.

10.由函数的单调性求参数的取值范围的方法

(1)若可导函数$f(x)$在区间M上单调递增,则$f'(x)\geqslant0(x\in M)$恒成立;若可导函数$f(x)$在区间M上单调递减,则$f'(x)\leqslant0(x\in M)$恒成立;

(2)若可导函数在某区间上存在单调递增(减)区间,$f'(x)>0$(或$f'(x)<0$)在该区间上存在解集;

(3)若已知$f(x)$在区间I上的单调性,区间I中含有参数时,可先求出$f(x)$的单调区间,则I是其单调区间的子集.

11.函数极值的相关结论

(1)可导函数在极值点处的导数为0,但导数为0的点不一定是极值点,如函数$f(x)=x^3$,$x=0$就不是极值点,但$f'(0)=0$.

(2)极值点不是一个点,而是一个数x_0,当$x=x_0$时,函数取得极值.可导函数$f(x)$在x_0处有$f'(x_0)=0$是函数$f(x)$在x_0处取得极值的必要不充分条件.

(3)函数$f(x)$在一闭区间上的最大值是此函数在此区间上的极大值与其端点函数值中的最大值,函数$f(x)$在一闭区间上的最小值是此函数在此区间上的极小值与其端点函数值中的最小值.

二、易错易混清零

1.求函数的定义域,关键是依据含自变量x的代数式有意义来列出相应的不等式(组)求解,如开偶次方根,被开方数一定是非负数;分式中分母不为0;对数式中的真数是正数;列不等式时,应列出所有的不等式,不应遗漏.

【例1】(1)若函数$y=f(x)$的定义域为$[0,2]$,则函数$g(x)=\frac{f(2x)}{x-1}$的定义域是 ( )

A.$[0,1)$ B.$[0,1]$

C.$[0,1)\cup(1,4]$ D.$(0,1)$

(2)函数$y=\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)+\sqrt{1-x^2}$的定义域为________.

2.求解与函数、不等式有关的问题(如求值域、单调区间、判断奇偶性、解不等式等),要注意定义域优先的原则.

【例2】 函数$f(x)=\ln(x^2-2x-8)$的单调递增区间是________.

3.定义域关于原点对称是函数具有奇偶性的必要条件,为此确定函数的奇偶性时,务必先判定函数定义域是否关于原点对称.函数$y=f(x)$为奇函数,但不一定有$f(0)=0$成立.

【例3】 函数$f(x)=\frac{\ln(1-x^2)}{|x-2|-2}$的奇偶性是________.

4.理清函数奇偶性的性质:(1)$f(x)$是偶函数$\Leftrightarrow f(-x)=f(x)=f(|x|)$;(2)$f(x)$是奇函数$\Leftrightarrow f(-x)=-f(x)$;(3)定义域含0的奇函数满足$f(0)=0$.

【例4】 已知函数$h(x)(x\neq0)$为偶函数,且当$x>0$时,$h(x)=\begin{cases}-\frac{x^2}{4},0<x\leqslant4,\\4-2x,x>4.\end{cases}$若$h(t)>h(2)$,则实数$t$的取值范围为________.

5.分段函数的图象,一定要准确地看清楚分界点的函数值.

【例5】 已知函数$f(x)=\begin{cases}e^x-k,x\leqslant0,\\(1-k)x+k,x>0\end{cases}$是$\mathbf{R}$上的增函数,则实数$k$的取值范围是________.

6.易混淆函数的零点和函数图象与x轴的交点,不能把函数零点、方程的解、不等式解集的端点值进行准确互化.

【例6】 已知函数$f(x)=x^2-2|x|-m$的零点有两个,则实数m的取值范围为 ( )

A.$(-1,0)$ B.$\{-1\}\cup(0,+\infty)$

C.$[-1,0)\cup(0,+\infty)$ D.$(0,1)$

7.混淆$y=f(x)$的图象在某点(x_0,y_0)处的切线与$y=f(x)$过某点(x_0,y_0)的切线,导致求解失误.

【例7】 曲线$f(x)=x^2-3x+2\ln x$在$x=1$处的切线方程是________.

8.对于可导函数 $y=f(x)$，错以为 $f'(x_0)=0$ 是函数 $y=f(x)$ 在 $x=x_0$ 处有极值的充分条件.

【例 8】 已知函数 $f(x)=x^3+ax^2+bx+a^2$ 在 $x=1$ 处有极值 10，则 $f(2)=$________.

三、基础检验查漏

1.函数 $f(x)=\dfrac{\sqrt{-x^2+5x+6}}{x+1}$ 的定义域 ( )

A.$(-\infty,-1]\cup[6,+\infty)$

B.$(-\infty,-1)\cup[6,+\infty)$

C.$(-1,6]$

D.$[2,3]$

2.若函数 $f(x)=\begin{cases}\log_2 x, x>0,\\ 4\sin x, x\leqslant 0,\end{cases}$ 则 $f\left(f\left(-\dfrac{5\pi}{4}\right)\right)=$ ( )

A.$-\dfrac{1}{2}$　　B.$\dfrac{1}{2}$　　C.1　　D.$\dfrac{3}{2}$

3.下列函数中，在定义域内单调递增且是奇函数的是 ( )

A.$y=\log_2(\sqrt{x^2+1}-x)$　　B.$y=\sin x$

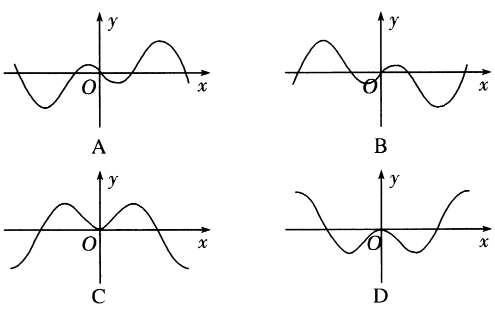
C.$y=2^x-2^{-x}$　　D.$y=|x-1|$

4.已知定义在 $\mathbf{R}$ 上的偶函数 $f(x)$ 满足在 $(0,+\infty)$ 上单调递增，$f(3)=0$，则关于 x 的不等式 $\dfrac{f(x+2)+f(-x-2)}{x}>0$ 的解集为 ( )

A.$(-5,-2)\cup(0,+\infty)$　　B.$(-\infty,-5)\cup(0,1)$

C.$(-3,0)\cup(3,+\infty)$　　D.$(-5,0)\cup(1,+\infty)$

5.函数 $f(x)=\cos x\cdot\ln(\sqrt{x^2+1}+x)$ 的图象大致是 ( )



6.(多选)已知函数 $f(x)=2^{-x}-2^x$ 有下述四个结论，其中正确的结论是 ( )

A.$f(0)=0$

B.函数 $f(x)$ 是奇函数

C.函数 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上单调递增

D.对任意的实数 a，方程 $f(x)-a=0$ 都有解

7.已知 $a=\log_3 5$，$b=\left(\dfrac{1}{2}\right)^{\frac{1}{3}}$，$c=\log_{\frac{1}{3}}\dfrac{1}{6}$，则 a,b,c 的大小关系为 ( )

A.$a>b>c$　　B.$b>a>c$

C.$c>b>a$　　D.$c>a>b$

8.函数 $f(x)=e^x+x^3-9$ 的零点所在的区间为 ( )

A.$(0,1)$　　B.$(1,2)$　　C.$(2,3)$　　D.$(3,4)$

9.已知函数 $f(x)=ae^x-4x$，$a\in\mathbf{R}$.

(1)求函数 $f(x)$ 的单调区间；

(2)当 $a=1$ 时，求证：$f(x)+x^2+1>0$.

10.已知函数 $f(x)=\ln x-\dfrac{1}{2}ax^2-2x$.

(1)若函数 $f(x)$ 在定义域内单调递增，求实数 a 的取值范围；

(2)当 $a=-\dfrac{1}{2}$ 时，关于 x 的方程 $f(x)=-\dfrac{1}{2}x+b$ 在 $[1,4]$ 上恰有两个不相等的实数根，求实数 b 的取值范围.

第二步　快准解题

1.选填题解题技法

高考选择题、填空题注重多个知识点的小型综合，渗透各种数学思想和方法，体现利用基础知识深度考基础、考能力的导向，使作为中低档题的选择题、填空题成为具备较佳区分度的基本题型.因此能否在选择题、填空题上获取高分，对高考数学成绩影响重大.解答选择题、填空题的基本策略是准确、迅速.

(1)解题策略：小题巧解，不需“小题大做”，在准确、迅速、合理、简洁的原则下，充分利用题设和选项这两方面提供的信息作出判断.先定性后定量，先特殊后一般，先间接后直接，多种思路选最简.对于选择题可先排除后求解，既熟悉通法又结合选项中的暗示及知识能力，运用特例法、筛选法、图解法等技巧求解.

(2)解决方法：主要分直接法和间接法两大类，具体方法为直接法，特值、特例法，筛选法，数形结合法，等价转化法，构造法，代入法等.

技法 1　特值、特例法

从题干(或选项)出发，通过选取特殊情况代入，将问题特殊化或构造满足题设条件的特殊函数或图形位置进行判断.特殊化法是“小题小做”的重要策略，要注意在怎样的情况下才可使用.特殊情况可能是：特殊值、特殊点、特殊位置、特殊函数等.

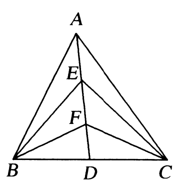
【例 1】 (1)若 $a>b>c>1$，且 $ac<b^2$，则　(　　)

A.$\log_a b>\log_b c>\log_c a$

B.$\log_c b>\log_b a>\log_a c$

C.$\log_c b>\log_a b>\log_c a$

D.$\log_b a>\log_c b>\log_a c$



(2)如图，在△ABC 中，D 是 BC 的中点，E，F 是 AD 上的两个三等分点，$\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{CA}=4$，$\overrightarrow{BF}\cdot\overrightarrow{CF}=-1$，则$\overrightarrow{BE}\cdot\overrightarrow{CE}=$________.

技法 2　数形结合法

根据命题条件中的函数关系或几何意义，作出函数的图象或几何图形，将数的问题(如解方程、解不等式、判断单调性、求取值范围等)与某些图形结合起来，利用图象的直观性，化抽象为直观，化直观为精确，从而使问题得到解决，这种方法称为数形结合法.

【例 2】 (1)已知点 A 为曲线 $y=x+\dfrac{4}{x}(x>0)$上的动点，B 为圆$(x-2)^2+y^2=1$ 上的动点，则$|AB|$的最小值是　(　　)

A.3　　B.4　　C.$3\sqrt{2}$　　D.$4\sqrt{2}$

(2)已知函数 $f(x)=\begin{cases}2|\log_2 x|,0<x\leqslant 2,\\(x-3)(x-4),x>2,\end{cases}$若 $f(x)=m$ 有 4 个零点 a,b,c,d，则 $abcd$ 的取值范围是________.

技法 3　构造法

构造法是一种创造性思维，是综合运用各种知识和方法，依据问题给出的条件和结论给出的信息，把问题作适当的加工处理，构造与问题相关的数学模式，揭示问题的本质，从而沟通解题思路的方法.

【例 3】 (1)若 $2^x-2^y<3^{-x}-3^{-y}$，则　(　　)

A.$\ln(y-x+1)>0$　　B.$\ln(y-x+1)<0$

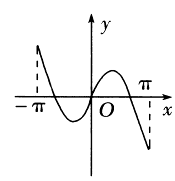
C.$\ln|x-y|>0$　　D.$\ln|x-y|<0$

(2)设定义域为 $\mathbf{R}$ 的函数 $f(x)$满足 $f'(x)>f(x)$，则不等式 $e^{x-1}f(x)<f(2x-1)$的解集为________.

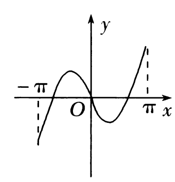
技法 4　排除法

排除法也叫筛选法、淘汰法.它是充分利用选择题有且只有一个正确的选项这一特征，通过分析、推理、计算、判断，排除不符合要求的选项，从而得出正确结论的一种方法.

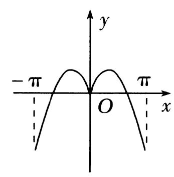
【例 4】 (1)函数 $y=x\cos x+\sin x$ 在区间$[-\pi,\pi]$上的图象可能是　(　　)



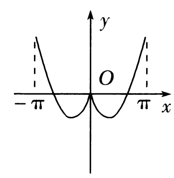
A



B



C



D

(2)下列函数中，以$\dfrac{\pi}{2}$为周期且在区间$\left(\dfrac{\pi}{4},\dfrac{\pi}{2}\right)$上单调递增的是　(　　)

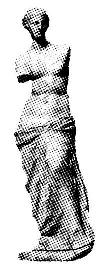
A.$f(x)=|\cos 2x|$　　B.$f(x)=|\sin 2x|$

C.$f(x)=\cos|x|$　　D.$f(x)=\sin|x|$

技法 5　估算法

若有些问题不易(有时也没有必要)进行精确的运算和判断，则可以进行估算.估算是一种数学意识，它通过合理的观察比较、猜想推理或验证，做出正确的选择.当选项差距较大且没有合适的解题思路时，我们可以通过适当的放大或者缩小部分数据估算出答案的大概范围或者近似值，然后选取与估算值最接近的选项.

【例5】 (1)古希腊时期,人们认为最美人体的头顶至肚脐的长度与肚脐至足底的长度之比是$\frac{\sqrt{5}-1}{2}$$\left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\approx 0.618\right.$,称为黄金分割比例$\left.\right)$,著名的"断臂维纳斯"便是如此.此外,最美人体的头顶至咽喉的长度与咽喉至肚脐的长度之比也是$\frac{\sqrt{5}-1}{2}$.若某人满足上述两个黄金分割比例,且腿长为105 cm,头顶至脖子下端的长度为26 cm,则其身高可能是 ( )



A.165 cm B.175 cm C.185 cm D.190 cm

(2)已知球O的直径$FC=4$,A,B是该球球面上的两点,$AB=\sqrt{3}$,$\angle AFC=\angle BFC=30^\circ$,则三棱锥$F-ABC$的体积为 ( )

A.$3\sqrt{3}$ B.$2\sqrt{3}$ C.$\sqrt{3}$ D.1

技法6 验证法

验证法是把选项代入题干中进行检验,或反过来从题干中找出合适的验证条件,代入各选项进行验证,从而得到正确选项.

(1)使用前提:存在唯一正确的选项,且选项易于代入检验.

(2)使用技巧:可以结合特殊(值)法、排除法等先否定一些明显错误的选项,再选择直觉认为最有可能的选项进行验证,这样可以快速得到答案.

(3)常见问题:题干信息不全,选项是数值或范围,正面求解或计算烦琐的问题等.

【例6】 (1)设集合$A=\{(x,y)|x-y\geqslant 1,ax+y>4,x-ay\leqslant 2\}$,则 ( )

A.对任意实数a,$(2,1)\in A$

B.对任意实数a,$(2,1)\notin A$

C.当且仅当$a<0$时,$(2,1)\notin A$

D.当且仅当$a\leqslant\frac{3}{2}$时,$(2,1)\notin A$

(2)已知函数$f(x)=2\cos^2 x-\sin^2 x+2$,则 ( )

A.$f(x)$的最小正周期为π,最大值为3

B.$f(x)$的最小正周期为π,最大值为4

C.$f(x)$的最小正周期为2π,最大值为3

D.$f(x)$的最小正周期为2π,最大值为4

技法7 等价转化法

在应用等价转化法解决问题时,没有一个统一的模式去进行.可以在数与数、形与形之间进行转换;可以在宏观上进行等价转换;也可以在函数、方程、不等式之间进行等价转化,但都需要保持命题的真假不变.等价转化法的转化原则是将陌生的问题转化为熟悉的问题,将复杂的问题转化为简单的问题,将抽象的问题转化为直观的问题,比如从超越式到代数式、从无理式到有理式,从分式到整式.

【例7】 (1)函数$f(x)=\begin{cases}\log_2 x,x>0,\\ -2^x+a,x\leqslant 0\end{cases}$有且只有一个零点的充分不必要条件是 ( )

A.$a<0$ B.$0<a<\frac{1}{2}$

C.$\frac{1}{2}<a<1$ D.$a\leqslant 0$或$a>1$

(2)已知$f(x)$与函数$y=-a\sin x$关于点$\left(\frac{1}{2},0\right)$对称,$g(x)$与函数$y=e^x$关于直线$y=x$对称,若对任意$x_1\in(0,1]$,存在$x_2\in\left[\frac{\pi}{2},2\right]$,使$g(x_1)-x_1\leqslant f(x_2)$成立,则实数$a$的取值范围是 ( )

A.$\left(-\infty,\frac{1}{\sin 1}\right]$ B.$\left[\frac{1}{\sin 1},+\infty\right)$

C.$\left(-\infty,\frac{1}{\cos 1}\right]$ D.$\left[\frac{1}{\cos 1},+\infty\right)$

技法8 推理分析法

推理分析法是通过逻辑推理过程,分析4个选项之间的逻辑关系,从而否定干扰项,肯定正确选项的方法.推理分析法一般用来解决概念性问题,根据两个概念外延的重合、包含、交叉、互斥等关系进行推理分析.

【例8】 中国古代教育要求学生掌握"六艺",即"礼、乐、射、御、书、数".某校为弘扬中国传统文化,举行有关"六艺"的知识竞赛.甲、乙、丙3位同学进行了决赛.决赛规则:决赛共分6场,每场比赛的第一名、第二名、第三名的得分分别为$a,b,c(a>b>c,a,b,c\in\mathbf{N}^*)$,选手最后得分为各场得分之和,决赛结果是甲最后得分为26分,乙和丙最后得分都为11分,且乙在其中一场比赛中获得第一名.现有下列说法:

①每场比赛第一名得分$a=4$分;

②甲可能有一场比赛获得第二名;

③乙有四场比赛获得第三名;

④丙可能有一场比赛获得第一名.

以上说法中正确的序号是________.

技法9 直接法

直接法,就是直接从题设的条件出发,运用有关的概念、性质、公理、定理、法则和公式等,通过严密的推理和准确的计算,然后对照题目所给出的选项"对号入座"作出相应的选择.多用于涉及概念、性质的辨析或运算较简单的定性题目.

【例9】 (1)已知复数$\frac{2-ai}{i}=1-bi$,其中$a,b\in\mathbf{R}$,i是虚数单位,则$|a+bi|=$ ( )

A.$-1+2i$ B.1 C.5 D.$\sqrt{5}$

(2)已知向量$\boldsymbol{a}=(1+\cos x,2)$,$\boldsymbol{b}=(\sin x,1)$,$x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$,若$\boldsymbol{a}/\!/\boldsymbol{b}$,则$\sin x=$ ( )

A.$\frac{4}{5}$ B.$\frac{3}{5}$ C.$\frac{2}{5}$ D.$\frac{2\sqrt{5}}{5}$

2.二级结论速解

结论 1　平面向量的三点共线定理

平面内一组基底$\overrightarrow{OA}$，$\overrightarrow{OB}$及任意向量$\overrightarrow{OP}$，若$\overrightarrow{OP}=\lambda_1\overrightarrow{OA}+\lambda_2\overrightarrow{OB}$，则$A$，$B$，$P$三点共线的充要条件是$\lambda_1+\lambda_2=1$.

【例 1】（2020·保定模拟）已知等差数列$\{a_n\}$的前n项和为S_n，点A，B，C，O满足：①$\overrightarrow{AB}=\lambda\overrightarrow{BC}(\lambda\neq 0)$；②$A$，$B$，$O$确定一个平面；③$\overrightarrow{OB}=a_3\overrightarrow{OA}+a_{98}\overrightarrow{OC}$.则$S_{100}=$（　　）

A.29　　B.40　　C.45　　D.50

点评　平面向量中涉及三点共线的问题，可直接利用二级结论：若$\overrightarrow{OP}=\lambda_1\overrightarrow{OA}+\lambda_2\overrightarrow{OB}$（$\overrightarrow{OA}$，$\overrightarrow{OB}$是一组基底），则$A$，$B$，$P$三点共线的充要条件是$\lambda_1+\lambda_2=1$.这种方法简化了向量的线性分解和应用待定系数法寻找系数关系的过程.

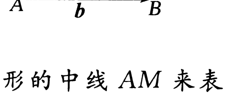
结论 2　平面向量中的极化恒等式

平面向量中的极化恒等式：$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=\frac{1}{4}[(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})^2-(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})^2]$或$4\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})^2-(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})^2$.

【例 2】已知$\triangle ABC$是腰长为4的等腰直角三角形，$AB=AC$，P为平面ABC内一点，则$\overrightarrow{PA}\cdot(\overrightarrow{PB}+\overrightarrow{PC})$的最小值为（　　）

A.-4　　B.$-\frac{4}{3}$　　C.0　　D.-2

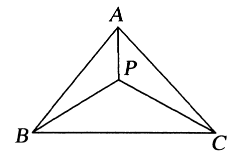
点评　平面向量中的极化恒等式的几何意义是：向量的数量积可以表示为以向量$\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$为邻边的平行四边形的两条对角线的长的平方差的$\frac{1}{4}$，即$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=\frac{1}{4}(\overrightarrow{AD}^2-\overrightarrow{BC}^2)$（如图所示）.



在三角形ABC中，也可以用三角形的中线AM来表示，如$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=\overrightarrow{AM}^2-\overrightarrow{BM}^2=\overrightarrow{AM}^2-\frac{1}{4}\overrightarrow{BC}^2$（如图所示），它揭示了三角形的中线长与边长的关系.

平面向量中的极化恒等式的精妙之处在于能够建立向量与几何长度（数量）之间的桥梁，实现向量与几何、代数的巧妙结合.因此具有三角几何背景的数学问题利用极化恒等式解决往往更为简单.

结论 3　奔驰定理



奔驰定理：如图所示，已知P是三角形ABC内任意一点，则$S_{\triangle PBC}\overrightarrow{PA}+S_{\triangle PCA}\overrightarrow{PB}+S_{\triangle PAB}\overrightarrow{PC}=\boldsymbol{0}$.

推论：已知P是三角形ABC内任意一点，且$x\overrightarrow{PA}+y\overrightarrow{PB}+z\overrightarrow{PC}=\boldsymbol{0}$，则$S_{\triangle PBC}:S_{\triangle PCA}:S_{\triangle PAB}=x:y:z$.

【例 3】点P是$\triangle ABC$内一点，且$\overrightarrow{AP}=\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{4}\overrightarrow{AC}$，则$\triangle ABP$的面积与$\triangle ABC$的面积之比是（　　）

A.1∶3　　B.2∶3

C.1∶4　　D.1∶2

点评　解决本题的关键是根据奔驰定理的推论，得到$S_{\triangle PBC}:S_{\triangle PCA}:S_{\triangle PAB}=5:4:3$，进而得到$\triangle ABP$的面积与$\triangle ABC$的面积之比.

结论 4　三角形“四心”的向量形式

三角形“四心”的向量形式的充要条件

设O为$\triangle ABC$所在平面上一点，角A，B，C所对的边分别为a，b，c，则

(1)O为$\triangle ABC$的外心$\Leftrightarrow|\overrightarrow{OA}|=|\overrightarrow{OB}|=|\overrightarrow{OC}|=\frac{a}{2\sin\angle BAC}$；

(2)O为$\triangle ABC$的重心$\Leftrightarrow\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}=\boldsymbol{0}$；

(3)O为$\triangle ABC$的垂心$\Leftrightarrow\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{OB}\cdot\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{OC}\cdot\overrightarrow{OA}$；

(4)O为$\triangle ABC$的内心$\Leftrightarrow a\overrightarrow{OA}+b\overrightarrow{OB}+c\overrightarrow{OC}=\boldsymbol{0}$.

【例 4】已知O为$\triangle ABC$所在平面上一点，设$\overrightarrow{AO}=m\overrightarrow{AB}+n\overrightarrow{AC}$.若$\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}=\boldsymbol{0}$，则$m$的值为________.

点评　用本题的法二的关键是根据平面向量的表达式直接得到点O是三角形ABC的重心，再结合重心的性质即可解决问题.

结论 5　三角形中的射影定理

在$\triangle ABC$中，角A，B，C所对的边分别是a，b，c，则$a=b\cos C+c\cos B$，$b=c\cos A+a\cos C$，$c=a\cos B+b\cos A$.

【例 5】 在$\triangle ABC$中，角A，B，C的对边分别为a，b，c. 若$\triangle ABC$为锐角三角形，且满足$\sin B(1+2\cos C)=2\sin A\cos C+\cos A\sin C$，则下列等式成立的是 (　　)

A.$a=2b$　　B.$b=2a$

C.$A=2B$　　D.$B=2A$

点评　在涉及解三角形问题时，若条件式中或推论过程中出现$b\cos C$或$c\cos B$等形式时，可考虑使用三角形中的射影定理.

结论 6　三角形内角平分线定理

三角形内角平分线定理：若AD是$\triangle ABC$中$\angle BAC$的平分线，AD交BC于D，则$\dfrac{AB}{AC}=\dfrac{BD}{DC}$.

【例 6】 在$\triangle ABC$中，角A，B，C所对的边分别为a，b，c. 若$b=c\cos A$，角A的平分线交BC于点D，$AD=1$，$\cos A=\dfrac{1}{8}$，则以下结论中错误的是 (　　)

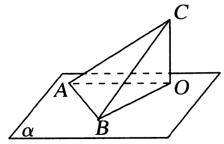
A.$AC=\dfrac{3}{4}$　　B.$AB=8$

C.$\dfrac{CD}{BD}=\dfrac{1}{8}$　　D.$\triangle ABD$的面积为$\dfrac{3\sqrt{7}}{4}$

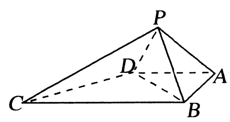
点评　三角形内角平分线定理实现了同一条线段上两条线段长度之比与不在同一直线上的两条线段长度之比的转化，可以作为建立方程的渠道使用.本题即通过$\dfrac{AC}{AB}=\dfrac{CD}{BD}=\dfrac{1}{8}$及勾股定理得到三角形三边长之间的关系，进而通过解方程解决问题.

结论 7　面积射影定理

如图，$\triangle ABC$在平面α内的射影为$\triangle ABO$，分别记$\triangle ABC$的面积和$\triangle ABO$的面积为S和S'，记$\triangle ABC$所在平面和平面α所成的锐二面角的平面角为θ，则$\cos\theta=\dfrac{S'}{S}$.



【例 7】 如图，四棱锥$P-ABCD$中，$\angle ABC=\angle BAD=90^\circ$，$BC=2AD$，$\triangle PAB$与$\triangle PAD$都是等边三角形.



(1)证明：$PB\perp CD$.

(2)求二面角$A-PD-B$的余弦值.

点评　应用面积射影定理求二面角的关键是能找到一个平面内某个图形(常见的有三角形，四边形，圆等可计算面积的平面几何图形)在另外一个平面内的射影并计算出两者的面积.

结论 8　有关几何体的外接球、内切球的常用结论

(1)球(半径为R)与正方体(棱长为a)有以下三种特殊情况：

①球内切于正方体，此时$2R=a$；

②球与正方体的棱相切，此时$2R=\sqrt{2}a$；

③球外接于正方体，此时$2R=\sqrt{3}a$.

(2)长、宽、高分别为a，b，c的长方体的体对角线长等于其外接球(半径为R)的直径，即$\sqrt{a^2+b^2+c^2}=2R$.

(3)棱长为a的正四面体，斜高为$\dfrac{\sqrt{3}}{2}a$，高为$\dfrac{\sqrt{6}}{3}a$，其外接球的半径为$\dfrac{\sqrt{6}}{4}a$，内切球的半径为$\dfrac{\sqrt{6}}{12}a$.

【例 8】 已知三棱柱$ABC-A_1B_1C_1$中，$AB=3$，$AC=4$，$AB\perp AC$，$AA_1=12$，如果三棱柱$ABC-A_1B_1C_1$的6个顶点都在球O的表面上，则球O的半径为 (　　)

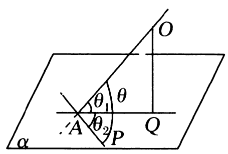
A.$\dfrac{3\sqrt{17}}{2}$　　B.$2\sqrt{10}$

C.$\dfrac{13}{2}$　　D.$3\sqrt{10}$

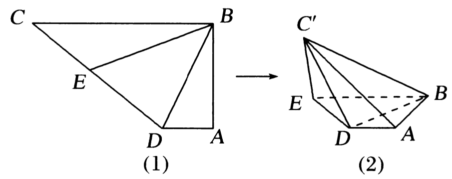
点评　本题中的三棱柱是底面为直角三角形的直三棱柱，求解此类图形的外接球的半径、外接球的表面积、外接球的体积时，都可以通过补形法，将问题转化为长(正)方体外接球的问题求解.

结论 9　三余弦定理

如图所示，直线 AO 是平面 α 的斜线，AQ 是 AO 在平面 α 内的射影，直线 AP 在平面 α 内，设 $\angle OAP=\theta$，$\angle OAQ=\theta_1$，$\angle QAP=\theta_2$，则 $\cos\theta=\cos\theta_1\cdot\cos\theta_2$.



【例 9】 如图(1)，在直角梯形 $ABCD$ 中，$\angle ABC=\angle CDB=\angle DAB=90^\circ$，$\angle BCD=30^\circ$，$BC=4$，点 E 在线段 CD 上运动(不含端点).如图(2)，沿 BE 将 $\triangle BEC$ 折至 $\triangle BEC'$ 的位置，使得平面 $BEC'\perp$ 平面 $ABED$，则 AC' 的最小值为________.



点评　本题是一道立体几何中求线段 AC' 的最小值问题，这里线段 AC' 的大小与动点 E 在线段 CD 上的运动有关，因此以 $\angle C'BE=\alpha$ 为自变量，建立 AC' 关于 α 的函数是求解的基本思路.在求解 AC' 的过程中，有两种方法选择：一是在 $\mathrm{Rt}\triangle AHC'$ 中利用勾股定理建立函数；二是在 $\triangle ABC'$ 中利用余弦定理建立函数.

结论 10　与圆的切线有关的结论

(1)过圆 $(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$ 上一点 (x_0,y_0) 的切线方程为 $(x_0-a)(x-a)+(y_0-b)(y-b)=r^2$.特别地，过圆 $x^2+y^2=r^2$ 上一点 (x_0,y_0) 的切线方程为 $x_0x+y_0y=r^2$.

(2)过圆 $C:(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$ 外一点 (x_0,y_0) 作圆 C 的两条切线，切点分别为 A,B，则直线 AB 的方程(切点弦所在直线的方程)为 $(x_0-a)(x-a)+(y_0-b)(y-b)=r^2$.特别地，过圆 $x^2+y^2=r^2$ 外一点 (x_0,y_0) 作圆的两条切线，切点分别为 A,B，则直线 AB 的方程为 $x_0x+y_0y=r^2$.

【例 10】 过点 $D(1,-2)$ 作圆 $C:(x-1)^2+y^2=1$ 的两条切线，切点分别为 A,B，则弦 AB 所在直线的方程为　　(　　)

A.$2y-1=0$　　B.$2y+1=0$

C.$x+2y-1=0$　　D.$x-2y+1=0$

点评　本题给出了过圆 $C:(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$ 外一点 (x_0,y_0) 的圆 C 的两条切线，求解切点弦所在直线的方程的方法，法二直接利用结论(2)得切点弦所在的直线方程为 $(x_0-a)(x-a)+(y_0-b)(y-b)=r^2$.此方程与圆的切线方程形式一样，但二者的几何意义不一样.切点弦方程中的点 (x_0,y_0) 是圆外一点，圆的切线方程中的点 (x_0,y_0) 是圆上一点，注意区分它们的不同.

结论 11　三角形的面积坐标公式

在平面直角坐标系中，已知 $\triangle ABC$，若 $\overrightarrow{AB}=(x_1,y_1)$，$\overrightarrow{AC}=(x_2,y_2)$，则有 $S_{\triangle ABC}=\dfrac{1}{2}|x_1y_2-x_2y_1|$，此公式称为三角形的面积坐标公式.

【例 11】 已知 F 是抛物线 $y^2=x$ 的焦点，点 A,B 在该抛物线上且位于 x 轴的两侧，$\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=2$(其中 O 为坐标原点)，则 $\triangle ABO$ 与 $\triangle AFO$ 面积之和的最小值是　　(　　)

A.2　　B.3　　C.$\dfrac{17\sqrt{2}}{8}$　　D.$\sqrt{10}$

点评　此题中所涉及的两个三角形均与原点有关，因此在表示这两个三角形的面积时可考虑利用三角形的坐标面积公式，从而解决问题.

结论 12　圆锥曲线的焦点三角形的相关结论

(1)椭圆的焦点三角形：若点 P 是椭圆 $C:\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 上不同于长轴两端点的任意一点，F_1,F_2 为椭圆 C 的两焦点，则 $\triangle PF_1F_2$ 叫作椭圆的焦点三角形.记 $\angle F_1PF_2=\theta$，则 $S_{\triangle PF_1F_2}=b^2\tan\dfrac{\theta}{2}$.

(2)双曲线的焦点三角形：若点 P 是双曲线 $C:\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$ 上不同于实轴两端点的任意一点，F_1,F_2 为双曲线 C 的两焦点，则 $\triangle PF_1F_2$ 叫作双曲线的焦点三角形.记 $\angle F_1PF_2=\theta$，则 $S_{\triangle PF_1F_2}=\dfrac{b^2}{\tan\dfrac{\theta}{2}}$.

【例 12】 椭圆 $\dfrac{x^2}{25}+\dfrac{y^2}{16}=1$ 的焦点为 F_1,F_2，P 为椭圆上一点，若 $\angle F_1PF_2=60^\circ$，则 $\triangle F_1PF_2$ 的面积是(　　)

A.$\dfrac{16\sqrt{3}}{3}$　　B.$\dfrac{32\sqrt{3}}{3}$

C.$16\sqrt{3}$　　D.$32\sqrt{3}$

点评　涉及椭圆$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$焦点三角形$PF_1F_2$($F_1,F_2$分别为椭圆的左、右焦点)面积的问题都可以直接根据其面积公式$S_{\triangle PF_1F_2}=b^2\tan\frac{\angle F_1PF_2}{2}$求解.利用此面积公式解题时要注意两点:一是不能错用为$S_{\triangle PF_1F_2}=b^2\tan\angle F_1PF_2$;二是公式中是$b^2$与$\tan\frac{\angle F_1PF_2}{2}$相乘,不能与双曲线的焦点三角形面积公式混淆.

结论 13　双曲线的渐近线的相关结论

(1)若双曲线的渐近线方程为$y=\pm\frac{b}{a}x(a>0,b>0)$,即$\frac{x}{a}\pm\frac{y}{b}=0$,则双曲线的方程可设为$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=\lambda(\lambda\neq0)$.

(2)双曲线的焦点到其渐近线的距离等于虚半轴长.

(3)双曲线$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$的渐近线$y=\pm\frac{b}{a}x$的斜率$k$与离心率$e$的关系:$e=\sqrt{1+\left(\frac{b}{a}\right)^2}=\sqrt{1+k^2}$.

【例 13】　双曲线$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$的渐近线方程为$y=\pm2x$,则该双曲线的离心率为(　　)

A.5　　B.$\frac{3\sqrt{5}}{5}$　　C.$\frac{\sqrt{5}}{2}$　　D.$\sqrt{5}$

点评　涉及双曲线$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$的渐近线的斜率$k$与离心率的问题,都可以直接根据二级结论$e=\sqrt{1+\left(\frac{b}{a}\right)^2}=\sqrt{1+k^2}$,或者$k=\pm\frac{b}{a}=\pm\sqrt{e^2-1}$求解.

结论 14　抛物线的焦点弦的相关结论

设AB是过抛物线$y^2=2px(p>0)$的焦点F的弦,$A(x_1,y_1)$,$B(x_2,y_2)$,$y_1>y_2$,α为直线AB的倾斜角,则

(1)焦半径$|AF|=x_1+\frac{p}{2}=\frac{p}{1-\cos\alpha}$,$|BF|=x_2+\frac{p}{2}=\frac{p}{1+\cos\alpha}$,即$\frac{1}{|AF|}+\frac{1}{|BF|}=\frac{2}{p}$.

(2)焦点弦长$|AB|=x_1+x_2+p=\frac{2p}{\sin^2\alpha}$.

(3)$S_{\triangle OAB}=\frac{p^2}{2\sin\alpha}$($O$为坐标原点).

【例 14】　已知抛物线$C:y^2=16x$,倾斜角为$\frac{\pi}{6}$的直线l过焦点F交抛物线于A,B两点,O为坐标原点,则$\triangle ABO$的面积为________.

点评　涉及过抛物线$y^2=2px(p>0)$的焦点的直线与抛物线的两个交点A,B及坐标原点O构成的$\triangle OAB$的面积问题时,若已知直线的斜率或倾斜角,则可以直接根据二级结论$S_{\triangle OAB}=\frac{p^2}{2\sin\alpha}$求解.

结论 15　抛物线的阿基米德三角形的性质

抛物线的阿基米德三角形:过抛物线焦点F作直线,与抛物线交于A,B两点,分别过A,B作抛物线的切线l_1,l_2,l_1与l_2相交于点P,那么$\triangle PAB$称作抛物线的阿基米德三角形.

$\triangle PAB$满足以下特征:

①点P必在抛物线的准线上;

②$\triangle PAB$为直角三角形,且角P为直角;

③$PF\perp AB$.

【例 15】　过点$H(1,-1)$作抛物线$x^2=4y$的两条切线HA,HB,切点分别为A,B,则直线AB的方程为________.

点评　本题法一是相关点法,即若点$A(x_1,y_1)$的坐标满足方程$Ax_1+By_1+C=0$,点$B(x_2,y_2)$的坐标满足方程$Ax_2+By_2+C=0$,则直线AB的方程即$Ax+By+C=0$.法二是直接利用抛物线的阿基米德三角形的性质,由$k_{AB}\cdot k_{HF}=-1$及$k_{HF}=-2$求出k_{AB},即可得到直线AB的方程.

结论 16　抛物线的两垂直弦的性质

抛物线的两垂直弦的性质:抛物线$y^2=2px(p>0)$中,若过坐标原点O作互相垂直的两弦OA,OB,则直线AB恒过定点$(2p,0)$.

【例 16】　抛物线$y^2=2px(p>0)$的焦点为F,点P满足$\overrightarrow{OP}=\lambda\overrightarrow{OF}$($O$为坐标原点),若过点$O$作互相垂直的两弦$OA,OB$,则当弦$AB$恒过点$P$时,$\lambda$的所有可能取值的集合为(　　)

A.$\{4\}$　　B.$\{3\}$

C.$\left\{\frac{1}{4},4,3\right\}$　　D.$\left\{\frac{1}{3},3,4\right\}$

点评 在本题题设的情境下，还有如下结论：

过抛物线 $C:y^2=2px(p>0)$ 的顶点 O 作互相垂直的两弦 OA 和 OB，则

(1)线段 AB 的中点 P 的轨迹方程为 $y^2=p(x-2p)$.

(2)抛物线的顶点 O 在 AB 上的射影 M 的轨迹方程为 $(x-p)^2+y^2=p^2(x\neq 0)$.

结论 17 弦所在直线的斜率与弦中点的关系

(1)椭圆 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 上有不关于原点对称的两点 $A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$，$x_1\neq x_2$，弦 AB 的中点为 $M(x_0,y_0)$，则直线 AB 的斜率 $k=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}=-\frac{b^2}{a^2}\cdot\frac{x_0}{y_0}$(即 $k\cdot k_{OM}=-\frac{b^2}{a^2}$).

(2)双曲线 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$ 上有不关于原点对称的两点 $A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$，$x_1\neq x_2$，弦 AB 的中点为 $M(x_0,y_0)$，则直线 AB 的斜率 $k=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}=\frac{b^2}{a^2}\cdot\frac{x_0}{y_0}$(即 $k\cdot k_{OM}=\frac{b^2}{a^2}$).

(3)抛物线 $y^2=2px(p>0)$ 上有两点 $A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$，$x_1\neq x_2$，弦 AB 的中点为 $M(x_0,y_0)$，则直线 AB 的斜率 $k=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}=\frac{p}{y_0}$.

【例 17】 已知椭圆 $C:\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 的一个顶点为 $B(0,4)$，离心率 $e=\frac{\sqrt{5}}{5}$，直线 l 交椭圆于 M,N 两点.如果△BMN 的重心恰好为椭圆的左焦点 F，则直线 l 的方程为________.

点评 应用这类结论解题需注意圆锥曲线标准方程的形式与结论的对应性，如结论(1)中的椭圆方程若为 $\frac{x^2}{b^2}+\frac{y^2}{a^2}=1(a>b>0)$，则 $k\cdot k_{OM}=-\frac{a^2}{b^2}$；

结论(2)中双曲线方程若为 $\frac{y^2}{a^2}-\frac{x^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$，则 $k\cdot k_{OM}=\frac{a^2}{b^2}$.

结论 18 导数问题中常用的不等式

在解决导数的相关问题时，常用到以下不等式：

(1) $\ln x\leqslant x-1(x>0)$；

(2) $\frac{x}{x+1}\leqslant\ln(x+1)\leqslant x(x>-1)$；

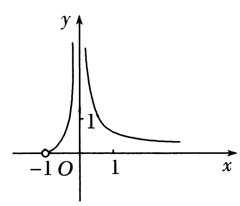
(3) $e^x\geqslant 1+x$；

(4) $e^{-x}\geqslant 1-x$；

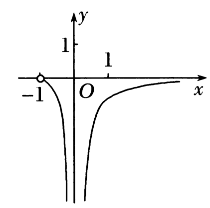
(5) $\frac{\ln x}{x+1}<\frac{x-1}{2}(x>1)$；

(6) $\frac{\ln x}{x^2}<\frac{1}{2}-\frac{1}{2x^2}(x>0)$.

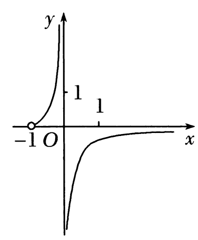
【例 18】 (1)已知函数 $f(x)=\frac{1}{\ln(x+1)-x}$，则 $y=f(x)$ 的图象大致为 ( )



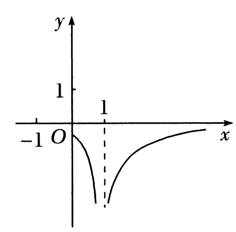
A



B



C



D

(2)已知函数 $f(x)=e^x$，$x\in\mathbf{R}$.证明：曲线 $y=f(x)$ 与曲线 $y=\frac{1}{2}x^2+x+1$ 有唯一公共点.

点评 应用这类不等式解决问题时注意两点：(1)不等式成立时 x 的取值范围及等号成立的条件；(2)各不等式之间的相互联系及转化.

第三步　力争满分

高考阅卷案例(一)　数　列

【真题示例】 (12 分)(2021·全国乙卷)设$\{a_n\}$是首项为 1 的等比数列,数列$\{b_n\}$满足 $b_n=\frac{na_n}{3}$.已知 a_1,$3a_2$,$9a_3$ 成等差数列.

(1)求$\{a_n\}$和$\{b_n\}$的通项公式;

(2)记 S_n 和 T_n 分别为$\{a_n\}$和$\{b_n\}$的前 n 项和.证明:$T_n<\frac{S_n}{2}$.

【标准解答】 (1)**解**　因为$\{a_n\}$是首项为 1 的等比数列,且 a_1,$3a_2$,$9a_3$ 成等差数列,

所以 $6a_2=a_1+9a_3$,所以 $6a_1q=a_1+9a_1q^2$, ………… 2 分

即 $9q^2-6q+1=0$,解得 $q=\frac{1}{3}$,

所以 $a_n=\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}$,所以 $b_n=\frac{na_n}{3}=\frac{n}{3^n}$. ………… 4 分

(2)**证明**　由(1)可得 $S_n=\frac{1\times\left(1-\frac{1}{3^n}\right)}{1-\frac{1}{3}}$

$=\frac{3}{2}\left(1-\frac{1}{3^n}\right)$, ………… 6 分

$T_n=\frac{1}{3}+\frac{2}{3^2}+\cdots+\frac{n-1}{3^{n-1}}+\frac{n}{3^n}$,①

$\frac{1}{3}T_n=\frac{1}{3^2}+\frac{2}{3^3}+\cdots+\frac{n-1}{3^n}+\frac{n}{3^{n+1}}$,②

①-②得 ………… 8 分

$\frac{2}{3}T_n=\frac{1}{3}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{3^3}+\cdots+\frac{1}{3^n}-\frac{n}{3^{n+1}}$

$=\frac{\frac{1}{3}\left(1-\frac{1}{3^n}\right)}{1-\frac{1}{3}}-\frac{n}{3^{n+1}}=\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{3^n}\right)-\frac{n}{3^{n+1}}$,

所以 $T_n=\frac{3}{4}\left(1-\frac{1}{3^n}\right)-\frac{n}{2\times3^n}$, ………… 10 分

所以 $T_n-\frac{S_n}{2}=\frac{3}{4}\left(1-\frac{1}{3^n}\right)-\frac{n}{2\times3^n}-\frac{3}{4}\left(1-\frac{1}{3^n}\right)=-\frac{n}{2\times3^n}<0$,

所以 $T_n<\frac{S_n}{2}$ ………… 12 分

【满分规则】

规则 1　得步骤分:紧扣得分步骤,有则给分,无则没分,步步为"赢".

如第(1)问中,有"$6a_2=a_1+9a_3$"及"$6a_1q=a_1+9a_1q^2$",则得 2 分;第(2)问中,有错位相减法的格式,则得 2 分,因此紧扣得分点,写全步骤,力求满分.

规则 2　得关键分:解题过程的关键点是重要的得分点,往往关系到整个题的对错.

如第(1)问中解出"$q=\frac{1}{3}$",第(2)问中求出"$S_n=\frac{1\times\left(1-\frac{1}{3^n}\right)}{1-\frac{1}{3}}=\frac{3}{2}\left(1-\frac{1}{3^n}\right)$"、"$T_n=\frac{3}{4}\left(1-\frac{1}{3^n}\right)-\frac{n}{2\cdot3^n}$",都是本题的关键步骤及计算结果,若漏掉或计算错误,将失掉本题的大部分分数或得 0 分.

规则 3　得计算分:解题过程中计算准确,是得分的根本保证.

对于应用错位相减法求数列的和来说,计算失误是得满分的最大障碍,特别是两式相减之后,对于差式,要看清楚其项数,然后利用等比数列的求和公式计算.

规则 4　通法通性得分:高考试题的评分细则都是针对最基本的方法给分.

第(1)问中求等比数列的通项公式,第(2)问中求等比数列的和及利用错位相减法求数列的和都是解答数列问题最基本的方法,是高考的基本要求,属于通性通法,不过分的追求技巧,掌握通性通法是得满分的基本保证.

规则 5　规范地使用数学语言:使用简洁、准确、规范的数学语言描述解答过程,是解答得分的根本保证.

规则 6　归纳猜想的应用:对于数列的题目,如果不能利用计算推理求出数列的通项或和,常常可以根据前面的若干项猜想出数列的通项或和,这样既可以得到一部分分数,也可以不影响后续答题.

高考阅卷案例(二) 解三角形

【真题示例】 (12分)(2021·全国新高考Ⅰ卷)记$\triangle ABC$的内角A,B,C的对边分别为a,b,c.已知$b^2=ac$,点D在边AC上,$BD\sin\angle ABC=a\sin C$.

(1)证明:$BD=b$;

(2)若$AD=2DC$,求$\cos\angle ABC$.

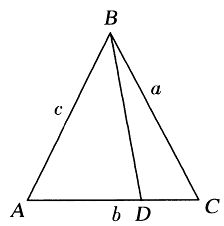
【标准解答】 (1)**证明** 由题设,$BD=\dfrac{a\sin C}{\sin\angle ABC}$,

由正弦定理知$\dfrac{c}{\sin C}=\dfrac{b}{\sin\angle ABC}$,即$\dfrac{\sin C}{\sin\angle ABC}=\dfrac{c}{b}$,

…………………………………………… 1分

$\therefore BD=\dfrac{ac}{b}$,又$b^2=ac$,

$\therefore BD=b$,得证. …………………………………… 3分



(2)**解** 由题意知$BD=b$,$AD=\dfrac{2b}{3}$,$DC=\dfrac{b}{3}$,在$\triangle ABD$中,由余弦定理,得$\cos\angle ADB=\dfrac{b^2+\frac{4b^2}{9}-c^2}{2b\cdot\frac{2b}{3}}$

$=\dfrac{\frac{13b^2}{9}-c^2}{\frac{4b^2}{3}}$, …………………………………… 5分

同理$\cos\angle CDB=\dfrac{b^2+\frac{b^2}{9}-a^2}{2b\cdot\frac{b}{3}}=\dfrac{\frac{10b^2}{9}-a^2}{\frac{2b^2}{3}}$,…… 6分

$\because\angle ADB=\pi-\angle CDB$,

$\therefore\dfrac{\frac{13b^2}{9}-c^2}{\frac{4b^2}{3}}=\dfrac{a^2-\frac{10b^2}{9}}{\frac{2b^2}{3}}$,整理得$2a^2+c^2=\dfrac{11b^2}{3}$,

…………………………………………… 7分

又$b^2=ac$,

$\therefore 2a^2+\dfrac{b^4}{a^2}=\dfrac{11b^2}{3}$,整理得$6a^4-11a^2b^2+3b^4=0$,

解得$\dfrac{a^2}{b^2}=\dfrac{1}{3}$或$\dfrac{a^2}{b^2}=\dfrac{3}{2}$, …………………… 9分

在$\triangle ABC$中,由余弦定理知$\cos\angle ABC=\dfrac{a^2+c^2-b^2}{2ac}$

$=\dfrac{4}{3}-\dfrac{a^2}{2b^2}$, …………………………………… 10分

当$\dfrac{a^2}{b^2}=\dfrac{1}{3}$时,$\cos\angle ABC=\dfrac{7}{6}>1$,不合题意;

当$\dfrac{a^2}{b^2}=\dfrac{3}{2}$时,$\cos\angle ABC=\dfrac{7}{12}$;

综上,$\cos\angle ABC=\dfrac{7}{12}$. ………………………… 12分

【满分规则】

规则1 得步骤分:紧扣得分步骤,有则给分,无则没分,步步为"赢".

如第(1)问,列出正弦定理的表达式"$\dfrac{c}{\sin C}=\dfrac{b}{\sin\angle ABC}$,即$\dfrac{\sin C}{\sin\angle ABC}=\dfrac{c}{b}$"得1分;

第(2)问"$\dfrac{a^2}{b^2}=\dfrac{1}{3}$或$\dfrac{a^2}{b^2}=\dfrac{3}{2}$"漏掉一个则要扣1分,相应地讨论漏掉一个也要扣1分.

规则2 得关键分:解题过程的关键点是重要的得分点,往往关系到整个题的对错.

本题第(2)问中"$\angle ADB=\pi-\angle CDB$"是解题的关键,没有发现二者的关系,就不能沟通两个三角形中的余弦定理的表达式,也就不能利用"$b^2=ac$",使整个解题过程不能进行,所以发现解题的关键点,打通解题的障碍点,是得满分的保证.

规则3 得计算分:解题过程中计算准确,是得分的根本保证.

第(2)问中,对余弦定理的表达式进行变形,以及解方程,得到a,b的关系式,都要求计算的准确,特别是有的解三角形的高考试题中,往往还和三角恒等变换相结合,更需要计算与代数推理的准确性作保证.

规则4 通法通性得分:高考试题的评分细则都是针对最基本的方法给分.

题目给的条件式"$BD\sin\angle ABC=a\sin C$"中既含有角,还含有边,而第(1)问求证的是"$BD=b$",仅仅是边的关系,所以需要把角转化为边,应用正弦定理即可实现;第(2)问中要求角,一般要用第(1)问的结论,自然想到余弦定理可完成这个任务,这就是我们需掌握的通性通法.

规则5 规范地使用数学语言:使用简洁、准确、规范的数学语言描述解答过程,是解答得分的根本保证.

在解三角形类的高考试题中,一般要应用正弦定理、余弦定理,两个定理的变形很多,因此更要规范地书写并使用其表达式.

规则6 定理公式应用得分:评分细则针对解题中用的定理、公式给分.

在第(1)问中,写出正弦定理给1分,第(2)问中,在三角形中写出余弦定理给1分,在解三角形类的高考试题中,写出用到的定理、公式就可得到踩点分.

高考阅卷案例(三)　概率统计

【真题示例】　(12 分)(2021·全国新高考Ⅰ卷)某学校组织“一带一路”知识竞赛,有 A,B 两类问题,每位参加比赛的同学先在两类问题中选择一类并从中随机抽取一个问题回答,若回答错误则该同学比赛结束;若回答正确则从另一类问题中再随机抽取一个问题回答,无论回答正确与否,该同学比赛结束.A 类问题中的每个问题回答正确得 20 分,否则得 0 分;B 类问题中的每个问题回答正确得 80 分,否则得 0 分.已知小明能正确回答 A 类问题的概率为 0.8,能正确回答 B 类问题的概率为 0.6,且能正确回答问题的概率与回答次序无关.

(1)若小明先回答 A 类问题,记 X 为小明的累计得分,求 X 的分布列;

(2)为使累计得分的期望最大,小明应选择先回答哪类问题?并说明理由.

【标准解答】　**解**　(1)由题可知,X 的所有可能取值为 0,20,100. ……………………………… 1 分

$P(X=0)=1-0.8=0.2$;

$P(X=20)=0.8(1-0.6)=0.32$;

$P(X=100)=0.8\times0.6=0.48$. ………………… 4 分

所以 X 的分布列为

X	0	20	100
P	0.2	0.32	0.48

…………………………………………………… 5 分

(2)由(1)知,$E(X)=0\times0.2+20\times0.32+100\times0.48=54.4$. …………………………………………… 6 分

若小明先回答 B 问题,记 Y 为小明的累计得分,则 Y 的所有可能取值为 0,80,100.

…………………………………………………… 7 分

$P(Y=0)=1-0.6=0.4$;

$P(Y=80)=0.6(1-0.8)=0.12$;

$P(X=100)=0.8\times0.6=0.48$. ………………… 10 分

所以 $E(Y)=0\times0.4+80\times0.12+100\times0.48=57.6$.

…………………………………………………… 11 分

因为 $54.4<57.6$,所以小明应选择先回答 B 类问题.

…………………………………………………… 12 分

【满分规则】

规则 1　得步骤分:紧扣得分步骤,有则给分,无则没分,步步为“赢”.

第(1)问中,X 的所有可能取值一共 1 分,其对应的概率答对每个 1 分,答错没分;第(2)问也是如此,按照步骤给分,切不可跳步.

规则 2　得关键分:解题过程的关键点是重要的得分点,往往关系到整个题的对错.

第(1)问中确定 X 的所有可能取值是解答本题的关键,关系到本题的得分多少,确定 X 的值时要读懂题意,准确作答.对于第(2)问 Y 的所有可能取值也是如此.

规则 3　得计算分:解题过程中计算准确,是得分的根本保证.

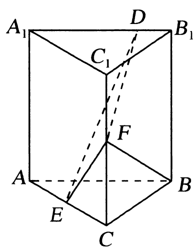
有的概率统计类的高考题(如本题、线性回归方程的求解、独立性检验等)的计算很繁琐,恰当地利用公式,保证计算正确即可得分.

规则 4　数据分析分:数据分析是新课标要求的六大素养之一,在概率统计问题中体现的非常充分.

规则 5　规范地使用数学语言:使用简洁、准确、规范的数学语言描述解答过程,是解答题得分的根本保证.

高考阅卷案例(四)　立体几何

【真题示例】　(12分)(2021·全国甲卷)已知直三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中,侧面 AA_1B_1B 为正方形,$AB=BC=2$,E,F 分别为 AC 和 CC_1 的中点,D 为棱 A_1B_1 上的点.$BF\perp A_1B_1$.



(1)证明:$BF\perp DE$;

(2)当 B_1D 为何值时,面 BB_1C_1C 与面 DFE 所成的二面角的正弦值最小?

【标准解答】　**解**　因为三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 是直三棱柱,

所以 $BB_1\perp$ 底面 ABC,所以 $BB_1\perp AB$, ……… 1分

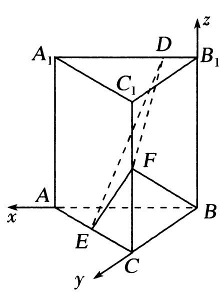
因为 $A_1B_1/\!/AB$,$BF\perp A_1B_1$,所以 $BF\perp AB$,

又 $BB_1\cap BF=B$,BB_1,$BF\subset$ 平面 BCC_1B_1,

所以 $AB\perp$ 平面 BCC_1B_1.

所以 BA,BC,BB_1 两两垂直. ……………………… 2分

以 B 为坐标原点,分别以 BA,BC,BB_1 所在直线为 x,y,z 轴建立空间直角坐标系,如图.



则 $B(0,0,0)$,$A(2,0,0)$,$C(0,2,0)$,$B_1(0,0,2)$,$A_1(2,0,2)$,$C_1(0,2,2)$,$E(1,1,0)$,$F(0,2,1)$.

由题设 $D(a,0,2)(0\leqslant a\leqslant 2)$. ……………………… 4分

(1)**证明**　因为 $\overrightarrow{BF}=(0,2,1)$,$\overrightarrow{DE}=(1-a,1,-2)$,

所以 $\overrightarrow{BF}\cdot\overrightarrow{DE}=0\times(1-a)+2\times1+1\times(-2)=0$,

所以 $BF\perp DE$. …………………………………… 6分

(2)设平面 DFE 的法向量为 $\boldsymbol{m}=(x,y,z)$,

因为 $\overrightarrow{EF}=(-1,1,1)$,$\overrightarrow{DE}=(1-a,1,-2)$,

所以 $\begin{cases}\boldsymbol{m}\cdot\overrightarrow{EF}=0,\\ \boldsymbol{m}\cdot\overrightarrow{DE}=0,\end{cases}$

即 $\begin{cases}-x+y+z=0,\\ (1-a)x+y-2z=0.\end{cases}$

令 $z=2-a$,则 $\boldsymbol{m}=(3,1+a,2-a)$, ………… 8分

因为平面 BCC_1B_1 的法向量为 $\overrightarrow{BA}=(2,0,0)$,

………………………………………………………… 9分

设平面 BCC_1B_1 与平面 DEF 所成二面角的平面角为 θ,

则 $|\cos\theta|=\dfrac{|\boldsymbol{m}\cdot\overrightarrow{BA}|}{|\boldsymbol{m}|\cdot|\overrightarrow{BA}|}=\dfrac{6}{2\times\sqrt{2a^2-2a+14}}=\dfrac{3}{\sqrt{2a^2-2a+14}}$. …………………………… 10分

当 $a=\dfrac{1}{2}$ 时,$2a^2-2a+14$ 取最小值为 $\dfrac{27}{2}$,

此时 $\cos\theta$ 取最大值为 $\dfrac{3}{\sqrt{\dfrac{27}{2}}}=\dfrac{\sqrt{6}}{3}$.

所以 $(\sin\theta)_{\min}=\sqrt{1-\left(\dfrac{\sqrt{6}}{3}\right)^2}=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$,此时 $B_1D=\dfrac{1}{2}$.

………………………………………………………… 12分

【满分规则】

规则1　得步骤分:紧扣得分步骤,有则给分,无则没分,步步为"赢".

利用向量法证明"$BF\perp DE$",则需要建立空间直角坐标系,第(1)问中,首先需要证明 BA,BC,BB_1 两两垂直,然后建系,由此步骤,得2分,没有,扣2分,

规则2　得关键分:解题过程的关键点是重要的得分点,往往关系到整个题的对错.

在第(2)问中,正确的写出各点及向量的坐标,并求出面 BB_1C_1C 与面 DFE 的法向量是表示二者二面角的关键,有一个坐标出错,则第(2)问得很少分.

规则3　得转化分:解题中的转化思想非常重要,可打开思路,得到分数.

在第(1)问中,无论是利用空间向量证明线线垂直,还是利用线面垂直证明线线垂直,都涉及垂直关系的相互转化.一般来说高考试题中的垂直、平行关系都要利用其判定定理、性质定理进行转化来证明.

规则4　得计算分:解题过程中计算准确,是得分的根本保证.

在第(2)问中,利用向量法求二面角的正弦值的最小值,首先要正确地掌握二面角的正弦值的表达式,然后根据函数的单调性求解.

规则5　通法通性得分:高考试题的评分细则都是针对最基本的方法给分.

利用空间向量求空间角或距离,都有固定的方法,掌握这些通用的方法,可得基本分.

高考阅卷案例(五)　解析几何

【真题示例】 (12分)(2021·全国甲卷)抛物线C的顶点为坐标原点O,焦点在x轴上,直线$l:x=1$交C于P,Q两点,且$OP\perp OQ$.已知点$M(2,0)$,且$\odot M$与l相切.

(1)求$C,\odot M$的方程;

(2)设A_1,A_2,A_3是C上的三个点,直线A_1A_2,A_1A_3均与$\odot M$相切.判断直线A_2A_3与$\odot M$的位置关系,并说明理由.

【标准解答】 **解**　(1)依题意设抛物线$C:y^2=2px(p>0)$,$P(1,y_0)$,$Q(1,-y_0)$,

$\because OP\perp OQ$,$\therefore \overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{OQ}=1-y_0^2=1-2p=0$,

$\therefore 2p=1$,

所以抛物线C的方程为$y^2=x$,　………………　2分

$M(2,0)$,$\odot M$与$x=1$相切,所以半径为1,

所以$\odot M$的方程为$(x-2)^2+y^2=1$,　…………　4分

(2)设$A_1(x_1,y_1)$,$A_2(x_2,y_2)$,$A_3(x_3,y_3)$.

若A_1A_2斜率不存在,则A_1A_2方程为$x=1$或$x=3$,
…………………………………………　3分

若A_1A_2方程为$x=1$,根据对称性不妨设$A_1(1,1)$,

则过A_1与圆M相切的另一条直线方程为$y=1$,

此时该直线与抛物线只有一个交点,即不存在A_3,不合题意;　……………………………………　5分

若A_1A_2方程为$x=3$,根据对称性不妨设$A_1(3,\sqrt{3})$,$A_2(3,-\sqrt{3})$,

则过A_1与圆M相切的直线A_1A_3为$y-\sqrt{3}=\dfrac{\sqrt{3}}{3}(x-3)$,

又$k_{A_1A_3}=\dfrac{y_1-y_3}{x_1-x_3}=\dfrac{1}{y_1+y_3}=\dfrac{1}{\sqrt{3}+y_3}=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$,$\therefore y_3=0$,

$x_3=0$,$A_3(0,0)$,此时直线A_1A_3,A_2A_3关于x轴对称,

所以直线A_2A_3与圆M相切;　………………　6分

若直线A_1A_2,A_1A_3,A_2A_3斜率均存在,

则$k_{A_1A_2}=\dfrac{1}{y_1+y_2}$,$k_{A_1A_3}=\dfrac{1}{y_1+y_3}$,$k_{A_2A_3}=\dfrac{1}{y_2+y_3}$,

所以直线A_1A_2方程为$y-y_1=\dfrac{1}{y_1+y_2}(x-x_1)$,

整理得$x-(y_1+y_2)y+y_1y_2=0$,

同理得直线A_1A_3的方程为$x-(y_1+y_3)y+y_1y_3=0$,

直线A_2A_3的方程为$x-(y_2+y_3)y+y_2y_3=0$,
…………………………………………　8分

$\because A_1A_2$与圆M相切,$\therefore \dfrac{|2+y_1y_2|}{\sqrt{1+(y_1+y_2)^2}}=1$,

整理得$(y_1^2-1)y_2^2+2y_1y_2+3-y_1^2=0$,

A_1A_3与圆M相切,同理$(y_1^2-1)y_3^2+2y_1y_3+3-y_1^2=0$,

所以y_2,y_3为方程$(y_1^2-1)y^2+2y_1y+3-y_1^2=0$的两根,

$y_2+y_3=-\dfrac{2y_1}{y_1^2-1}$,$y_2\cdot y_3=\dfrac{3-y_1^2}{y_1^2-1}$,　…………　10分

圆心M到直线A_2A_3的距离为

$$\frac{|2+y_2y_3|}{\sqrt{1+(y_2+y_3)^2}}=\frac{\left|2+\dfrac{3-y_1^2}{y_1^2-1}\right|}{\sqrt{1+\left(-\dfrac{2y_1}{y_1^2-1}\right)^2}}$$

$$=\frac{|y_1^2+1|}{\sqrt{(y_1^2-1)^2+4y_1^2}}=\frac{y_1^2+1}{y_1^2+1}=1,$$

所以直线A_2A_3与圆M相切;

综上,若直线A_1A_2,A_1A_3与圆M相切,则直线A_2A_3与圆M相切.　……………………………　12分

【满分规则】

规则1　得步骤分:紧扣得分步骤,有则给分,无则没分,步步为“赢”.

在第(1)问中,每求出一个方程可得2分,没有求出则没有分;在第(2)问中,讨论直线A_1A_2的斜率不存在,得2分,其中又有两种情况,漏掉一种,扣1分.

规则2　得关键分:解题过程的关键点是重要的得分点,往往关系到整个题的对错.

第(1)问是本题的关键,若方程求错,本题为0分;第(2)问中,得到$y_2+y_3=-\dfrac{2y_1}{y_1^2-1}$,$y_2\cdot y_3=\dfrac{3-y_1^2}{y_1^2-1}$是关键,可得分,即使没有写出前面的方程,也可得分.

规则3　得计算分:解题过程中计算准确,是得分的根本保证.

解析几何是高考数学试题的压轴题,计算量一般比较大,一般计算难点为第(2)问,谁的计算能力强,谁就能得分.同时注意应用“设而不求”的方法规避过于繁琐的计算.

规则4　通法通性得分:高考试题的评分细则都是针对最基本的方法给分.

高考试题的第(2)问往往需要联立直线和圆锥曲线的方程,消元,得一元二次方程,然后利用判别式及根与系数关系,这些都属于通性通法,这样做就可得分.

规则5　分类讨论思想的应用:在解析几何中写出直线方程,往往要讨论斜率存在、不存在两种情形.

如本题的第(2)问,除了讨论直线A_1A_2的斜率是否存在,还讨论了当其斜率不存在时直线A_2A_3与圆M的位置关系.

规则6　等价转化得分:解析几何高考试题一般要把直线、曲线的几何性质转化为代数运算,把复杂问题转化为简单问题.

本题第(2)问就是把直线与圆的位置关系的判断转化为圆心到直线的距离与半径大小关系的判断.

高考阅卷案例(六)　导　数

【真题示例】　(12分)(2021·全国新高考Ⅰ卷)已知函数$f(x)=x(1-\ln x)$.

(1)讨论$f(x)$的单调性;

(2)设a,b为两个不相等的正数,且$b\ln a-a\ln b=a-b$,证明:$2<\frac{1}{a}+\frac{1}{b}<e$.

【标准解答】　(1)**解**　函数$f(x)$的定义域为$(0,+\infty)$,

又$f'(x)=1-\ln x-1=-\ln x$, ……………… 1分

当$x\in(0,1)$时,$f'(x)>0$,当$x\in(1,+\infty)$时,$f'(x)<0$,

故$f(x)$的递增区间为$(0,1)$,递减区间为$(1,+\infty)$.

…………………………………………… 3分

(2)**证明**　因为$b\ln a-a\ln b=a-b$,

故$b(\ln a+1)=a(\ln b+1)$,

即$\frac{\ln a+1}{a}=\frac{\ln b+1}{b}$,

故$f\left(\frac{1}{a}\right)=f\left(\frac{1}{b}\right)$,

设$\frac{1}{a}=x_1,\frac{1}{b}=x_2$,由(1)可知不妨设$0<x_1<1,x_2>1$.

因为$x\in(0,1)$时,$f(x)=x(1-\ln x)>0$,$x\in(e,+\infty)$时,$f(x)=x(1-\ln x)<0$,

故$1<x_2<e$.

先证:$x_1+x_2>2$,

若$x_2\geqslant2$,则$x_1+x_2>2$必成立. ……………… 5分

若$x_2<2$,要证:$x_1+x_2>2$,即证$x_1>2-x_2$,而$0<2-x_2<1$,

故即证$f(x_1)>f(2-x_2)$,即证$f(x_2)>f(2-x_2)$,其中$1<x_2<2$.

设$g(x)=f(x)-f(2-x)$,$1<x<2$,

则$g'(x)=f'(x)+f'(2-x)=-\ln x-\ln(2-x)=-\ln[x(2-x)]$,

因为$1<x<2$,故$0<x(2-x)<1$,故$-\ln[x(2-x)]>0$,

所以$g'(x)>0$,故$g(x)$在$(1,2)$为增函数,所以$g(x)>g(1)=0$,

故$f(x)>f(2-x)$,即$f(x_2)>f(2-x_2)$成立,所以$x_1+x_2>2$成立,

综上,$x_1+x_2>2$成立. ………………………… 8分

设$x_2=tx_1$,则$t>1$,

结合$\frac{\ln a+1}{a}=\frac{\ln b+1}{b}$,$\frac{1}{a}=x_1$,$\frac{1}{b}=x_2$可得$x_1(1-\ln x_1)=x_2(1-\ln x_2)$,

即$1-\ln x_1=t(1-\ln t-\ln x_1)$,故$\ln x_1=\frac{t-1-t\ln t}{t-1}$,

要证$x_1+x_2<e$,即证$(t+1)x_1<e$,即证$\ln(t+1)+\ln x_1<1$,

即证$\ln(t+1)+\frac{t-1-t\ln t}{t-1}<1$,即证$(t-1)\ln(t+1)-t\ln t<0$,

令$S(t)=(t-1)\ln(t+1)-t\ln t$,$t>1$,

则$S'(t)=\ln(t+1)+\frac{t-1}{t+1}-1-\ln t=\ln\left(1+\frac{1}{t}\right)-\frac{2}{t+1}$, ……………………………… 10分

先证明一个不等式:$\ln(x+1)\leqslant x$.

设$u(x)=\ln(x+1)-x$,则$u'(x)=\frac{1}{x+1}-1=\frac{-x}{x+1}$,

当$-1<x<0$时,$u'(x)>0$;当$x>0$时,$u'(x)<0$,

故$u(x)$在$(-1,0)$上为增函数,在$(0,+\infty)$上为减函数,故$u(x)_{\max}=u(0)=0$,

故$\ln(x+1)\leqslant x$成立, ……………………………… 11分

由上述不等式可得当$t>1$时,$\ln\left(1+\frac{1}{t}\right)\leqslant\frac{1}{t}<\frac{2}{t+1}$,故$S'(t)<0$恒成立,

故$S(t)$在$(1,+\infty)$上为减函数,故$S(t)<S(1)=0$,

故$(t-1)\ln(t+1)-t\ln t<0$成立,即$x_1+x_2<e$成立.

综上所述,$2<\frac{1}{a}+\frac{1}{b}<e$. ……………………… 12分

【满分规则】

规则1　得步骤分:紧扣得分步骤,有则给分,无则没分,步步为“赢”.

第(1)问中正确写出函数的导数和定义域得1分,此步骤很容易得分,但往往容易忽视函数的定义域;在第(2)问中要证明的不等式比较复杂,利用换元法对其进行转化并不难,也可得到步骤分.

规则2　得关键分:解题过程的关键点是重要的得分点,往往关系到整个题的对错.

在第(2)问中,根据求证不等式的结构特征构造新函数是解题关键,利用新函数的性质可证明不等式.

规则3　得计算分:解题过程中计算准确,是得分的根本保证.

在第(1)问中求函数的导数,计算正确可得1分,否则不得分,在第(2)问中,研究所构造的新函数的性质,计算正确得分,否则无分.

规则4　通法通性得分:高考试题的评分细则都是针对最基本的方法给分.

第(1)问中,利用函数的导数研究其单调性是通性通法,根据求证的不等式构造新函数,利用新函数的性质证明不等式也是通性通法,这样做就容易踩到得分点.

规则5　分类讨论要有总结性结论:解决含参数的导数问题一般要分类讨论,一要搞清楚分类的参数的全集,分类时做到不重不漏;二是要搞清楚对分类的结果是求交集,还是求并集,还是分别叙述,最后结果一般要总结.如第(1)问中的“故$f(x)$的递增区间为$(0,1)$,递减区间为$(1,+\infty)$.”,第(2)问中“综上所述,$2<\frac{1}{a}+\frac{1}{b}<e$.”

参考答案

第一步　查缺补漏

回顾1　集合、常用逻辑用语、不等式

二、易错易混清零

【例1】 D ［由曲线方程，知 $M=\left\{x\left|\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{9}=1\right.\right\}=[-4,4]$，又 $N=\left\{y\left|\frac{x}{4}+\frac{y}{3}=1\right.\right\}=\mathbf{R}$，所以 $M\cap N=[-4,4]$.］

【例2】 $\left\{0,\frac{1}{2},\frac{1}{3}\right\}$ ［由题意知集合 $A=\{2,3\}$，由 $A\cap B=B$ 知 $B\subseteq A$.
①当 $B=\varnothing$ 时，即方程 $mx-1=0$ 无解，此时 $m=0$ 符合已知条件；
②当 $B\neq\varnothing$ 时，即方程 $mx-1=0$ 的解为 2 或 3，代入得 $m=\frac{1}{2}$ 或 $m=\frac{1}{3}$. 综上，满足条件的 m 组成的集合为 $\left\{0,\frac{1}{2},\frac{1}{3}\right\}$.］

【例3】 $\left[\frac{4}{3},+\infty\right)$ ［易知 $A=\{x|x>3-2a\}$，$B=\{x|x\geqslant a$ 或 $x\leqslant a-1\}$，由 $A\cup B=\mathbf{R}$，得 $3-2a\leqslant a-1$，解得 $a\geqslant\frac{4}{3}$.］

【例4】 C ［直线 $x-y-k=0$ 与圆 $(x-1)^2+y^2=2$ 有两个不同交点等价于 $\frac{|1-0-k|}{\sqrt{2}}<\sqrt{2}$，解得 $k\in(-1,3)$. 四个选项中只有 $(0,3)$ 是 $(-1,3)$ 的真子集，故充分不必要条件可以是"$0<k<3$".

【例5】 B ［当 $a^2-4=0$ 时，解得 $a=2$ 或 $a=-2$，当 $a=2$ 时，不等式可化为 $4x-1\geqslant0$，解集不是空集，不符合题意；当 $a=-2$ 时，不等式可化为 $-1\geqslant0$，解集为空集，符合题意. 当 $a^2-4\neq0$ 时，要使不等式的解集为空集，则有 $\begin{cases}a^2-4<0,\\ \Delta=(a+2)^2+4(a^2-4)<0,\end{cases}$ 解得 $-2<a<\frac{6}{5}$.

综上，实数 a 的取值范围是 $\left[-2,\frac{6}{5}\right)$，故选 B.］

【例6】 C ［因为 $mn>0$，$\frac{1}{m}+\frac{4}{n}=3$，所以 m,n 同正，则 $m+n=\frac{1}{3}(m+n)\left(\frac{1}{m}+\frac{4}{n}\right)=\frac{1}{3}(1+\frac{4m}{n}+\frac{n}{m}+4)\geqslant\frac{1}{3}(5+2\sqrt{\frac{4m}{n}\cdot\frac{n}{m}})=3$，当且仅当 $\frac{4m}{n}=\frac{n}{m}$，即 $\begin{cases}m=1,\\ n=2\end{cases}$ 时，等号成立，即 $m+n$ 的最小值为 3.］

三、基础检验查漏

1.A ［由 $A\cap B=B$ 得 $B\subseteq A$，$x=0$ 时，$x^2=0=x$，不合题意，$x=1$ 时，$x^2=1=x$，也不合题意，$x=-1$ 时，$x^2=1$，满足题意.］

2.C ［A 中，当 $a=2$，$b=-4$ 时，$a>b$ 成立，但 $a^2>b^2$ 不成立，∴ A 错误.
B 中，当 $a=-6$，$b=-4$ 时，$a^2>b^2$ 成立，但 $a>|b|$ 不成立，∴ B 错误.
C 中，$a^2>b^2\Leftrightarrow|a|>|b|$，∴ C 正确.
D 中，当 $a=2$，$b=-4$ 时，$\frac{1}{a}>\frac{1}{b}$ 成立，但 $a^2>b^2$ 不成立，∴ D 错误.］

3.D ［因为"若 p，则 q"的否定是"若 p，则非 q"，所以命题"若 $a^2+b^2=0$，则 $a=0$ 且 $b=0$"的否定是"若 $a^2+b^2=0$，则 $a\neq0$ 或 $b\neq0$".］

4.ABC ［$A=\{x\in\mathbf{R}|-3<x<6\}$，若 $A=B$，则 $a=-3$，且 $a^2-27=-18$，故 A 正确；当 $a=-3$ 时，$A=B$，故 D 不正确；若 $A\subseteq B$，则 $(-3)^2+a\cdot(-3)+a^2-27\leqslant0$ 且 $6^2+6a+a^2-27\leqslant0$，解得 $a=-3$，故 B 正确；当 $B=\varnothing$ 时，$a^2-4(a^2-27)\leqslant0$，解得 $a\leqslant-6$ 或 $a\geqslant6$，故 C 正确.］

5.C ［在 $\triangle ABC$ 中，若 $\sin A=\frac{1}{2}$，则 $A=\frac{\pi}{6}$ 或 $\frac{5\pi}{6}$，因为 $\left\{\frac{\pi}{6},\frac{5\pi}{6}\right\}\supsetneqq\left\{\frac{\pi}{6}\right\}$，因此，"$\sin A=\frac{1}{2}$"是"$A=\frac{\pi}{6}$"的必要不充分条件.］

6.C ［由题意，若 $a=-2$，$b=-1$，A：$-ab=-2>-a^2=-4$，错误；B：$ab=2>b^2=1$，错误；C：$-\frac{1}{a}=\frac{1}{2}<-\frac{1}{b}=1$；D：$\frac{1}{a}=-\frac{1}{2}>\frac{1}{b}=-1$，错误. ∴由排除法知 C 正确.］

7.A ［不等式等价于存在 $x\in(1,4)$，使 $a<x^2-4x-2$ 成立，即 $a<(x^2-4x-2)_{\max}$，
设 $y=x^2-4x-2=(x-2)^2-6$，当 $x\in(1,4)$ 时，$y\in[-6,-2)$，所以 $a<-2$.］

8.AD ［因为 $a>b>0>c>d$，所以 $a>b>0$，$0>c>d$. 对于 A，因为 $0>c>d$，由不等式的性质可得 $c^2<cd$，故正确；对于 B，取 $a=2$，$b=1$，$c=-1$，$d=-2$，则 $a-c=3$，$b-d=3$，所以 $a-c=b-d$，故错误；对于 C，取 $a=2$，$b=1$，$c=-1$，$d=-2$，则 $ac=-2$，$bd=-2$，所以 $ac=bd$，故错误；对于 D，因为 $ad<0$，$bc<0$，且 $a>b>0$，$d<c<0$，所以 $ad<bc$，所以 $\frac{c}{a}>\frac{d}{b}$，即 $\frac{c}{a}-\frac{d}{b}>0$，故正确.］

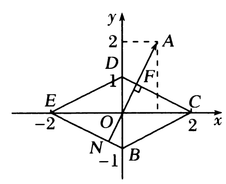
9.D ［因为每台机器生产的产品可获得的总利润 s（万元）与机器运转时间 t（年数，$t\in\mathbf{N}^*$）的关系为 $s=-t^2+23t-64$，所以年平均利润 $y=\frac{s}{t}=-t-\frac{64}{t}+23=-\left(t+\frac{64}{t}\right)+23\leqslant-2\sqrt{t\cdot\frac{64}{t}}+23=7$，当且仅当 $t=8$ 时等号成立，即年平均利润最大，则每台机器运转的年数 t 为 8，故选 D.］

10.C ［设正项等比数列 $\{a_n\}$ 的公比 $q(q>0)$，则由 $a_{2\,021}=a_{2\,020}+2a_{2\,019}$，得 $a_{2\,019}q^2=a_{2\,019}q+2a_{2\,019}$，即 $q^2=q+2$，解得 $q=2$ 或 $q=-1$（舍去），由 $\sqrt{a_pa_r}=2a_2$，得 $\sqrt{a_1q^{p-1}a_1q^{r-1}}=2a_1q$，所以 $2^{p+r-2}=16$，$p+r=6$，
$\frac{1}{p}+\frac{4}{r}=\frac{1}{6}\left(\frac{1}{p}+\frac{4}{r}\right)(p+r)=\frac{1}{6}\left(5+\frac{r}{p}+\frac{4p}{r}\right)\geqslant\frac{1}{6}(5+4)=\frac{3}{2}$，
当且仅当 $\frac{r}{p}=\frac{4p}{r}$，$p+r=6$，即 $p=2$，$r=4$ 时取等号.］

回顾2　复数与平面向量

二、易错易混清零

【例1】 A ［曲线 $|x|+2|y|=2$ 为菱形 $BCDE$，记 $\overrightarrow{OA}=\boldsymbol{a}$，且 OA 与 CD 交于点 F，AO 的延长线交 BE 于点 N. 易知 $CD\perp AN$，$BE\perp AN$，故当点 M 在曲线上运动时，$\overrightarrow{OM}$ 在 $\boldsymbol{a}$ 上的投影必在 FN 上，且当点 M 在 CD 上时，$\overrightarrow{OM}$ 在 $\boldsymbol{a}$ 上的投影取得最大值，当点 M 在 BE 上时，$\overrightarrow{OM}$ 在 $\boldsymbol{a}$ 上的投影取得最小值，最大值为 $|\boldsymbol{a}||\overrightarrow{OF}|=\sqrt{5}\times\frac{2}{\sqrt{5}}=2$，最小值为 $-|\boldsymbol{a}||\overrightarrow{OF}|=-\sqrt{5}\times\frac{2}{\sqrt{5}}=-2$，故选 A.］



【例2】 $\left\{\lambda\left|\lambda>-\frac{1}{2}\text{且}\lambda\neq2\right.\right\}$ ［因为 θ 为锐角，所以 $0<\cos\theta<1$，且 $\lambda\neq2$.
又因为 $\cos\theta=\frac{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|}=\frac{2\lambda+1}{\sqrt{5}\cdot\sqrt{\lambda^2+1}}$，
所以 $0<\frac{2\lambda+1}{\sqrt{5}\cdot\sqrt{\lambda^2+1}}<1$，所以 $\begin{cases}2\lambda+1>0,\\ 2\lambda+1<\sqrt{5}\cdot\sqrt{\lambda^2+1},\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}\lambda>-\frac{1}{2},\\ \lambda\neq2.\end{cases}$
所以 λ 的取值范围是 $\left\{\lambda\left|\lambda>-\frac{1}{2}\text{且}\lambda\neq2\right.\right\}$.］

【例3】 直角三角形 ［因为 $|\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OC}|=|\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}-2\overrightarrow{OA}|$，所以 $|\overrightarrow{CB}|=|\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}|$，即 $|\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC}|=|\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}|$.
故以 AB，AC 为邻边的平行四边形为矩形. 因此 $\triangle ABC$ 是以 A 为直角顶点的直角三角形.］

【例4】 C ［由 $\frac{2-\mathrm{i}}{a+\mathrm{i}}=\frac{(2-\mathrm{i})(a-\mathrm{i})}{(a+\mathrm{i})(a-\mathrm{i})}=\frac{2a-1}{a^2+1}-\frac{a+2}{a^2+1}\mathrm{i}$ 为纯虚数，得 $2a-1=0$，即 $a=\frac{1}{2}$. 所以 $z=4a+\sqrt{2}\mathrm{i}=2+\sqrt{2}\mathrm{i}$，所以 $|z|=\sqrt{4+2}=\sqrt{6}$. 故选 C.］

【例5】 B ［因为向量 $\overrightarrow{OZ}=(1,1)$，所以复数 z 在复平面内对应的点为 $(1,1)$，所以 $|z|=\sqrt{1^2+1^2}=\sqrt{2}$，故选 B.］

三、基础检验查漏

1.C ［**法一** 由 $z=\frac{2+i}{1-i}=\frac{(2+i)\cdot(1+i)}{(1-i)\cdot(1+i)}=\frac{1+3i}{2}$，所以 $|z|=\sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{3}{2}\right)^2}=\frac{\sqrt{10}}{2}$.

法二 $|z|=\left|\frac{2+i}{1-i}\right|=\frac{\sqrt{2^2+1^2}}{\sqrt{1^2+(-1)^2}}=\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{10}}{2}$.］

2.B ［$\frac{1+z}{z}=\frac{1}{z}+1=\frac{1}{1+i}+1=\frac{1-i}{(1+i)(1-i)}+1=\frac{1-i}{2}+1=\frac{3}{2}-\frac{1}{2}i$.］

3.A ［$z=\frac{1+3i}{1+i}=\frac{(1+3i)(1-i)}{(1+i)(1-i)}=\frac{1-i+3i-3i^2}{2}=\frac{4+2i}{2}=2+i$，虚部是 1.］

4.ACD ［$z=(a-i)(3+2i)=3a+2ai-3i-2i^2=(3a+2)+(2a-3)i$，因为复数 z 的实部是 -1，所以 $3a+2=-1$，解得 $a=-1$，所以 $z=-1-5i$.A.复数 z 的虚部是 -5，正确；B.复数 z 的共轭复数 $\overline{z}=-1+5i$，不正确；

C.$|z|=\sqrt{(-1)^2+(-5)^2}=\sqrt{26}$，正确；

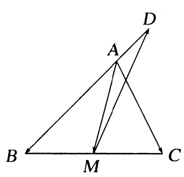
D.z 在复平面内对应的点是 $(-1,-5)$，位于第三象限，正确，故选 ACD.］

5.C ［由 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 共线，即 $\boldsymbol{a}=\lambda\boldsymbol{b}$，所以有 $3\boldsymbol{e}_1-2\boldsymbol{e}_2=\lambda(\boldsymbol{e}_1+k\boldsymbol{e}_2)$，所以 $\begin{cases}3=\lambda,\\-2=\lambda k,\end{cases}$ 消去 λ，可得 $\frac{1}{3}=\frac{k}{-2}$，则 $k=-\frac{2}{3}$.］

6.C ［$\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 为单位向量，且满足 $|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|=\sqrt{2}$，所以 $\boldsymbol{a}^2-2\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}+\boldsymbol{b}^2=2$，解得 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=0$，所以 $|2\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|=\sqrt{4\boldsymbol{a}^2+4\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}+\boldsymbol{b}^2}=\sqrt{5}$.］

7.B ［因为 $\overrightarrow{BD}=\overrightarrow{DC}$，所以点 D 为 BC 的中点，则 $\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}=2\overrightarrow{OD}$，而 $\overrightarrow{AM}=2\overrightarrow{OD}$，即 $\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{AM}$，所以 $\lambda\overrightarrow{OM}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AM}=\overrightarrow{OM}$，则 $\lambda=1$.］

8.B ［由 $\overrightarrow{AD}=-\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}$ 知，D 为线段 BA 延长线上的点，且 $AD=\frac{1}{3}AB$；



由 $\overrightarrow{BM}=\frac{1}{2}\overrightarrow{BC}$ 知，M 为 BC 中点；

$\because\overrightarrow{MD}=\overrightarrow{AD}-\overrightarrow{AM}=-\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}-\frac{1}{2}(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC})=-\frac{5}{6}\overrightarrow{AB}-\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$，又 $\overrightarrow{MD}=\lambda\overrightarrow{AB}+\mu\overrightarrow{AC}(\lambda,\mu\in\mathbf{R})$，

$\therefore\lambda=-\frac{5}{6},\mu=-\frac{1}{2}$，$\therefore\lambda-\mu=-\frac{5}{6}+\frac{1}{2}=-\frac{1}{3}$.］

9.A ［因为 $\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{AC}+\frac{3}{2}\overrightarrow{CB}$，由 $AB=6,AC=8,BC=10$，易知 $\angle BAC=90°$，$\therefore\cos C=\frac{AC}{BC}=\frac{8}{10}=\frac{4}{5}$，

所以 $\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{BC}=\left(\overrightarrow{AC}+\frac{3}{2}\overrightarrow{CB}\right)\cdot\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{BC}-\frac{3}{2}\overrightarrow{BC}^2=8\times10\times\frac{4}{5}-\frac{3}{2}\times100=-86$.］

10.ABD ［因为 $\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AB}=|\overrightarrow{AC}||\overrightarrow{AB}|\cos A=|\overrightarrow{AD}||\overrightarrow{AB}|$，所以结合射影定理可得 $|\overrightarrow{AC}|^2=\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AB}$，所以 A 正确；因为 $\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC}=|\overrightarrow{BA}||\overrightarrow{BC}|\cos B=|\overrightarrow{BA}||\overrightarrow{BD}|$，所以结合射影定理可得 $|\overrightarrow{BC}|^2=\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC}$，所以 B 正确；因为 $\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{CD}=|\overrightarrow{AC}||\overrightarrow{CD}|\cdot\cos(\pi-\angle ACD)<0$，又 $|\overrightarrow{AB}|^2>0$，所以 C 错误；因为 $\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AB}=|\overrightarrow{AD}||\overrightarrow{AB}|$，$\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC}=|\overrightarrow{BA}||\overrightarrow{BD}|$，

所以 $\frac{(\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AB})(\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC})}{|\overrightarrow{AB}|^2}=\frac{|\overrightarrow{AD}|\cdot|\overrightarrow{AB}|\cdot|\overrightarrow{BA}|\cdot|\overrightarrow{BD}|}{|\overrightarrow{AB}|^2}=|\overrightarrow{AD}||\overrightarrow{BD}|$，所以结合射影定理可得 $|\overrightarrow{CD}|^2=|\overrightarrow{AD}||\overrightarrow{BD}|$，所以 D 正确，故选 ABD.］

回顾 3 三角函数、解三角形

二、易错易混清零

【例 1】 C ［由题意得点 $P(-8m,-3)$，$r=\sqrt{64m^2+9}$，

所以 $\cos\alpha=\frac{-8m}{\sqrt{64m^2+9}}=-\frac{4}{5}$，解得 $m=\pm\frac{1}{2}$，

又 $\cos\alpha=-\frac{4}{5}<0$，所以 $-8m<0$，即 $m>0$，所以 $m=\frac{1}{2}$.］

【例 2】 $\left[k\pi-\frac{\pi}{12},k\pi+\frac{5\pi}{12}\right](k\in\mathbf{Z})$ ［由题意，得 $y=-\sin\left(2x-\frac{\pi}{3}\right)$，令 $2k\pi-\frac{\pi}{2}\leqslant2x-\frac{\pi}{3}\leqslant2k\pi+\frac{\pi}{2},k\in\mathbf{Z}$.

得 $k\pi-\frac{\pi}{12}\leqslant x\leqslant k\pi+\frac{5\pi}{12},k\in\mathbf{Z}$.］

【例 3】 B ［因为 $y=\sin\left(4x-\frac{\pi}{3}\right)=\sin\left[4\left(x-\frac{\pi}{12}\right)\right]$，所以要得到函数 $y=\sin\left(4x-\frac{\pi}{3}\right)$ 的图象，只需将函数 $y=\sin4x$ 的图象向右平移 $\frac{\pi}{12}$ 个单位长度.］

【例 4】 $\frac{1}{2}$ ［因为 $0<\alpha<\frac{\pi}{2}$ 且 $\cos\alpha=\frac{1}{7}<\cos\frac{\pi}{3}=\frac{1}{2}$，所以 $\frac{\pi}{3}<\alpha<\frac{\pi}{2}$.又 $0<\beta<\frac{\pi}{2}$，所以 $\frac{\pi}{3}<\alpha+\beta<\pi$，

又 $\sin(\alpha+\beta)=\frac{5\sqrt{3}}{14}<\frac{\sqrt{3}}{2}$，所以 $\frac{2\pi}{3}<\alpha+\beta<\pi$.

所以 $\cos(\alpha+\beta)=-\sqrt{1-\sin^2(\alpha+\beta)}=-\frac{11}{14}$，

$\sin\alpha=\sqrt{1-\cos^2\alpha}=\frac{4\sqrt{3}}{7}$.

所以 $\cos\beta=\cos[(\alpha+\beta)-\alpha]=\cos(\alpha+\beta)\cos\alpha+\sin(\alpha+\beta)\sin\alpha=\frac{1}{2}$.］

【例 5】 D ［$\because c=2,b=2\sqrt{3},C=30°$，$\therefore$ 由正弦定理可得 $\sin B=\frac{b\sin C}{c}=\frac{2\sqrt{3}\times\frac{1}{2}}{2}=\frac{\sqrt{3}}{2}$，由 $b>c$，可得 $30°<B<180°$，

$\therefore B=60°$ 或 $B=120°$.］

三、基础检验查漏

1.D ［由 $2\cos(\pi+\theta)=\sin(-\theta)$ 得 $-2\cos\theta=-\sin\theta$，$\therefore\tan\theta=\frac{\sin\theta}{\cos\theta}=2$，$\therefore\tan\left(\theta+\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\tan\theta+\tan\frac{\pi}{4}}{1-\tan\theta\tan\frac{\pi}{4}}=\frac{2+1}{1-2}=-3$.］

2.D ［由题意知 $\sin\left(\alpha-\frac{\pi}{6}\right)=\frac{1}{3}$，又由 $\cos\left(\frac{\pi}{3}-2\alpha\right)=\cos\left(2\alpha-\frac{\pi}{3}\right)=\cos\left[2\left(\alpha-\frac{\pi}{6}\right)\right]=1-2\sin^2\left(\alpha-\frac{\pi}{6}\right)=\frac{7}{9}$.］

3.B ［由题意可得 $g(x)=4\sin\left(2x+\frac{\pi}{4}\right)-1$，当 $x\in\left[-\frac{\pi}{8},\frac{\pi}{4}\right]$ 时，$2x+\frac{\pi}{4}\in\left[0,\frac{3\pi}{4}\right]$，

所以 $\sin\left(2x+\frac{\pi}{4}\right)\in[0,1]$，

所以函数 $g(x)$ 在 $\left[-\frac{\pi}{8},\frac{\pi}{4}\right]$ 上的值域为 $[-1,3]$.］

4.C ［$\cos2\alpha=\cos^2\alpha-\sin^2\alpha=\frac{\cos^2\alpha-\sin^2\alpha}{\cos^2\alpha+\sin^2\alpha}=\frac{1-\tan^2\alpha}{1+\tan^2\alpha}=\frac{2}{3}$，$\tan\alpha=\pm\frac{\sqrt{5}}{5}$，由题意 $m=\frac{n}{2}=\tan\alpha$，所以 $m-n=\tan\alpha-2\tan\alpha=-\tan\alpha=\mp\frac{\sqrt{5}}{5}$.］

5.A ［由图可知 $A=1$，$\frac{T}{4}=\frac{\pi}{4}$，得 $T=\pi$，所以 $\omega=\frac{2\pi}{\pi}=2$，将 $x=\frac{7\pi}{12}$ 代入可得 $2\times\frac{7\pi}{12}+\varphi=\frac{3\pi}{2}+2k\pi,k\in\mathbf{Z}$，得 $\varphi=\frac{\pi}{3}+2k\pi$，又 $|\varphi|<\frac{\pi}{2}$，所以 $\varphi=\frac{\pi}{3}$，所以 $f(x)=\sin\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)$，为了得到 $g(x)=\sin2x$，所以将函数 $f(x)$ 向右平移 $\frac{\pi}{6}$ 个单位长度.］

6.A ［两边平方得 $(\sin\alpha+2\cos\alpha)^2=1$，即 $\sin^2\alpha+4\sin\alpha\cos\alpha+4\cos^2\alpha=1$，

所以 $1+4\sin\alpha\cos\alpha+3\cos^2\alpha=1$，即 $4\sin\alpha\cos\alpha+3\cos^2\alpha=0$，所以 $4\tan\alpha+3=0$，即 $\tan\alpha=-\frac{3}{4}$，所以 $\tan2\alpha=\frac{2\tan\alpha}{1-\tan^2\alpha}=\frac{2\times\left(-\frac{3}{4}\right)}{1-\left(-\frac{3}{4}\right)^2}=-\frac{24}{7}$.］

7.D ［因为 $f(x)=\sin x-\sqrt{3}\cos x=2\sin\left(x-\frac{\pi}{3}\right)$，

对于 A，$f\left(\frac{5\pi}{6}\right)=2\sin\left(\frac{5\pi}{6}-\frac{\pi}{3}\right)=2$，不符合要求，A 错误；

对于 B，$f\left(\frac{\pi}{6}\right)=2\sin\left(\frac{\pi}{6}-\frac{\pi}{3}\right)=-1$，不符合要求，B 错误；

对于 C，$-\frac{\pi}{6}\in\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$，$f\left(-\frac{\pi}{6}\right)=2\sin\left(-\frac{\pi}{6}-\frac{\pi}{3}\right)=-2$ 是最小值，不符合要求，C 错误；

对于 D，由 $2\sin\left(x-\frac{\pi}{3}\right)=1$ 得，$x=2k\pi+\frac{\pi}{2}(k\in\mathbf{Z})$ 或 $x=2k\pi+\frac{7\pi}{6}(k\in\mathbf{Z})$，

$x>0$ 时，依次得到交点的横坐标 $x_1=\frac{\pi}{2}$，$x_2=\frac{7\pi}{6}$，$x_3=\frac{5\pi}{2}$，$x_4=\frac{19\pi}{6}$，……，交点间的最小距离等于 $x_2-x_1=\frac{2\pi}{3}$，

$x<0$ 时，同理可得交点间的最小距离等于 $\frac{2\pi}{3}$，即函数 $f(x)$ 的图象与直线 $y=1$ 的交点间的最小距离为 $\frac{2\pi}{3}$.]

8.ABD ［$\because\sin\theta+\cos\theta=\frac{1}{5}$，$\therefore$ 两边平方得 $1+2\sin\theta\cos\theta=\frac{1}{25}$，$\therefore\sin\theta\cos\theta=-\frac{12}{25}$，$\therefore\sin\theta$ 与 $\cos\theta$ 异号. $\because\theta\in(0,\pi)$，$\therefore\theta\in\left(\frac{\pi}{2},\pi\right)$，故 A 项正确；$(\sin\theta-\cos\theta)^2=1-2\sin\theta\cos\theta=\frac{49}{25}$，$\because\theta\in\left(\frac{\pi}{2},\pi\right)$，$\therefore\sin\theta>\cos\theta$，$\therefore\sin\theta-\cos\theta=\frac{7}{5}$，故 D 项正确；$\because\sin\theta+\cos\theta=\frac{1}{5}$，$\sin\theta-\cos\theta=\frac{7}{5}$，联立解得 $\sin\theta=\frac{4}{5}$，$\cos\theta=-\frac{3}{5}$，$\therefore\tan\theta=-\frac{4}{3}$，故 B 项正确，C 项错误，故选 ABD.］

9.**解** (1)根据正弦定理，
$2a\cos B=2c+b\Rightarrow2\sin A\cos B=2\sin C+\sin B\Rightarrow2\sin A\cos B=2\sin(\pi-A-B)+\sin B\Rightarrow2\sin A\cos B=2\sin(A+B)+\sin B\Rightarrow2\sin A\cos B=2\sin A\cos B+2\cos A\sin B+\sin B\Rightarrow2\cos A\sin B+\sin B=0$，因为 $B\in(0,\pi)$，所以 $\sin B\neq0$，因此有 $\cos A=-\frac{1}{2}$，

因为 $A\in(0,\pi)$，所以 $A=\frac{2\pi}{3}$.

(2)由余弦定理可知：

$a^2=b^2+c^2-2bc\cdot\cos A\Rightarrow27=9+c^2-2\times3\cdot c\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)\Rightarrow c^2+3c-18=0$，解得 $c=3$，$c=-6$(舍去)，因此 $\triangle ABC$ 的面积为 $\frac{1}{2}bc\cdot\sin A=\frac{1}{2}\times3\times3\times\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{9\sqrt{3}}{4}$.

10.**解** (1)**方案一** 选条件①.

由余弦定理知 $\cos B=\frac{a^2+c^2-b^2}{2ac}$，

代入 $2c\cos B=2a-b$ 并整理，得 $a^2+b^2-c^2=ab$，

由余弦定理，得 $\cos C=\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}=\frac{ab}{2ab}=\frac{1}{2}$，

因为 $0<C<\pi$，所以 $C=\frac{\pi}{3}$.

方案二 选条件②.

由 $c\cos(B-A)=\cos C(2\sqrt{3}b\sin A-c)$，

得 $c\cos(B-A)+c\cos C=2\sqrt{3}b\sin A\cos C$，

则 $c\cos(B-A)-c\cos(B+A)=2\sqrt{3}b\sin A\cos C$，即 $2c\sin B\sin A=2\sqrt{3}b\sin A\cos C$，

由正弦定理可得 $2\sin A\sin B\sin C=2\sqrt{3}\sin B\sin A\cos C$，

因为 $A,B\in(0,\pi)$，所以 $\sin A\sin B\neq0$，

所以 $\sin C=\sqrt{3}\cos C$，即 $\tan C=\sqrt{3}$，

又 $0<C<\pi$，所以 $C=\frac{\pi}{3}$.

方案三 选条件③.

$a\tan C=2c\sin(B+C)=2c\sin A$，

由正弦定理可得 $\sin A\tan C=2\sin C\sin A$.

因为 $\sin A\neq0$，所以 $\tan C=2\sin C$，

所以 $\cos C=\frac{1}{2}$，

又 $0<C<\pi$，所以 $C=\frac{\pi}{3}$.

(2)由题意知，$AD=BD=1$，$CD=\sqrt{3}$，

在 $\triangle ACD$ 中，$AC^2=AD^2+CD^2-2AD\cdot CD\cdot\cos\angle ADC$，

即 $b^2=4-2\sqrt{3}\cos\angle ADC$.

在 $\triangle BCD$ 中，$BC^2=BD^2+CD^2-2BD\cdot CD\cdot\cos\angle BDC$，

即 $a^2=4-2\sqrt{3}\cos\angle BDC$.

因为 $\angle ADC+\angle BDC=\pi$，所以 $\cos\angle ADC=-\cos\angle BDC$，

所以 $a^2+b^2=8$.

由(1)知，$\cos\angle ACB=\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}=\frac{1}{2}$，

所以 $a^2+b^2=c^2+ab=4+ab$，所以 $ab=4$，

由 $\begin{cases}a^2+b^2=8,\\ab=4,\end{cases}$ 得 $a=b=2$.

所以 $\triangle ABC$ 为等边三角形.

回顾 4 数 列

二、易错易混清零

【例 1】 $a_n=\begin{cases}3,n=1,\\-\frac{5}{2^{n-1}},n\geqslant2\end{cases}$ ［由于 $a_1+2a_2+2^2a_3+\cdots+2^{n-1}a_n=8-5n$，

那么当 $n\geqslant2$ 时，$a_1+2a_2+2^2a_3+\cdots+2^{n-2}a_{n-1}=8-5(n-1)$，

两式对应相减可得 $2^{n-1}a_n=8-5n-[8-5(n-1)]=-5$，所以 $a_n=-\frac{5}{2^{n-1}}$.

而当 $n=1$ 时，$a_1=3\neq-\frac{5}{2^{1-1}}=-5$，

所以数列 $\{a_n\}$ 的通项公式为 $a_n=\begin{cases}3,n=1,\\-\frac{5}{2^{n-1}},n\geqslant2.\end{cases}$］

【例 2】 $\frac{4}{3}$ ［由等差数列的性质，知 $\frac{a_8}{b_8}=\frac{2a_8}{2b_8}=\frac{a_1+a_{15}}{b_1+b_{15}}=\frac{S_{15}}{T_{15}}=\frac{3\times15-1}{2\times15+3}=\frac{4}{3}$.］

【例 3】 1 或 -1 ［(1)当 $q=1$ 时，显然 $S_3+S_6=S_9$ 成立.

(2)当 $q\neq1$ 时，由 $S_3+S_6=S_9$，得 $\frac{a_1(1-q^3)}{1-q}+\frac{a_1(1-q^6)}{1-q}=\frac{a_1(1-q^9)}{1-q}$.

由于 $1-q^3\neq0$，所以 $q=-1$.］

【例 4】 23 ［由 $a_2=1$，$a_{n+1}=a_n+\frac{1}{2}(n\geqslant2)$，所以数列 $\{a_n\}$ 从第 2 项起是公差为 $\frac{1}{2}$ 的等差数列，

所以 $S_9=a_1+a_2+a_3+\cdots+a_9=1+8a_2+\frac{8(8-1)}{2}\times\frac{1}{2}=23$.］

【例 5】 (1)**解** 设数列 $\{a_n\}$ 的公比为 q，数列 $\{b_n\}$ 的公差为 d，

由题意得 $1+d=1+q$，$q^2=2(1+2d)-6$，

解得 $d=q=2$，

所以 $a_n=2^{n-1}$，$b_n=2n-1$.

(2)**证明** 因为 $c_n=\frac{1}{b_nb_{n+2}}=\frac{1}{(2n-1)(2n+3)}$

$=\frac{1}{4}\left(\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n+3}\right)$，

所以 $T_n=\frac{1}{4}\left[\left(1-\frac{1}{5}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{7}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{2n-3}-\frac{1}{2n+1}\right)+\left(\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n+3}\right)\right]=\frac{1}{4}\left(1+\frac{1}{3}-\frac{1}{2n+1}-\frac{1}{2n+3}\right)$

$=\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\left(\frac{1}{2n+1}+\frac{1}{2n+3}\right)$，

因为 $\frac{1}{4}\left(\frac{1}{2n+1}+\frac{1}{2n+3}\right)>0$，

所以 $T_n<\frac{1}{3}$.

又因为 T_n 在 $[1,+\infty)$ 上单调递增，

所以当 $n=1$ 时，T_n 取最小值 $T_1=\frac{1}{5}$，

所以 $\frac{1}{5}\leqslant T_n<\frac{1}{3}$.

【例 6】 $\begin{cases}-n,n\text{ 为偶数},\\n,n\text{ 为奇数}\end{cases}$ ［$b_n=(-1)^{n-1}a_n=(-1)^{n-1}(2n-1)$.

$T_n=1-3+5-7+\cdots+(-1)^{n-1}(2n-1)$.

当 n 为偶数时，$T_n=(a_1-a_2)+(a_3-a_4)+\cdots+(a_{n-1}-a_n)=(-2)\cdot\frac{n}{2}=-n$.

当 n 为奇数时，$T_n=T_{n-1}+b_n=-(n-1)+a_n=n$.

故 $T_n=\begin{cases}-n,n\text{ 为偶数},\\n,n\text{ 为奇数}.\end{cases}$

三、基础检验查漏

1.C [因为$\{a_n\}$是等差数列,所以$S_9=\dfrac{9(a_1+a_9)}{2}=9a_5=18$,$a_5=2$,所以$a_7=2a_5-a_3=2\times2-1=3$.]

2.B [$\log_9 a_1+\log_9 a_2+\cdots+\log_9 a_{10}=\log_9[(a_1a_{10})\cdot(a_2a_9)\cdot(a_3a_8)\cdot(a_4a_7)\cdot(a_5a_6)]=\log_9 9^5=5$.]

3.C [在等差数列$\{a_n\}$中,$a_2=5$,$S_5=35$,所以$a_1+d=5$,$5a_1+10d=35$,解得$a_1=3$,$d=2$,所以$S_{10}=10a_1+45d=10\times3+45\times2=120$,故选 C.]

4.B [设数列$\{a_n\}$的公比为q,显然$q\neq1$,$\because S_4=a_5-1$,$\therefore \dfrac{a_1(1-q^4)}{1-q}=a_1q^4-1$,即
$\dfrac{q^4-1}{q-1}=q^4-1$,又$q>0$,$q\neq1$,$\therefore q-1=1$,$\therefore q=2$,$\therefore a_6=a_1q^5=32$,故选 B.]

5.C [由题意可知半径差为 19 833 $\dfrac{1}{3}$,内一衡径为 238 000 里,因此次二衡直径为:238 000+19 833 $\dfrac{1}{3}\times2$,次三衡直径为:238 000+19 833$\dfrac{1}{3}\times2$+19 833 $\dfrac{1}{3}\times2$=317 333 $\dfrac{1}{3}$,

又因为 300 步为 1 里,所以$\dfrac{1}{3}$里约为 100 步,所以次三衡径为 317 333 里100 步.]

6.A [若$S_{17}>0$,则$a_1+a_{17}>0$,得$a_9>0$,而$S_{18}<0$,所以$a_1+a_{18}<0$,即$a_9+a_{10}<0$,所以$a_{10}<0$;
若$S_{17}<0$,得$a_9<0$,而$S_{16}>0$,所以$a_1+a_{16}>0$,即$a_8+a_9>0$,所以$a_8>0$;
若$S_{17}=0$,则$a_1+a_{17}=0$,得$a_9=0$.
所以数列$\{a_n\}$各项中取值为正数的有 8 项或 9 项,故选 A.]

7.ABC [因为数列$\{a_n\}$为等比数列,$a_1a_4=32$,所以$a_2a_3=32$.又$a_2+a_3=12$,所以$\begin{cases}a_2=4,\\a_3=8,\\q=2,\end{cases}$或$\begin{cases}a_2=8,\\a_3=4,\\q=\dfrac{1}{2}.\end{cases}$又公比$q$为整数,所以$\begin{cases}a_2=4,\\a_3=8,\\q=2,\end{cases}$所以 A 正确;由已知,得$a_1=\dfrac{a_2}{q}=\dfrac{4}{2}=2$,$a_n=2\times2^{n-1}=2^n$,所以$S_n=\dfrac{2\times(1-2^n)}{1-2}=2^{n+1}-2$,所以$S_8=2^9-2=510$,所以 C 正确;因为$S_n+2=2^{n+1}$,$\dfrac{S_n+2}{S_{n-1}+2}=\dfrac{2^{n+1}}{2^n}=2$,所以数列$\{S_n+2\}$是等比数列,所以 B 正确;因为$\lg a_n-\lg a_{n-1}=\lg 2^n-\lg 2^{n-1}=\lg\dfrac{2^n}{2^{n-1}}=\lg 2$,所以数列$\{\lg a_n\}$的公差为$\lg 2$,所以 D 错误,故选 ABC.]

8.C [因为$a_7^2=a_9$,即$(a_1q^6)^2=a_1q^8$,所以$a_5=1$,又因为$a_8>a_9$,所以数列$\{a_n\}$为单调递减,因为$a_n-\dfrac{1}{a_1}=a_n-q^4=q^4(a_1q^{n-5}-1)=q^4(q^{n-9}-1)>0$,
所以$q^{n-9}>1=q^0$,所以$n<9$.又因为n为整数,故$n_{\max}=8$.]

9.**解** (1)由已知,得$a_2=2a_1-2(1-1)=4$,所以$d=a_2-a_1=2$,$a_n=a_1+(n-1)d=2n$.

(2)由(1)得:$b_n=\dfrac{1}{a_n\cdot a_{n+1}}=\dfrac{1}{4n(n+1)}=\dfrac{1}{4}\left(\dfrac{1}{n}-\dfrac{1}{n+1}\right)$,

所以$S_n=b_1+b_2+\cdots+b_n=\dfrac{1}{4}\left(1-\dfrac{1}{2}\right)+\dfrac{1}{4}\left(\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{3}\right)+\cdots+\dfrac{1}{4}\left(\dfrac{1}{n}-\dfrac{1}{n+1}\right)=\dfrac{1}{4}\left(1-\dfrac{1}{n+1}\right)=\dfrac{n}{4(n+1)}$.

10.**解** (1)设等差数列$\{a_n\}$的公差为d,等比数列$\{b_n\}$的公比为$q(q>0)$,

由题意得$20=b_3-a_3=a_5+b_2$,

即$\begin{cases}20=3q^2-(3+2d)\\20=(3+4d)+3q\end{cases}$,

得$d=2$,$q=3$,所以$a_n=2n+1$,$b_n=3^n$.

(2)选①,$c_n=\dfrac{1}{a_n\cdot a_{n+1}}+(-1)^nb_n=\dfrac{1}{(2n+1)(2n+3)}+(-3)^n=\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{a_n}-\dfrac{1}{a_{n+1}}\right)+(-3)^n$,

则$S_n=c_1+c_2+\cdots+c_n=\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{a_1}-\dfrac{1}{a_2}\right)+(-3)^1+\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{a_2}-\dfrac{1}{a_3}\right)+(-3)^2+\cdots+\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{a_n}-\dfrac{1}{a_{n+1}}\right)+(-3)^n$

$=\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{a_1}-\dfrac{1}{a_{n+1}}\right)+\dfrac{-3[1-(-3)^n]}{1+3}$

$=\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{3}-\dfrac{1}{2n+3}\right)+\dfrac{-3[1-(-3)^n]}{4}$,

故$S_n=\dfrac{n}{6n+9}+\dfrac{3[(-3)^n-1]}{4}$.

选②,$c_n=a_n\cdot b_n=(2n+1)3^n$,

则$S_n=c_1+c_2+\cdots+c_n=3\times3+5\times3^2+\cdots+(2n+1)3^n$,

$3S_n=3\times3^2+5\times3^3+\cdots+(2n+1)3^{n+1}$,

两式相减,

得$-2S_n=3^2+2\times3^2+2\times3^3+\cdots+2\times3^n-(2n+1)3^{n+1}$,

则$S_n=n\cdot3^{n+1}$.

选③,$c_n=\dfrac{2(a_n+3)}{a_na_{n+1}b_{n+1}}=\dfrac{2(2n+4)}{(2n+1)(2n+3)3^{n+1}}=\dfrac{1}{(2n+1)3^n}-\dfrac{1}{(2n+3)3^{n+1}}=\dfrac{1}{a_nb_n}-\dfrac{1}{a_{n+1}b_{n+1}}$,

则$S_n=c_1+c_2+\cdots+c_n=\dfrac{1}{a_1b_1}-\dfrac{1}{a_2b_2}+\dfrac{1}{a_2b_2}-\dfrac{1}{a_3b_3}+\cdots+\dfrac{1}{a_nb_n}-\dfrac{1}{a_{n+1}b_{n+1}}=\dfrac{1}{a_1b_1}-\dfrac{1}{a_{n+1}b_{n+1}}$,

故$S_n=\dfrac{1}{9}-\dfrac{1}{(2n+3)3^{n+1}}$.

回顾 5　排列、组合、二项式定理、概率统计

二、易错易混清零

【例 1】 C [根据题意,分两种情况讨论:如果甲同学选牛,那么乙同学只能从兔、狗和羊中选一个,丙同学可以从剩下的十个中任选一个,此时的选法有$C_3^1C_{10}^1=30$(种);如果甲同学选马,那么乙同学可以从牛、兔、狗和羊中任选一个,丙同学可以从剩下的十个中任选一个,此时的选法有$C_4^1C_{10}^1=40$(种).综上可知,不同的选法共有$30+40=70$(种).故选 C.]

【例 2】 C [由题意,得年龄在区间$[30,40)$内的频率为$0.025\times10=0.25$,

则赞成高校招生改革的市民有$\dfrac{2\ 500}{0.25}=10\ 000$(人),

因为年龄在区间$[20,30)$内的有 1 200 人,

所以$m=\dfrac{\frac{1\ 200}{10\ 000}}{10}=0.012$.]

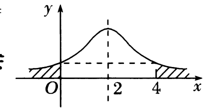
【例 3】 $\dfrac{2}{3}$ [由互斥事件的概率加法公式,得$P(A+B)=P(A)+P(B)=\dfrac{2}{3}$.]

【例 4】 A [$\left(2x-\dfrac{3}{x}\right)^5$的展开式中的二项式系数和为$A=2^5=32$,

令$x=1$,得$B=(-1)^5=-1$,所以$A-B=32-(-1)=33$,故选 A.]

【例 5】 $\dfrac{3}{5}$ [由条件概率$P(B|A)=\dfrac{P(AB)}{P(A)}=\dfrac{1}{2}$,所以$P(A)=2P(AB)=2\times\dfrac{3}{10}=\dfrac{3}{5}$.]

【例 6】 C [由$P(\xi<4)=0.8$,得$P(\xi\geqslant4)=0.2$.由题意知图象的对称轴为直线$x=2$,所以$P(\xi\leqslant0)=P(\xi\geqslant4)=0.2$,所以$P(0<\xi<4)=1-P(\xi\leqslant0)-P(\xi\geqslant4)=0.6$.



所以$P(0<\xi<2)=\dfrac{1}{2}P(0<\xi<4)=0.3$.]

【例 7】 $\dfrac{17}{23}$ [令$t=x^2$,

则曲线的回归方程变为线性的回归方程,即$y=bt-\dfrac{1}{2}$,

此时$\bar{t}=\dfrac{\sum\limits_{i=1}^{6}x_i^2}{6}=\dfrac{23}{6}$,$\bar{y}=\dfrac{\sum\limits_{i=1}^{6}y_i}{6}=\dfrac{14}{6}$,

代入$y=bt-\dfrac{1}{2}$,得$\dfrac{14}{6}=b\times\dfrac{23}{6}-\dfrac{1}{2}$,解得$b=\dfrac{17}{23}$.]

【例 8】 **解** 依题意,这 4 个人中,每个人去A地旅游的概率为$\dfrac{1}{3}$,去B地旅游的概率为$\dfrac{2}{3}$.

设"这 4 个人中恰有i人去A地旅游"为事件$A_i(i=0,1,2,3,4)$,

所以$P(A_i)=C_4^i\left(\dfrac{1}{3}\right)^i\left(\dfrac{2}{3}\right)^{4-i}$.

(1)这 4 个人中恰有 1 人去 A 地旅游的概率为

$P(A_1)=C_4^1\left(\frac{1}{3}\right)^1\left(\frac{2}{3}\right)^{4-1}=\frac{32}{81}$.

(2)ξ 的所有可能取值为 0,3,4,

$P(\xi=0)=P(A_0)+P(A_4)=\frac{16}{81}+\frac{1}{81}=\frac{17}{81}$.

$P(\xi=3)=P(A_1)+P(A_3)=\frac{32}{81}+\frac{8}{81}=\frac{40}{81}$.

$P(\xi=4)=P(A_2)=\frac{24}{81}=\frac{8}{27}$.

所以 ξ 的分布列是

ξ	0	3	4
P	$\frac{17}{81}$	$\frac{40}{81}$	$\frac{8}{27}$

$E(\xi)=0\times\frac{17}{81}+3\times\frac{40}{81}+4\times\frac{8}{27}=\frac{8}{3}$.

三、基础检验查漏

1.B ［对于 A,每周的自习时间不小于 25 小时的频率为$(0.08+0.04)\times2.5=0.3$,

所以估计这 1 000 名学生每周的自习时间不小于 25 小时的人数是 $0.3\times1\,000=300$,故 A 正确.

对于 B,在频率直方图中,众数即为频率分布直方图中最高矩形的底边中点的横坐标,

故估计这 1 000 名学生每周的自习时间的众数是$(22.5+25)\div2=23.75$,故 B 错误;

对于 C,在频率直方图中,中位数即为把频率分布直方图分成两个面积相等部分的平行于 y 轴的直线横坐标,设中位数为 x,则有 $0.02\times2.5+0.1\times2.5+(x-22.5)\times0.16=0.5$,解得 $x=23.75$,

所以估计这 1 000 名学生每周的自习时间的中位数是 23.75,故 C 正确;

对于 D,在频率分布直方图中,平均数即为频率分布直方图各个小矩形的面积乘底边中点的横坐标之和,

所以估计这 1 000 名学生每周的自习时间的平均数是 $0.02\times2.5\times18.75+0.1\times2.5\times21.25+0.16\times2.5\times23.75+0.08\times2.5\times26.25+0.04\times2.5\times28.75=23.875$,故 D 正确.］

2.BCD ［由图(1)可知,2020 年下半年生产资料出厂价格环比涨幅先下降后上升,故 A 错误;

由图(2)中的环比折线可知:

生活资料出厂价格的环比涨跌幅后一个月与前一个月的差介于$-0.2\%\sim0.4\%$之间,

因为 2021 年 1 月环比的涨幅为 0.2%,

所以在市场平稳的前提下,2021 年 2 月生活资料出厂价格的环比可能为正数,故 B 正确;

结合图象易知,2020 年 1 月～12 月生活资料出厂价格同比的数据中有 8 个正数、4 个负数,则随机抽取 3 个恰有 2 个是正数的概率 $P=\frac{C_8^2C_4^1}{C_{12}^3}=\frac{28}{55}$,故 C 正确;

将 2020 年 1 月～2021 年 1 月生产资料出厂价格的环比涨跌幅从小到大排列,依次为:

-1.8%、-1.2%、-0.7%、-0.5%、0.0%、0.1%、0.2%、0.4%、0.5%、0.5%、0.7%、1.2%、1.4%,则中位数为 0.2%,故 D 正确.］

3.B ［由题意,样本(4,3)处的残差为-0.15,所以 $3.15=0.7\times4+\hat{a}$,所以 $\hat{a}=0.35$,由回归方程 $\hat{y}=0.7x+\hat{a}$ 过样本的中心点$(\overline{x},\overline{y})$,且$\overline{x}=\frac{1}{4}\times(3+4+5+6)=4.5$,所以可得$\overline{y}=0.7\,\overline{x}+\hat{a}=0.7\times4.5+0.35=3.5$,由$\overline{y}=\frac{1}{4}\times(2.5+3+4+m)=3.5$,得 $m=4.5$.］

4.C ［由 2×2 列联表中的数据可得 $K^2=\frac{(35\times25-15\times25)^2\times100}{60\times40\times50\times50}\approx4.167>3.841$,

因此,有 95%的把握认为该市居民是否关注冰雪运动与性别有关.］

5.C ［$\left(2x-\frac{1}{x}\right)^6$ 展开式通项为 $T_{r+1}=C_6^r(2x)^{6-r}\left(-\frac{1}{x}\right)^r=(-1)^r\cdot2^{6-r}C_6^rx^{6-2r}$,

令 $6-2r=-2$,解得 $r=4$;令 $6-2r=0$,解得 $r=3$,

$\therefore(x^2+1)\left(2x-\frac{1}{x}\right)^6$ 展开式中的常数项为 $4C_6^4-8C_6^3=60-160=-100$.］

6.B ［由题可知,选取的 4 个名称中含有赤兔,则从中选取 4 个名称共有 C_9^3 种不同的组合.选出的 4 个名称的不同分析顺序有 A_4^4 种,其中赤兔是第一个被分析的顺序有 A_3^3 种,故赤兔不是第一个被分析的情况共有 $C_9^3\cdot(A_4^4-A_3^3)=1\,512$(种).］

7.C ［从 1,2,3,4,5 这 5 个数中,选出三个不同的数字组成一个三位数,共有 $A_5^3=60$ 个三位数,若这个三位数是 3 的倍数,则必须是由 1,2,3 或 1,3,5 或 2,3,4 或 3,4,5 组成的三位数,这一共可组成 $4A_3^3=24$,所以这个三位数是 3 的倍数的概率为 $P=\frac{4A_3^3}{A_5^3}=\frac{24}{60}=\frac{2}{5}$.］

8.B ［因为数学成绩 $\xi\sim N(110,\sigma^2)$,所以由 $P(100\leqslant\xi\leqslant110)=0.35$ 可得 $P(110\leqslant\xi\leqslant120)=0.35$,所以该班学生数学成绩在 120 分以上的概率为 $P(\xi>120)=\frac{1}{2}\times(1-0.35-0.35)=0.15$,

所以估计该班学生数学成绩在 120 分以上的人数为 $0.15\times60=9$(人).］

9.**解**

游客人数	35	36	37	38	39	40
次数统计	1	1	1	3	2	2
频率	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{3}{10}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{5}$

(注:上述表格不一定要出现,只要在解题中说明各种人数出现次数就可以)

(1)设这 3 个团队人数不全相同为事件 A,$P(A)=1-P(\overline{A})=1-\frac{C_3^3}{C_{10}^3}=1-\frac{1}{120}=\frac{119}{120}$,

故这 3 个团队人数不全相同的概率是$\frac{119}{120}$.

(2)X 的可能取值为 70,72,74,76,78,80.

X 的分布列为

X	70	72	74	76	78	80
P	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{3}{10}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{5}$

$E(X)=70\times\frac{1}{10}+72\times\frac{1}{10}+74\times\frac{1}{10}+76\times\frac{3}{10}+78\times\frac{1}{5}+80\times\frac{1}{5}=76$(万元).

10.**解** (1)由已知数据可求$\overline{t}=\frac{1+2+3+4+5}{5}=3$,

$\overline{y}=\frac{1.01+1.10+1.21+1.33+1.40}{5}=1.21$,$\sum\limits_{i=1}^{5}t_i^2=1^2+2^2+3^2+4^2+5^2=55$,

$\sum\limits_{i=1}^{5}t_iy_i=1\times1.01+2\times1.10+3\times1.21+4\times1.33+5\times1.40=19.16$,

$\therefore\hat{b}=\frac{19.16-5\times3\times1.21}{55-5\times3^2}=\frac{1.01}{10}=0.101$,

$\therefore\hat{a}=1.21-0.101\times3=0.907$,

$\therefore$所求回归方程为 $\hat{y}=0.101t+0.907$.

当 $t=6$ 时,$\hat{y}=0.101\times6+0.907=1.513$(万元),

$\therefore$2021 年该地区农村居民人均消费支出约为 1.513 万元.

(2)已知 2021 年该地区农村居民平均消费支出预测为 1.513 万元,由图 2 可知,2020 年该地区农村居民食品类支出为 4 451 元,则预测 2021 年该地区食品类支出为 $4\,451\times(1+3\%)=4\,584.53$(元),

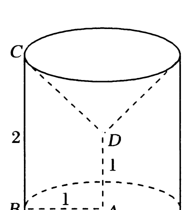
$\therefore$恩格尔系数$=\frac{4\,584.53}{15\,130}\times100\%\approx30.3\%\in(30\%,40\%)$,

所以 2021 年底该地区农村居民生活水平能达到富裕生活标准.

回顾 6　空间向量与立体几何

二、易错易混清零

【例 1】 A ［因为在梯形 $ABCD$ 中,$\angle ABC=\frac{\pi}{2}$,$AD\parallel BC$,$BC=2AD=2AB=2$,所以将梯形 $ABCD$ 绕 AD 所在的直线旋转一周而形成的曲面所围成的几何体是一个底面半径 $AB=1$,高 $BC=2$ 的圆柱挖去一个底面半径为 $AB=1$,高为 $BC-AD=2-1=1$ 的圆锥,所以该几何体的表面积 $S=\pi\times1^2+2\pi\times1\times2+\pi\times1\times\sqrt{1^2+1^2}=(5+\sqrt{2})\pi$.故选 A.］

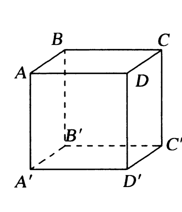


【例 2】 ②④⑤ ［①错误.如正方体中平面 $ABB'A'\perp$平面 $ADD'A'$,交线为 AA'.

直线 $AC\perp AA'$,但 AC 不垂直平面 $ABB'A'$,同时 AC 也不垂直平面 $ADD'A'$;

②正确.实质上是两平面平行的性质定理.

③错误.在如图所示的正方体中,$A'C$ 不垂直于平面 $A'B'C'D'$,但与 $B'D'$ 垂直.这样 $A'C$ 就垂直于平面 $A'B'C'D'$内与直线 $B'D'$平行的无数条直线.



④正确.利用线面平行的判定定理即可.

⑤正确.如正方体中 $AA'\subset$平面 $AA'D'D$,而 $CD\perp$平面 $AA'D'D$,且 AA'与 CD 异面.］

【例3】 ①③ ［①中，易知 A，C 到平面 $BFDE$ 的距离相等，AC∥平面 $BFDE$ 正确；
②中，当平面 ABE∥平面 CDF 时，AE 与 CD 异面，AE∥CD 不正确；
③中，在三棱锥 $P-DEF$ 中，$DE=5\sqrt{2}$，$EF=10$，$DF=\sqrt{DC^2+CF^2}=\sqrt{150}$.
即 $DE^2+EF^2=DF^2$，$\triangle DEF$ 为直角三角形.
同理，$\triangle DPF$ 为直角三角形，且 DF 为公共斜边，
故 DF 即为外接球直径，其半径 $R=\dfrac{DF}{2}=\dfrac{\sqrt{150}}{2}$.
故球的表面积 $S=4\pi R^2=150\pi$.正确.］

【例4】 $\dfrac{\pi}{3}$ ［由 $\angle ABC=\angle DCB=\dfrac{\pi}{2}$ 知，$\overrightarrow{BA}$ 与 $\overrightarrow{CD}$ 的夹角 θ 就是二面角 $A-BC-D$ 的平面角.
又 $\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CD}$，所以 $\overrightarrow{AD}^2=(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CD})^2=\overrightarrow{AB}^2+\overrightarrow{BC}^2+\overrightarrow{CD}^2+2\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CD}$.
因此 $2\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CD}=(2\sqrt{3})^2-1^2-3^2-2^2=-2$，所以 $\cos(\pi-\theta)=-\dfrac{1}{2}$，且 $0<\pi-\theta<\pi$，则 $\pi-\theta=\dfrac{2}{3}\pi$，故 $\theta=\dfrac{\pi}{3}$.］

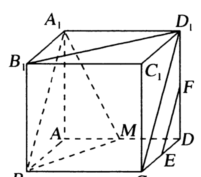
三、基础检验查漏

1.C ［对于A，若 l∥m，$m\subset\alpha$，则 l∥α 或 $l\subset\alpha$，故A错误；
对于B，若 l∥α，$m\subset\alpha$，则 l∥m 或 l，m 异面，故B错误；
对于C，若 $l\perp\alpha$，$m\subset\alpha$，则由线面垂直的性质可得 $l\perp m$，故C正确；
对于D，若 $l\perp m$，$l\perp\alpha$，则 m∥α 或 $m\subset\alpha$，故D错误.］

2.A ［由图可知，组合体的体积为
$V=\pi\times4\times\left[\left(\dfrac{3}{2}\right)^2-1^2\right]+3\times3\times3-\pi\times3\times\left(\dfrac{3}{2}\right)^2=\left(27-\dfrac{7\pi}{4}\right)(\text{cm}^3)$，故选A.］

3.A ［当三点共线时，不能确定平面，故①错误；
由圆锥的母线一定比底面半径大，可得圆锥的侧面展开图是一个圆心角不超过 2π 的扇形，故②错误；
底面是等边三角形，三个侧面都是等腰三角形的三棱锥不一定是正三棱锥，故③错误；
如果两点是球的两个极点，则过两点的大圆有无数个，故④错误.］

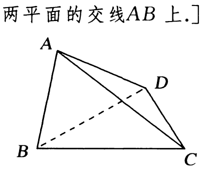
4.B ［连接 CD_1，BA_1，在正方体中，CD_1∥BA_1，由 E，F 分别为 CD，DD_1 的中点，则 CD_1∥EF，所以 EF∥BA_1，所以 $\angle BA_1M$（或其补角）为异面直线 A_1M 与 EF 所成角，设正方体的棱长为2，则 $A_1B=2\sqrt{2}$，$A_1M=\sqrt{AA_1^2+AM^2}=\sqrt{5}$，$BM=\sqrt{AB^2+AM^2}=\sqrt{5}$，
所以在 $\triangle A_1BM$ 中，$\cos\angle MA_1B=\dfrac{A_1B^2+A_1M^2-BM^2}{2\times A_1B\times A_1M}=\dfrac{8}{2\times2\sqrt{2}\times\sqrt{5}}=\dfrac{\sqrt{10}}{5}$.］



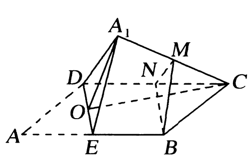
5.D ［$m\perp l$，$n\perp l$ 时，m，n 可以相交、平行或异面，A错；
$l\perp\alpha$，$l\perp n$ 时，n∥α 或 $n\subset\alpha$，B错；
$\alpha\perp\gamma$，$\beta\perp\gamma$ 时，α 与 β 可以相交、平行，C错；
$m\perp\alpha$，$m\perp\beta$，则 α∥β，D正确.］

6.A ［∵$\angle BAC=90°$，∴$AC\perp AB$；又 $AC\perp BC_1$，且 $AB\cap BC_1=B$，AB，$BC_1\subset$平面 ABC_1，∴$AC\perp$平面 ABC_1；又 $AC\subset$平面 ABC，∴平面 $ABC_1\perp$平面 ABC，
∴C_1 在平面 ABC 上的射影 H 必在两平面的交线 AB 上.又 $P\in AC_1$，所以点 P 在底面 ABC 上的射影 H 必在两平面的交线 AB 上.］

7.D ［由题意知，在四边形 $ABCD$ 中，$CD\perp BD$.在三棱锥 $A-BCD$ 中，平面 $ABD\perp$平面 BCD，两平面的交线为 BD，所以 $CD\perp$平面 ABD，因此有 $AB\perp CD$.
又因为 $AB\perp AD$，$AD\cap DC=D$，AD，$DC\subset$平面 ADC，所以 $AB\perp$平面 ADC，
于是得到平面 $ADC\perp$平面 ABC.］

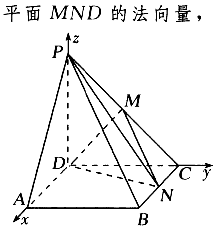


8.ABC ［由题意可知，$\triangle ADE$ 是等腰直角三角形，当平面 $A_1DE\perp$平面 $BCDE$ 时，点 A_1 到平面 $BCDE$ 的距离最大.过点 A_1 作 DE 的垂线，垂足为点 O，此时 A_1O 即为点 A_1 到平面 $BCDE$ 的距离.由已知，得 $A_1O=\dfrac{1\times1}{\sqrt{2}}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$，



$S_{四边形BCDE}=2\times1-\dfrac{1}{2}\times1\times1=\dfrac{3}{2}$，∴$V_{A_1-BCDE}=\dfrac{1}{3}S_{四边形BCDE}\cdot A_1O=\dfrac{1}{3}\times\dfrac{3}{2}\times\dfrac{\sqrt{2}}{2}=\dfrac{\sqrt{2}}{4}$，∴A正确.取 CD 的中点 N，连接 MN，BN，如图，∵点 M 是 A_1C 的中点，∴MN∥A_1D.又 $MN\not\subset$平面 A_1DE，$A_1D\subset$平面 A_1DE，∴MN∥平面 A_1DE.∵$BE\mathrel{\underline{\parallel}}DN$，∴四边形 $BEDN$ 为平行四边形，∴BN∥DE.同理可得 BN∥平面 A_1DE.∵$BN\cap MN=N$，∴平面 BMN∥平面 A_1DE，∴MB∥平面 A_1DE，∴C正确.由上述知，$\angle MNB=\angle A_1DE=45°$，$BN=DE=\sqrt{2}$，$MN=\dfrac{1}{2}A_1D=\dfrac{1}{2}$，
∴$BM=\sqrt{(\sqrt{2})^2+\left(\dfrac{1}{2}\right)^2-2\times\sqrt{2}\times\dfrac{1}{2}\times\cos45°}=\dfrac{\sqrt{5}}{2}$，为定值，
∴B正确.假设存在某个位置，使 $DE\perp A_1C$.取 DE 的中点 O，连接 A_1O，CO，如图，∵$A_1O\perp DE$，$A_1C\perp DE$，$A_1O\cap A_1C=A_1$，A_1O，$A_1C\subset$平面 A_1OC，∴$DE\perp$平面 A_1OC，∴$DE\perp OC$，∴$CE=CD$.由题意可知，$CE=\sqrt{2}$，$CD=2$，∴$CE\neq CD$，与已知矛盾，∴结论不成立，∴D错误.故选ABC.］

9.(1)**证明** ∵$PD\perp$平面 $ABCD$，$BC\subset$平面 $ABCD$，∴$BC\perp PD$，
又 $BC\perp DC$，$PD\cap DC=D$，PD、$DC\subset$平面 PDC，∴$BC\perp$平面 PDC，
又 $MD\subset$平面 PDC，∴$MD\perp BC$，Rt$\triangle PDC$ 中，$PD\perp DC$，$PD=DC$，M 为 PC 的中点，
∴$MD\perp PC$，∵$PC\cap BC=C$，PC、$BC\subset$平面 PBC，∴$MD\perp$平面 PBC，∵$PN\subset$平面 PBC，∴$MD\perp PN$.
(2)**解** 以 D 为原点，DA、DC、DP 分别为 x，y，z 轴建立空间直角坐标系 $D-xyz$，易得 $D(0,0,0)$，$A(2,0,0)$，$P(0,0,2)$，$C(0,2,0)$，$M(0,1,1)$，$B(2,2,0)$，$N(1,2,0)$，则 $\overrightarrow{DM}=(0,1,1)$，$\overrightarrow{DN}=(1,2,0)$，设 $\boldsymbol{n}=(x,y,z)$ 为平面 MND 的法向量，



则 $\begin{cases}\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{DM}=0,\\ \boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{DN}=0,\end{cases}$ ∴ $\begin{cases}(x,y,z)\cdot(0,1,1)=0,\\ (x,y,z)\cdot(1,2,0)=0,\end{cases}$ ∴ $\begin{cases}y+z=0,\\ x+2y=0,\end{cases}$
令 $x=2$，则 $y=-1$，$z=1$，故 $\boldsymbol{n}=(2,-1,1)$，$\overrightarrow{AP}=(-2,0,2)$，
记直线 PA 与平面 MND 所成角为 θ，则 $\sin\theta=|\cos\langle\boldsymbol{n},\overrightarrow{AP}\rangle|=\dfrac{|\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{AP}|}{|\boldsymbol{n}|\cdot|\overrightarrow{AP}|}=\dfrac{\sqrt{3}}{6}$.

10.**解** (1)如图1，取 BC 的中点 D，B_1C_1 的中点 D_1，连接 AD，A_1D_1，DD_1，
根据棱柱的性质可得，$DD_1\mathrel{\underline{\parallel}}BB_1$，$AA_1\mathrel{\underline{\parallel}}BB_1$，所以 $AA_1\mathrel{\underline{\parallel}}DD_1$，
所以四边形 ADD_1A_1 是平行四边形，所以 $O_1O_2\subset$平面 ADD_1A_1.
因为 O_1O_2 与 DD_1 相交，所以 O_1O_2 与 AA_1 相交.

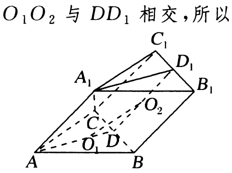


图 1

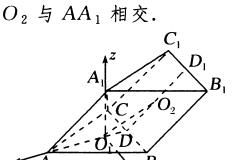


图 2

(2)连接 A_1O_1，因为四面体 A_1ABC 是正四面体，O_1 是 $\triangle ABC$ 的中心，所以 $A_1O_1\perp$平面 ABC，又 $BC\subset$平面 ABC，所以 $AO_1\perp BC$.
所以以 O_1 为坐标原点，$\overrightarrow{O_1A}$，$\overrightarrow{O_1A_1}$ 方向分别为 x 轴，z 轴正方向，$|AB|$ 为单位长度，建立空间直角坐标系 O_1-xyz，如图2所示.
易得 $A\left(\dfrac{\sqrt{3}}{3},0,0\right)$，$B\left(-\dfrac{\sqrt{3}}{6},\dfrac{1}{2},0\right)$，$C\left(-\dfrac{\sqrt{3}}{6},-\dfrac{1}{2},0\right)$，
$A_1\left(0,0,\dfrac{\sqrt{6}}{3}\right)$，$B_1\left(-\dfrac{\sqrt{3}}{2},\dfrac{1}{2},\dfrac{\sqrt{6}}{3}\right)$，$C_1\left(-\dfrac{\sqrt{3}}{2},-\dfrac{1}{2},\dfrac{\sqrt{6}}{3}\right)$，
$O_2\left(-\dfrac{\sqrt{3}}{3},0,\dfrac{\sqrt{6}}{6}\right)$.
所以 $\overrightarrow{A_1O_2}=\left(-\dfrac{\sqrt{3}}{3},0,-\dfrac{\sqrt{6}}{6}\right)$，$\overrightarrow{BC}=(0,-1,0)$，$\overrightarrow{BB_1}=\left(-\dfrac{\sqrt{3}}{3},0,\dfrac{\sqrt{6}}{3}\right)$，
所以 $\overrightarrow{A_1O_2}\cdot\overrightarrow{BC}=0$，$\overrightarrow{A_1O_2}\cdot\overrightarrow{BB_1}=0$，故 $\overrightarrow{A_1O_2}$ 是平面 BCC_1B_1 的法向量.

又$\overrightarrow{A_1O_1}$是平面 ABC 的法向量，且$\overrightarrow{A_1O_1}=\left(0,0,-\frac{\sqrt{6}}{3}\right)$，

设平面 BCC_1B_1 与平面 ABC 所成的锐二面角为 θ，

则 $\cos\theta=\left|\frac{\overrightarrow{A_1O_2}\cdot\overrightarrow{A_1O_1}}{|\overrightarrow{A_1O_2}|\,|\overrightarrow{A_1O_1}|}\right|$

$=\frac{\frac{\sqrt{6}}{6}\times\frac{\sqrt{6}}{3}}{\sqrt{\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{6}}{6}\right)^2}\times\frac{\sqrt{6}}{3}}=\frac{\sqrt{3}}{3}$.

所以平面 BCC_1B_1 与平面 ABC 所成锐二面角的余弦值为$\frac{\sqrt{3}}{3}$.

回顾 7　解析几何

二、易错易混清零

【例 1】 $\left[0,\frac{\pi}{6}\right]\cup\left[\frac{5\pi}{6},\pi\right)$　[$\tan\alpha=k=-\frac{\cos\theta}{\sqrt{3}}$，知$-\frac{\sqrt{3}}{3}\leqslant k\leqslant\frac{\sqrt{3}}{3}$，所以 $0\leqslant\alpha\leqslant\frac{\pi}{6}$ 或$\frac{5\pi}{6}\leqslant\alpha<\pi$.]

【例 2】 $x+3y-10=0$ 或 $x-2y=0$　[当截距为 0 时，设直线方程为 $y=kx$，则 $4k=2$，

$\therefore k=\frac{1}{2}$，$\therefore$ 直线方程为 $x-2y=0$.

当截距不为 0 时，设直线方程为$\frac{x}{3a}+\frac{y}{a}=1$，

由题意得$\frac{4}{3a}+\frac{2}{a}=1$，$\therefore a=\frac{10}{3}$.$\therefore x+3y-10=0$.

综上，直线 l 的一般式方程为 $x+3y-10=0$ 或 $x-2y=0$.]

【例 3】 C　[当 $a=1$ 时，显然两条直线不平行，当 $a\neq1$ 时，由$\frac{a}{3}=\frac{2}{a-1}$，得 $a=3$ 或 $a=-2$，

当 $a=-2$ 时，$\frac{a}{3}=\frac{2}{a-1}=\frac{3a}{7-a}$，两条直线重合.

所以 $a=3$ 是直线 $ax+2y+3a=0$ 和 $3x+(a-1)y=a-7$ 平行的充要条件.]

【例 4】 (1)$x+2y-5=0$　(2)内切　[(1)以原点 O 为圆心的圆过点 $P(1,2)$，所以圆的方程为 $x^2+y^2=5$.

因为 $k_{OP}=2$，所以切线的斜率 $k=-\frac{1}{2}$.

所以切线方程为 $y-2=-\frac{1}{2}(x-1)$，即 $x+2y-5=0$.

(2)设线段 PF_1 的中点为 P_0，双曲线的右焦点为 F_2，

则$|OP_0|=\frac{1}{2}|PF_2|$，

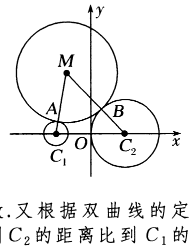
由双曲线定义，知$|PF_1|-|PF_2|=2a$，所以$|OP_0|=\frac{1}{2}|PF_1|-a=R-r$，因此两圆内切.]

【例 5】 $\frac{x^2}{16}-\frac{y^2}{9}=1$　[因为 $e=\frac{c}{a}=\frac{5}{4}$，$F_2(5,0)$.

所以 $c=5$，$a=4$，$b^2=c^2-a^2=9$，

所以双曲线 C 的标准方程为$\frac{x^2}{16}-\frac{y^2}{9}=1$.]

【例 6】 $x^2-\frac{y^2}{8}=1(x\leqslant-1)$　[设动圆 M 与圆 C_1 及圆 C_2 分别外切于点 A 和点 B.



根据两圆外切的条件，得$|MC_1|-|AC_1|=|MA|$，$|MC_2|-|BC_2|=|MB|$.

因为$|MA|=|MB|$，所以$|MC_1|-|AC_1|=|MC_2|-|BC_2|$，

即$|MC_2|-|MC_1|=|BC_2|-|AC_1|=2$，

所以点 M 到两定点 C_1，C_2 的距离的差是常数.又根据双曲线的定义，得动点 M 的轨迹为双曲线的左支(点 M 到 C_2 的距离比到 C_1 的距离大)，其中 $a=1$，$c=3$，则 $b^2=8$，故点 M 的轨迹方程为 $x^2-\frac{y^2}{8}=1(x\leqslant-1)$.]

【例 7】 1 或 16　[当焦点在 x 轴上，则 $a=2$，$c=\sqrt{4-m}$，所以$\frac{\sqrt{4-m}}{2}=\frac{\sqrt{3}}{2}$，则 $m=1$.

当焦点在 y 轴上，则 $a=\sqrt{m}$，$c=\sqrt{m-4}$，所以$\frac{\sqrt{m-4}}{\sqrt{m}}=\frac{\sqrt{3}}{2}$，则 $m=16$.]

【例 8】 (1)**解**　依题意可设圆 O 的方程为 $x^2+y^2=b^2$，因为圆 O 与直线 $x-y+\sqrt{2}=0$ 相切，所以 $b=\frac{|\sqrt{2}|}{\sqrt{1^2+(-1)^2}}=1$，

所以 $a^2-c^2=1$.又$\frac{c}{a}=\frac{\sqrt{2}}{2}$，所以 $a=\sqrt{2}$，

所以椭圆 C 的方程为$\frac{x^2}{2}+y^2=1$.

(2)**证明**　依题意可知直线 l 的斜率存在，设直线 l 的方程为 $y=k(x-2)$.

由$\begin{cases}y=k(x-2),\\ \frac{x^2}{2}+y^2=1,\end{cases}$ 得$(1+2k^2)x^2-8k^2x+8k^2-2=0$.

因为直线 l 与椭圆有两个交点，所以 $\Delta>0$，即 $2k^2-1<0$.

设 $A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$，

则 $x_1+x_2=\frac{8k^2}{1+2k^2}$，$x_1x_2=\frac{8k^2-2}{1+2k^2}$.

直线 AF，BF 的斜率分别为 k_1，k_2，

因为 $F(1,0)$，所以 $k_1+k_2=\frac{y_1}{x_1-1}+\frac{y_2}{x_2-1}=\frac{k(x_1-2)}{x_1-1}+\frac{k(x_2-2)}{x_2-1}=2k-k\left(\frac{1}{x_1-1}+\frac{1}{x_2-1}\right)$

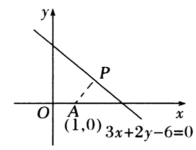
$=2k-\frac{(x_1+x_2-2)\cdot k}{x_1x_2-(x_1+x_2)+1}=2k-\frac{(4k^2-2)\cdot k}{2k^2-1}=0$，所以$\angle PFM=\angle PFB$.

三、基础检验查漏

1.A　[$(m-1)^2+n^2$ 表示点 $P(m,n)$ 到点 $A(1,0)$ 距离的平方，

该距离的最小值为点 $A(1,0)$ 到直线 l 的距离，

即$\frac{|3-6|}{\sqrt{13}}=\frac{3}{\sqrt{13}}$，



则$(m-1)^2+n^2$ 的最小值为$\frac{9}{13}$.]

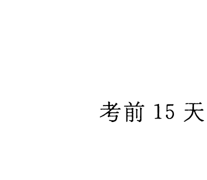
2.D　[过点 A 且斜率为$-\frac{3}{4}$的直线方程为 $y-\frac{3}{2}=-\frac{3}{4}(x+1)$，由椭圆 C 的标准方程知其焦点在 x 轴上，令 $y=0$，解得 $x=1$，可得椭圆的右焦点为 $F(1,0)$，则 $c=1$，又 $A\left(-1,\frac{3}{2}\right)$在椭圆 C 上，则$\frac{1}{a^2}+\frac{9}{4b^2}=1$，又 $a^2=b^2+1$，从而有 $4b^4-9b^2-9=0$，解得 $b^2=3$ 或 $b^2=-\frac{3}{4}$(舍去)，则 $a^2=4$，所以椭圆 C 的方程为$\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1$.]

3.D　[一条渐近线方程为 $bx-ay=0$，圆的标准方程为$(x-2)^2+y^2=4$，圆心是$(2,0)$，半径是 2，圆心到渐近线的距离为 $d=\frac{2b}{\sqrt{b^2+a^2}}=\frac{2b}{c}$，所以$\left(\frac{2b}{c}\right)^2+\left(\frac{8}{5}\right)^2=2^2$，$\frac{b^2}{c^2}=\frac{9}{25}$，即$\frac{c^2-a^2}{c^2}=\frac{9}{25}$，所以 $e=\frac{c}{a}=\frac{5}{4}$.]

4.D　[设双曲线的半焦距为 c，由$\begin{cases}x=c,\\ \frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1\end{cases}$得到 $A\left(c,\frac{b^2}{a}\right)$，由$\begin{cases}y=\frac{b}{a}x,\\ x=c\end{cases}$得到 $B\left(c,\frac{bc}{a}\right)$，而 $F(c,0)$，$\overrightarrow{OF}=2\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OB}\Leftrightarrow\overrightarrow{OA}=\frac{\overrightarrow{OF}+\overrightarrow{OB}}{2}$，即点 A 是线段 FB 的中点，所以$\frac{bc}{a}=\frac{2b^2}{a}$，$c=2b$，所以 $e=\frac{c}{a}=\frac{2b}{\sqrt{c^2-b^2}}=\frac{2\sqrt{3}}{3}$.]

5.A　[如图所示，抛物线 C：$y^2=4x$ 的焦点坐标为 $F(1,0)$，过 C 上一点 M 作其准线的垂线，垂足为 N，若$\angle NMF=120°$，可得$|MF|=|MN|$，$\angle NFO=\angle FNM=30°$，

又由$|DF|=2$，所以$|NF|=\frac{4\sqrt{3}}{3}$，在等腰$\triangle MNF$ 中，可得$|MF|=\frac{4}{3}$，设 $M(x_0,y_0)$，



根据抛物线的定义，可得$|MF|=x_0+1=\frac{4}{3}$，解得 $x_0=\frac{1}{3}$，即点 M 的横坐标为$\frac{1}{3}$.]

6.A [由 $y=\frac{2x+2}{x-1}=2+\frac{4}{x-1}$,可知此双曲线是由双曲线 $y=\frac{4}{x}$ 平移得来的,对称中心为(1,2),双曲线 $y=\frac{4}{x}$ 绕原点顺时针转动 45°,就会得到双曲线 $x^2-y^2=8$,所以焦距为 8,所以所求圆的标准方程为 $(x-1)^2+(y-2)^2=16$.]

7.B [若 $kxy-x+6y-3=0$ 表示两条直线,则其左边一定可以表示为两个一次式的乘积,又因缺少 x^2,y^2 项,则可设 $kxy-x+6y-3=(ax+b)(cy+d)$,

即 $kxy-x+6y-3=acxy+adx+bcy+bd$,则 $\begin{cases}k=ac,\\ad=-1,\\bc=6,\\bd=-3,\end{cases}$ 解得 $k=2$.]

8.ACD [$(3+m)x+4y-3+3m=0$ 可化为 $3x+4y-3+m(x+3)=0$,

由 $\begin{cases}3x+4y-3=0,\\x+3=0\end{cases}$ 可得 $\begin{cases}x=-3,\\y=3,\end{cases}$

故直线 l 恒过定点 $(-3,3)$,故 A 正确.

当 $m=0$ 时,直线 $l:3x+4y-3=0$,圆心 C 到该直线的距离 $d=\frac{|0+0-3|}{5}=\frac{3}{5}$,且圆 C 的半径 $R=2$,

所以 $R-d=\frac{7}{5}>1$,故圆 C 上有且仅有四个点到直线 l 的距离都等于 1,故 B 错误.

因为圆 C 与曲线 $x^2+y^2-6x-8y+m=0$ 恰有三条公切线,所以两圆外切,

所以两圆圆心的距离为 $\sqrt{(0-3)^2+(0-4)^2}=5=2+\sqrt{25-m}$,解得 $m=16$,故 C 正确.

当 $m=13$ 时,直线 $l:4x+y+9=0$,设 $P(a,-4a-9)$,

则以 CP 为直径的圆的方程为 $x(x-a)+y(y+4a+9)=0$,所以直线 AB 的方程为 $-ax+(4a+9)y+4=0$,

整理得 $a(-x+4y)+9y+4=0$,由 $\begin{cases}-x+4y=0,\\9y+4=0\end{cases}$ 可得 $\begin{cases}x=-\frac{16}{9},\\y=-\frac{4}{9},\end{cases}$ 故直线 AB 经过点 $\left(-\frac{16}{9},-\frac{4}{9}\right)$,故 D 正确.故选 ACD.]

9.(1)**解** 类比上述性质知,切线方程为 $\frac{x_0x}{a^2}+\frac{y_0y}{b^2}=1$.

(2)**证明** 设切点为 $A(x_1,y_1)$, $B(x_2,y_2)$,点 $P(3,t)$,

由(1)的结论得 AP 直线方程为 $\frac{x_1x}{6}+y_1y=1$,

BP 直线方程为 $\frac{x_2x}{6}+y_2y=1$,

通过点 $P(3,t)$,$\therefore\begin{cases}\frac{x_1\cdot 3}{6}+y_1\cdot t=1,\\\frac{x_2\cdot 3}{6}+y_2\cdot t=1,\end{cases}$

$\therefore A,B$ 满足方程 $\frac{x}{2}+ty=1$,

$\therefore$ 直线 AB 恒过点 $\begin{cases}\frac{x}{2}-1=0,\\y=0,\end{cases}$ 即直线 AB 恒过点 $(2,0)$.

10.**解** (1)设 $P(x_P,6)$,则 $x_P=\frac{36}{2p}=\frac{18}{p}$,由 $|PF|=x_P+\frac{p}{2}=10$,

得 $\frac{18}{p}+\frac{p}{2}=10$,解得 $p=2$ 或 18,

$\because 0<p<4$,所以 $p=2$.$\therefore$ 抛物线的标准方程为 $y^2=4x$.

(2)由(1)得 $P(9,6)$,设 $A(x_1,y_1)$,$B(x_2,y_2)$,

由题意可知直线 AP,AB 的斜率存在,设为 k_{AP},k_{AB},

且 $k_{AP}\cdot k_{AB}=\frac{6-y_1}{9-x_1}\times\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}=\frac{6-y_1}{9-\frac{y_1^2}{4}}\times\frac{y_2-y_1}{\frac{y_2^2}{4}-\frac{y_1^2}{4}}=\frac{4}{6+y_1}\times\frac{4}{y_2+y_1}=-1$,整理得 $y_1^2+(6+y_2)y_1+16+6y_2=0$,

由题意知 $\Delta\geqslant 0$,即 $\Delta=(6+y_2)^2-4(16+6y_2)\geqslant 0$,

$\therefore y_2^2-12y_2-28\geqslant 0$,即 $y_2\leqslant -2$ 或 $y_2\geqslant 14$,

又当 $y_2=-2$ 时,$y_1^2+4y_1+4=0$,$\therefore y_1=-2$,与题意不符,舍去,

综上所述,点 B 的纵坐标 y_2 的取值范围为 $(-\infty,-2)\cup[14,+\infty)$.

回顾 8 函数与导数

二、易错易混清零

【例 1】 (1)A (2)(0,1] [(1)函数 $y=f(x)$ 的定义域是[0,2],要使函数 $g(x)$ 有意义,可得 $\begin{cases}0\leqslant 2x\leqslant 2,\\x-1\neq 0,\end{cases}$ 解得 $0\leqslant x<1$,故选 A.

(2)略.]

【例 2】 $(4,+\infty)$ [要使函数 $f(x)$ 有意义,则 $x^2-2x-8>0$,解得 $x<-2$ 或 $x>4$,结合二次函数、对数函数的单调性和复合函数同增异减的原则得函数 $f(x)$ 的单调递增区间为 $(4,+\infty)$.]

【例 3】 奇函数 [由 $1-x^2>0$ 且 $|x-2|-2\neq 0$,知 $f(x)$ 的定义域为 $(-1,0)\cup(0,1)$,关于原点对称,

则 $f(x)=\frac{\ln(1-x^2)}{-x}$,又 $f(-x)=\frac{\ln(1-x^2)}{x}=-f(x)$,所以函数 $f(x)$ 为奇函数.]

【例 4】 $(-2,0)\cup(0,2)$ [因为当 $x>0$ 时,$h(x)=\begin{cases}-\frac{x^2}{4},0<x\leqslant 4,\\4-2x,x>4.\end{cases}$ 所以函数 $h(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递减,

因为函数 $h(x)(x\neq 0)$ 为偶函数,且 $h(t)>h(2)$,所以 $h(|t|)>h(2)$,所以 $0<|t|<2$,所以 $\begin{cases}t\neq 0,\\|t|<2,\end{cases}$ 即 $\begin{cases}t\neq 0,\\-2<t<2.\end{cases}$ 解得 $-2<t<0$ 或 $0<t<2$.

综上,所求实数 t 的取值范围为 $(-2,0)\cup(0,2)$.]

【例 5】 $\left[\frac{1}{2},1\right)$ [由题意知 $\begin{cases}1-k>0,\\e^0-k\leqslant(1-k)\times 0+k,\end{cases}$

即 $\begin{cases}k<1,\\k\geqslant\frac{1}{2},\end{cases}$ 所以 $\frac{1}{2}\leqslant k<1$.]

【例 6】 B [在同一平面直角坐标系内作出函数 $y=x^2-2|x|$ 和直线 $y=m$ 的图象(图略),可知当 $m>0$ 或 $m=-1$ 时,直线 $y=m$ 与函数 $y=x^2-2|x|$ 的图象有两个交点,即函数 $f(x)=x^2-2|x|-m$ 有两个零点.故选 B.]

【例 7】 $x-y-3=0$ [由 $f(x)=x^2-3x+2\ln x$,得 $f'(x)=2x-3+\frac{2}{x}$,所以 $f(1)=-2$,$f'(1)=1$,

故 $f(x)$ 在 $x=1$ 处的切线方程为 $y+2=1\times(x-1)$,

即 $x-y-3=0$.]

【例 8】 18 [因为函数 $f(x)=x^3+ax^2+bx+a^2$ 在 $x=1$ 处有极值 10,又 $f'(x)=3x^2+2ax+b$,

所以 $f(1)=10$,且 $f'(1)=0$,即 $\begin{cases}1+a+b+a^2=10,\\3+2a+b=0,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}a=-3,\\b=3\end{cases}$ 或 $\begin{cases}a=4,\\b=-11.\end{cases}$

而当 $\begin{cases}a=-3,\\b=3\end{cases}$ 时,函数 $f(x)$ 在 $x=1$ 处无极值,故舍去.

所以 $f(x)=x^3+4x^2-11x+16$,所以 $f(2)=18$.]

三、基础检验查漏

1.C [对于函数 $f(x)=\frac{\sqrt{-x^2+5x+6}}{x+1}$,有 $\begin{cases}-x^2+5x+6\geqslant 0,\\x+1\neq 0,\end{cases}$ 即 $\begin{cases}x^2-5x-6\leqslant 0,\\x+1\neq 0,\end{cases}$ 解得 $-1<x\leqslant 6$.

因此,函数 $f(x)$ 的定义域为 $(-1,6]$.]

2.D [函数 $f(x)=\begin{cases}\log_2x,x>0,\\4\sin x,x\leqslant 0,\end{cases}$ 则 $f\left(-\frac{5\pi}{4}\right)=4\sin\left(-\frac{5\pi}{4}\right)=-4\sin\left(\pi+\frac{\pi}{4}\right)=4\sin\frac{\pi}{4}=2\sqrt{2}$,

所以 $f\left(f\left(-\frac{5\pi}{4}\right)\right)=f(2\sqrt{2})=\log_2 2\sqrt{2}=\log_2 2^{\frac{3}{2}}=\frac{3}{2}$.]

3.C [对于 A,$x\in\mathbf{R}$,$f(x)=\log_2\frac{(\sqrt{x^2+1}+x)(\sqrt{x^2+1}-x)}{\sqrt{x^2+1}+x}=\log_2\frac{1}{\sqrt{x^2+1}+x}$,因为 $y=\frac{1}{\sqrt{x^2+1}+x}$ 是减函数,$y=\log_2x$ 是增函数,根据复合函数的单调性的判断方法(同增异减),所以 $f(x)$ 是减函数,故 A 错误;

对于 B,$x\in\mathbf{R}$,由 $y=\sin x$ 的性质可得 $y=\sin x$ 在 $x\in\mathbf{R}$ 上不具备单调性,故 B 错误;

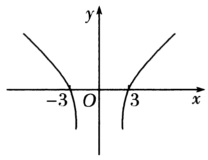
对于 C,$x\in\mathbf{R}$,因为 $y=2^x$ 与 $y=-2^{-x}$ 都是增函数,所以 $y=2^x-2^{-x}$ 是增函数,

$f(-x)=2^{-x}-2^x=-f(x)$,所以 $f(x)$ 是奇函数,故 C 正确;

对于 D,$x\in\mathbf{R}$,$f(-x)=|-x-1|\neq -f(x)$,故 D 错误.]

4.D [因为定义在 $\mathbf{R}$ 上的偶函数 $f(x)$ 满足在 $(0,+\infty)$ 内单调递增,所以 $f(x)$ 满足在 $(-\infty,0)$ 内单调递减,又 $f(3)=0$,所以 $f(-3)=$

$f(3)=0$.作出函数 $f(x)$ 的示意图如下：



由 $\dfrac{f(x+2)+f(-x-2)}{x}>0$，得 $\dfrac{f(x+2)+f[-(x+2)]}{x}>0$，得 $\dfrac{2f(x+2)}{x}>0$，

所以 $\begin{cases}x>0,\\f(x+2)>0,\end{cases}$ 或 $\begin{cases}x<0,\\f(x+2)<0,\end{cases}$ 所以 $\begin{cases}x>0,\\x+2>3,\end{cases}$ 或 $\begin{cases}x<0,\\-3<x+2<3,\end{cases}$

解得 $x>1$ 或 $-5<x<0$，即不等式 $\dfrac{f(x+2)+f(-x-2)}{x}>0$ 的解集为 $(-5,0)\cup(1,+\infty)$.]

5.B ［$f(x)=\cos x\cdot\ln(\sqrt{x^2+1}+x)$，$f(-x)=\cos(-x)\cdot\ln(\sqrt{x^2+1}-x)=-\cos x\cdot\ln(\sqrt{x^2+1}+x)=-f(x)$，函数为奇函数，

排除 C、D.当 $x\in\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$ 时，$\cos x>0$，$\ln(\sqrt{x^2+1}+x)>\ln 1=0$，故 $f(x)>0$，排除 A，故选 B.]

6.ABD ［由函数 $f(x)=2^{-x}-2^x$，得 $f(0)=2^0-2^0=0$，故 A 项正确；因为 $f(-x)=2^x-2^{-x}=-f(x)$，所以函数 $f(x)$ 是奇函数，故 B 项正确；函数 $f(x)=2^{-x}-2^x=\dfrac{1}{2^x}-2^x$ 在 **R** 上是减函数，故 C 项错误；因为 x 趋于 $-\infty$ 时，$f(x)$ 趋于 $+\infty$，x 趋于 $+\infty$ 时，$f(x)$ 趋于 $-\infty$，所以 $f(x)$ 的值域是 $(-\infty,+\infty)$，又 $f(x)$ 是 **R** 上的减函数，因此对任意实数 a，$f(x)=a$ 都有唯一解，故 D 项正确.故选 ABD.]

7.D ［$c=\log_{\frac{1}{3}}\dfrac{1}{6}=\log_3 6$，因为函数 $y=\log_3 x$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增，所以 $\log_3 3=1<a=\log_3 5<\log_3 6=\log_{\frac{1}{3}}\dfrac{1}{6}=c$，

因为函数 $y=\left(\dfrac{1}{2}\right)^x$ 在 **R** 上单调递减，所以 $b=\left(\dfrac{1}{2}\right)^{\frac{1}{3}}<\left(\dfrac{1}{2}\right)^0=1$，所以 $c>a>b$.]

8.B ［由 e^x 为增函数，x^3 为增函数，故 $f(x)=e^x+x^3-9$ 为增函数，由 $f(1)=e-8<0$，$f(2)=e^2-1>0$，根据零点存在性定理可得 $\exists x_0\in(1,2)$ 使得 $f(x_0)=0$，故选 B.]

9.(1)**解** $f'(x)=ae^x-4$，

当 $a\leqslant 0$ 时，$f'(x)<0$，$f(x)$ 在 **R** 上单调递减；

当 $a>0$ 时，令 $f'(x)<0$，可得 $x<\ln\dfrac{4}{a}$，令 $f'(x)>0$，

可得 $x>\ln\dfrac{4}{a}$，

所以 $f(x)$ 在 $\left(-\infty,\ln\dfrac{4}{a}\right)$ 上单调递减，在 $\left(\ln\dfrac{4}{a},+\infty\right)$ 上单调递增.

综上所述：当 $a\leqslant 0$ 时，$f(x)$ 的减区间为 $(-\infty,+\infty)$；

当 $a>0$ 时，$f(x)$ 的增区间为 $\left(\ln\dfrac{4}{a},+\infty\right)$，减区间为 $\left(-\infty,\ln\dfrac{4}{a}\right)$.

(2)**证明** 当 $a=1$ 时，$f(x)=e^x-4x$，令 $g(x)=f(x)+x^2+1=e^x-4x+x^2+1$，

$g'(x)=e^x-4+2x$，令 $h(x)=e^x-4+2x$，因为 $h'(x)=e^x+2>0$ 恒成立，

所以 $g'(x)$ 在 **R** 上单调递增，$g'(0)=-3<0$，$g'(1)=e-2>0$，

由零点存在性定理可得存在 $x_0\in(0,1)$，使得 $g'(x_0)=0$，

即 $e^{x_0}-4+2x_0=0$，

当 $x\in(-\infty,x_0)$ 时，$g'(x)<0$，$g(x)$ 单调递减，当 $x\in(x_0,+\infty)$ 时，$g'(x)>0$，$g(x)$ 单调递增，

所以 $g(x)_{\min}=g(x_0)=e^{x_0}-4x_0+x_0^2+1=4-2x_0-4x_0+x_0^2+1=x_0^2-6x_0+5$，$x_0\in(0,1)$，

由二次函数性质可得 $g(x)_{\min}>g(1)>0$，所以 $g(x)>0$，

即 $f(x)+x^2+1>0$，得证.

10.**解** (1)$f'(x)=-\dfrac{ax^2+2x-1}{x}(x>0)$，由题意得 $f'(x)\geqslant 0$ 在 $x>0$ 时恒成立，

即 $ax^2+2x-1\leqslant 0$ 在 $(0,+\infty)$ 上恒成立，

则 $a\leqslant\dfrac{1-2x}{x^2}=\left(\dfrac{1}{x}-1\right)^2-1$ 在 $(0,+\infty)$ 上恒成立，

即 $a\leqslant\left(\left(\dfrac{1}{x}-1\right)^2-1\right)_{\min}(x>0)$，

当 $x=1$ 时，$\left(\dfrac{1}{x}-1\right)^2-1$ 取最小值 -1，

$\therefore a$ 的取值范围是 $(-\infty,-1]$.

(2)$a=-\dfrac{1}{2}$，$f(x)=-\dfrac{1}{2}x+b$，

$\therefore\dfrac{1}{4}x^2-\dfrac{3}{2}x+\ln x-b=0$.

设 $g(x)=\dfrac{1}{4}x^2-\dfrac{3}{2}x+\ln x-b(x>0)$，

则 $g'(x)=\dfrac{(x-2)(x-1)}{2x}$，列表：

x	$(0,1)$	1	$(1,2)$	2	$(2,4)$
$g'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$g(x)$	↗	极大值	↘	极小值	↗

$\therefore g(x)$ 极小值 $=g(2)=\ln 2-b-2$，

$g(x)$ 极大值 $=g(1)=-b-\dfrac{5}{4}$，又 $g(4)=2\ln 2-b-2$，

$\because$ 方程 $g(x)=0$ 在 $[1,4]$ 上恰有两个不相等的实数根.

则 $\begin{cases}g(1)\geqslant 0,\\g(2)<0,\\g(4)\geqslant 0,\end{cases}$ 即 $\begin{cases}-b-\dfrac{5}{4}\geqslant 0,\\\ln 2-b-2<0,\\2\ln 2-b-2\geqslant 0,\end{cases}$

得 $\ln 2-2<b\leqslant-\dfrac{5}{4}$.

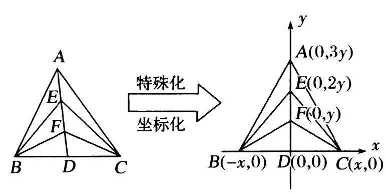
第二步 快准解题

1.选填题解题技法

【例 1】 (1)B (2)$\dfrac{7}{8}$ ［(1)因为 $a>b>c>1$，且 $ac<b^2$，令 $a=16$，$b=8$，$c=2$，则 $\log_c a=4>1>\log_a b$，故 A，C 错；

$\log_c b=3>\log_b a=\dfrac{4}{3}$，故 D 错，B 正确.

(2)所求的问题是个定值问题，“在△ABC 中”和在特殊△ABC 中所求的值相等，所以将所给条件“在△ABC 中”特殊化为“在等腰△ABC 中”.如下图，



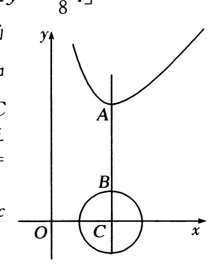
$\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{CA}=(x,3y)\cdot(-x,3y)=-x^2+9y^2=4$；

$\overrightarrow{BF}\cdot\overrightarrow{CF}=(x,y)\cdot(-x,y)=-x^2+y^2=-1$；

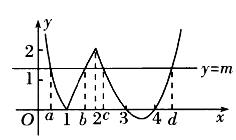
解得 $x^2=\dfrac{13}{8}$，$y^2=\dfrac{5}{8}$.

则 $\overrightarrow{BE}\cdot\overrightarrow{CE}=(x,2y)\cdot(-x,2y)=-x^2+4y^2=\dfrac{7}{8}$.]

【例 2】 (1)A (2)(10,12) ［(1)作出对勾函数 $y=x+\dfrac{4}{x}(x>0)$ 的图象如图，由图象知函数的最低点坐标为 $A(2,4)$，圆心坐标为 $C(2,0)$，半径 $R=1$，则由图象知当 A，B，C 三点共线时，$|AB|$ 最小，此时最小值为 $4-1=3$，故选 A.



(2)作出函数 $f(x)$ 的图象，不妨设 $a<b<c<d$，



则 $-\log_2 a=\log_2 b$，$\therefore ab=1$.

又根据二次函数的对称性，可知 $c+d=7$，

$\therefore cd=c(7-c)=7c-c^2(2<c<3)$，$\therefore 10<cd<12$，

$\therefore abcd$ 的取值范围是 $(10,12)$.]

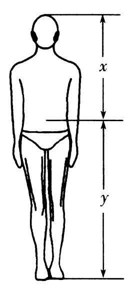
【例 3】 (1)A (2)$(1,+\infty)$ ［(1)$\because 2^x-2^y<3^{-x}-3^{-y}$，

$\therefore 2^x-3^{-x}<2^y-3^{-y}$.

$\because f(t)=2^t-3^{-t}$ 在 $\mathbf{R}$ 上为增函数，且 $f(x)<f(y)$，
$\therefore x<y$，$\therefore y-x>0$，$\therefore y-x+1>1$，
$\therefore \ln(y-x+1)>\ln 1=0$.故选 A.
(2)设 $F(x)=\dfrac{f(x)}{e^x}$，则 $F'(x)=\dfrac{f'(x)-f(x)}{e^x}$.
$\because f'(x)>f(x)$，$\therefore F'(x)>0$，即函数 $F(x)$ 在定义域上单调递增.
$\because e^{x-1}f(x)<f(2x-1)$，$\therefore \dfrac{f(x)}{e^x}<\dfrac{f(2x-1)}{e^{2x-1}}$，
即 $F(x)<F(2x-1)$，
$\therefore x<2x-1$，即 $x>1$，$\therefore$ 不等式 $e^{x-1}f(x)<f(2x-1)$ 的解集为 $(1,+\infty)$.]

【例 4】 (1)A (2)A [(1)令 $f(x)=x\cos x+\sin x$，
所以 $f(-x)=(-x)\cos(-x)+\sin(-x)$
$=-x\cos x-\sin x=-f(x)$，
所以 $f(x)$ 为奇函数，排除 C、D，
又 $f(\pi)=-\pi<0$，排除 B，故选 A.
(2)$f(x)=\sin|x|$ 为偶函数，不是周期函数，可排除 D；$f(x)=\cos|x|=\cos x$ 的周期 2π，可排除 C；$f(x)=|\sin 2x|$ 在 $x=\dfrac{\pi}{4}$ 处取得最大值，所以不可能在 $\left(\dfrac{\pi}{4},\dfrac{\pi}{2}\right)$ 上单调递增，可排除 B，选 A.]

【例 5】 (1)B (2)C [(1)买裤子时，需要知道自己的腿长.由生活经验可知，量腿长一般从脚底量到胯骨.估算裤子的上边缘到肚脐的距离约为 5 cm.
设身高为 h cm，头顶至肚脐的长度为 x cm，肚脐至足底的长度为 y cm，如图，$x=\dfrac{\sqrt{5}-1}{2}y$，则 $h=\left(1+\dfrac{\sqrt{5}-1}{2}\right)y\approx1.618y$，由 $y>105$ 得 $h>169.89$，对照四个选项，结合生活经验，此时可猜答案为 B.



(2)观察此题选项，发现大小差距较大，我们可以直接采用估算法，算出棱锥 $F-ABC$ 的体积的近似值，然后直接选取与近似值最接近的选项.计算完 $S_{\triangle FAB}=\dfrac{1}{2}AB\times FD=\dfrac{3\sqrt{15}}{4}$ 后(D 为 AB 的中点)，我们将棱锥 $C-FAB$ 的高 h 近似认为是 AC，则 $V_{棱锥F-ABC}=V_{棱锥C-FAB}\approx\dfrac{1}{3}S_{\triangle FAB}\times AC=\dfrac{1}{3}\times\dfrac{3\sqrt{15}}{4}\times2=\dfrac{\sqrt{15}}{2}$，再与选项比较，可以发现与选项 C 接近，所以直接选 C.]

【例 6】 (1)D (2)B [(1)对 a 取数字进行验证，$a=0$ 时，A 错误；$a=2$ 时，B 错误；$a=\dfrac{3}{2}$ 时，C 错误，所以选 D.
(2)当 $\sin x=0$，$\cos x=1$ 时，函数值为 4，所以 A、C 错误；把 $x+\pi$ 代入验证可得 $f(x+\pi)=f(x)$，故 D 错误，选 B.]

【例 7】 (1)A (2)C [(1)当 $x>0$ 时，函数 $f(x)$ 过点 $(1,0)$，又函数 $f(x)$ 有且只有一个零点，可推出当 $x\leqslant0$ 时，函数 $y=-2^x+a$ 没有零点，即在 $(-\infty,0]$ 内，函数 $y=2^x$ 与直线 $y=a$ 无公共点.由数形结合，可得 $a\leqslant0$ 或 $a>1$.又因 $\{a|a<0\}\subsetneqq\{a|a\leqslant0$ 或 $a>1\}$，故选 A.
(2)依题意得 $f(x)=a\sin(1-x)$，$g(x)=\ln x$，设 $h(x)=g(x)-x=\ln x-x$，$x\in(0,1]$，
$\because h'(x)=\dfrac{1}{x}-1\geqslant0$，$\therefore h(x)$ 在 $(0,1]$ 上单调递增，
$\therefore h(x)_{\max}=h(1)=\ln 1-1=-1$.
故原题等价于存在 $x\in\left[\dfrac{\pi}{2},2\right]$，使得 $a\sin(1-x)\geqslant-1$，
$\because \sin(1-x)\leqslant0$，$\therefore a\leqslant\dfrac{1}{\sin(x-1)}$.故只需 $a\leqslant\left[\dfrac{1}{\sin(x-1)}\right]_{\max}$.
而 $y=\dfrac{1}{\sin(x-1)}$ 在 $x\in\left[\dfrac{\pi}{2},2\right]$ 上单调递减，而 $\left[\dfrac{1}{\sin(x-1)}\right]_{\max}=\dfrac{1}{\sin\left(\dfrac{\pi}{2}-1\right)}=\dfrac{1}{\cos 1}$，$\therefore a\leqslant\dfrac{1}{\cos 1}$.故选 C.]

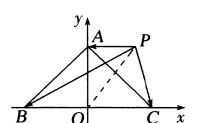
【例 8】 ③ [根据题意 $6(a+b+c)=26+11+11=48$，
故 $a+b+c=8$，$a=8-c-b\leqslant8-2-1=5$，
甲不是全部得第一，故 $6a>26$，故 $a>\dfrac{13}{3}$，即 $a\geqslant5$，
故 $a=5$，$b=2$，$c=1$.
故甲有 5 个第一，0 个第二，1 个第三；
乙有 1 个第一，1 个第二，4 个第三；
丙有 0 个第一，5 个第二，1 个第三.
对比选项知③正确.]

【例 9】 (1)D (2)A [由 $\dfrac{2-ai}{i}=1-bi$，得 $2-ai=i(1-bi)=b+i$，
$\therefore a=-1$，$b=2$，则 $a+bi=-1+2i$，$\therefore |a+bi|=|-1+2i|=\sqrt{(-1)^2+2^2}=\sqrt{5}$，故选 D.
(2)因为 $\boldsymbol{a}\parallel\boldsymbol{b}$，所以 $1+\cos x-2\sin x=0$，所以 $\cos x=2\sin x-1$，又因为 $\sin^2x+\cos^2x=1$，所以 $\sin^2x+(2\sin x-1)^2=1$，即 $5\sin^2x-4\sin x=0$，解得 $\sin x=\dfrac{4}{5}$ 或 $\sin x=0$，又 $x\in\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$，
所以 $\sin x=\dfrac{4}{5}$.故选 A.]

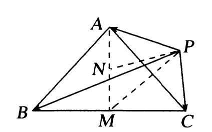
2.二级结论速解

【例 1】 D [**法一** (常规解法)因为 $\overrightarrow{AB}=\lambda\overrightarrow{BC}(\lambda\neq0)$，所以 A,B,C 三点共线.
又 A,B,O 确定一个平面，即 A,B,O 三点不共线，可知 A,C,O 三点不共线，
即 $\overrightarrow{OA}$，$\overrightarrow{OC}$ 不共线.
由 $\overrightarrow{AB}=\lambda\overrightarrow{BC}(\lambda\neq0)$，得 $\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}=\lambda(\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OB})$，
当 $\lambda\neq-1$ 时，$\overrightarrow{OB}=\dfrac{1}{1+\lambda}\overrightarrow{OA}+\dfrac{\lambda}{1+\lambda}\overrightarrow{OC}$；
当 $\lambda=-1$ 时，$\overrightarrow{OA}=\overrightarrow{OC}$(舍去).
由 $\overrightarrow{OB}=a_3\overrightarrow{OA}+a_{98}\overrightarrow{OC}$，可得 $a_3=\dfrac{1}{1+\lambda}$，$a_{98}=\dfrac{\lambda}{1+\lambda}$，则 $a_3+a_{98}=1$.
因为数列 $\{a_n\}$ 为等差数列，所以 $S_{100}=\dfrac{100(a_1+a_{100})}{2}=50(a_1+a_{100})=50(a_3+a_{98})=50$.故选 D.
法二 (结论解法)由 $\overrightarrow{AB}=\lambda\overrightarrow{BC}(\lambda\neq0)$，得 A,B,C 三点共线.
又 A,B,O 确定一个平面，所以 A,B,C,O 四点共面.
根据 $\overrightarrow{OB}=a_3\overrightarrow{OA}+a_{98}\overrightarrow{OC}$ 及平面向量的三点共线定理，得 $a_3+a_{98}=1$.
因为数列 $\{a_n\}$ 为等差数列，所以 $S_{100}=\dfrac{100(a_1+a_{100})}{2}=50(a_1+a_{100})=50(a_3+a_{98})=50$.故选 D.]

【例 2】 A [**法一** (常规解法)如图所示，以 BC 的中点 O 为坐标原点建立平面直角坐标系，则 $A(0,2\sqrt{2})$，$B(-2\sqrt{2},0)$，$C(2\sqrt{2},0)$，设 $P(x,y)$，连接 PO，
则 $\overrightarrow{PA}=(-x,2\sqrt{2}-y)$，$\overrightarrow{PB}+\overrightarrow{PC}=2\overrightarrow{PO}=(-2x,-2y)$，

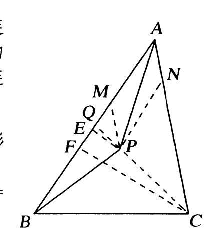


所以 $\overrightarrow{PA}\cdot(\overrightarrow{PB}+\overrightarrow{PC})=2x^2-4\sqrt{2}y+2y^2=2x^2+2(y-\sqrt{2})^2-4\geqslant-4$，
所以当 P 的坐标为 $(0,\sqrt{2})$ 时，$\overrightarrow{PA}\cdot(\overrightarrow{PB}+\overrightarrow{PC})$ 取最小值 -4，故选 A.
法二 (结论解法)如图所示，设 BC 的中点为 M，连接 AM,PM，取 AM 的中点 N，连接 PN，则 $\overrightarrow{PB}+\overrightarrow{PC}=2\overrightarrow{PM}$，
所以 $\overrightarrow{PA}\cdot(\overrightarrow{PB}+\overrightarrow{PC})=2\overrightarrow{PM}\cdot\overrightarrow{PA}$.



由平面向量中的极化恒等式，得 $\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{PM}=\dfrac{1}{4}[(\overrightarrow{PA}+\overrightarrow{PM})^2-(\overrightarrow{PA}-\overrightarrow{PM})^2]$
$=\dfrac{1}{4}[(2\overrightarrow{PN})^2-\overrightarrow{MA}^2]=\overrightarrow{PN}^2-2\geqslant-2$，
当且仅当 $\overrightarrow{PN}^2=0$，即 P 与 N 重合时，取等号，
所以 $\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{PM}$ 的最小值为 -2，故所求最小值为 $2\times(-2)=-4$.故选 A.]

【例 3】 C [**法一** (常规解法)如图所示，连接 CP 并延长，交 AB 于 Q，取 AB 靠近 A 的三等分点 M，取 AC 靠近 A 的四等分点 N，连接 PM,PN.
因为 $\overrightarrow{AP}=\dfrac{1}{3}\overrightarrow{AB}+\dfrac{1}{4}\overrightarrow{AC}$，所以四边形 $AMPN$ 为平行四边形，$PN\parallel AQ$，所以 $\dfrac{PQ}{CQ}=\dfrac{NA}{CA}=\dfrac{1}{4}$.

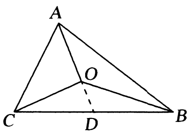


分别过点 P,C 作 AB 的垂线，垂足分别为 E,F，则 $\dfrac{PE}{CF}=\dfrac{PQ}{CQ}$，所以 $\triangle ABP$ 的面积与 $\triangle ABC$ 的面积之比为 $\dfrac{PQ}{CQ}=\dfrac{1}{4}$.故选 C.

法二 （结论解法）连接 PC，$\overrightarrow{AP}=\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{4}\overrightarrow{AC}=\frac{1}{3}(\overrightarrow{PB}-\overrightarrow{PA})+\frac{1}{4}(\overrightarrow{PC}-\overrightarrow{PA})=\frac{1}{3}\overrightarrow{PB}+\frac{1}{4}\overrightarrow{PC}-\frac{7}{12}\overrightarrow{PA}$，即 $\frac{5}{12}\overrightarrow{PA}+\frac{1}{3}\overrightarrow{PB}+\frac{1}{4}\overrightarrow{PC}=\mathbf{0}$，

利用奔驰定理的推论得 $S_{\triangle PBC}:S_{\triangle PCA}:S_{\triangle PAB}=\frac{5}{12}:\frac{1}{3}:\frac{1}{4}=5:4:3$，所以 $\frac{S_{\triangle ABP}}{S_{\triangle ABC}}=\frac{3}{5+4+3}=\frac{1}{4}$．故选 C.］

【例 4】 $\frac{1}{3}$ ［**法一** （常规解法）由 $\overrightarrow{AO}=m\overrightarrow{AB}+n\overrightarrow{AC}=m(\overrightarrow{AO}+\overrightarrow{OB})+n(\overrightarrow{AO}+\overrightarrow{OC})=(m+n)\overrightarrow{AO}+m\overrightarrow{OB}+n\overrightarrow{OC}$，



得 $(1-m-n)\overrightarrow{AO}=m\overrightarrow{OB}+n\overrightarrow{OC}$．

因为 $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}=\mathbf{0}$，即 $\overrightarrow{AO}=\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}$，

所以 $\begin{cases}\frac{m}{1-m-n}=1,\\ \frac{n}{1-m-n}=1,\end{cases}$ 解得 $m=n=\frac{1}{3}$，故填 $\frac{1}{3}$．

法二 （结论解法）根据三角形“四心”的向量形式的充要条件中的(2)，由 $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}=\mathbf{0}$ 可知 O 为三角形 ABC 的重心，

延长 AO 交 BC 于 D，如图所示，

根据三角形的重心的性质有 $\overrightarrow{AO}=\frac{2}{3}\overrightarrow{AD}=\frac{2}{3}\left(\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}\right)=\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$，所以 $m=n=\frac{1}{3}$，故填 $\frac{1}{3}$．］

【例 5】 A ［**法一** （常规解法）由 $\sin B(1+2\cos C)=2\sin A\cos C+\cos A\sin C$ 得 $\sin B+2\sin B\cos C$
$=\sin A\cos C+(\sin A\cos C+\cos A\sin C)$
$=\sin A\cos C+\sin(A+C)$
$=\sin A\cos C+\sin B$，

即 $2\sin B\cos C=\sin A\cos C$，又 $\triangle ABC$ 为锐角三角形，

则 $\cos C\neq 0$，故 $2\sin B=\sin A$，由正弦定理得 $2b=a$，故选 A.

法二 （结论解法）由正弦定理得 $b(1+2\cos C)=2a\cos C+c\cos A$，由三角形中的射影定理可得 $b+2b\cos C=a\cos C+b$，又 $\cos C\neq 0$，故 $a=2b$．］

【例 6】 B ［（结论解法）因为 $b=c\cos A$，

所以 $\triangle ABC$ 是以 C 为直角的直角三角形，

$\frac{1}{8}=\cos\angle BAC=\frac{AC}{AB}$，由三角形内角平分线定理可得 $\frac{AC}{AB}=\frac{CD}{BD}=\frac{1}{8}$，设 $AC=x$，$AB=8x$，则 $BC=3\sqrt{7}x$，$CD=\frac{\sqrt{7}}{3}x$．

在 $\mathrm{Rt}\triangle ACD$ 中，由勾股定理可得 $x^2+\left(\frac{\sqrt{7}}{3}x\right)^2=1$，解得 $x=\frac{3}{4}$，

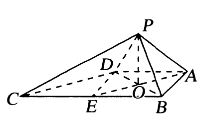
即 $AC=\frac{3}{4}$，$AB=6$，$BC=\frac{9\sqrt{7}}{4}$，

所以 $S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}\times\frac{3}{4}\times\frac{9\sqrt{7}}{4}=\frac{27\sqrt{7}}{32}$，

所以 $S_{\triangle ABD}=\frac{8}{9}S_{\triangle ABC}=\frac{3\sqrt{7}}{4}$．故选 B.］

【例 7】 (1)**证明** 如图，取 BC 的中点 E，连接 DE，则四边形 $ADEB$ 为正方形．

过 P 作 $PO\perp$ 平面 $ABCD$，垂足为 O，连接 OA，OB，OE，OD．



由 $\triangle PAB$ 和 $\triangle PAD$ 都是等边三角形可知 $PA=PB=PD$，

所以 $OA=OB=OD$，即点 O 为正方形 $ADEB$ 对角线的交点．

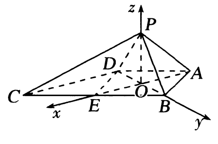
故 $OE\perp BD$，又 $OE\perp PO$，$BD\cap PO=O$，BD，$PO\subset$ 平面 PBD，所以 $OE\perp$ 平面 PBD，

所以 $OE\perp PB$．

因为 O 是 BD 的中点，E 是 BC 的中点，所以 $OE\parallel CD$，因此 $PB\perp CD$．

(2)**解** **法一** （空间向量法）由(1)可知，OE，OB，OP 两两垂直．

以 O 为原点，$\overrightarrow{OE}$ 的方向为 x 轴正方向，$\overrightarrow{OB}$ 的方向为 y 轴正方向，$\overrightarrow{OP}$ 的方向为 z 轴正方向，建立如图所示的空间直角坐标系 $O-xyz$．



设 $AB=2$，则 $O(0,0,0)$，$A(-\sqrt{2},0,0)$，$D(0,-\sqrt{2},0)$，$P(0,0,\sqrt{2})$，$E=(\sqrt{2},0,0)$，$\overrightarrow{AD}=(\sqrt{2},-\sqrt{2},0)$，$\overrightarrow{AP}=(\sqrt{2},0,\sqrt{2})$，$\overrightarrow{OE}=(\sqrt{2},0,0)$．

设平面 PAD 的法向量为 $\boldsymbol{n}=(x,y,z)$，

则 $\begin{cases}\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{AD}=\sqrt{2}x-\sqrt{2}y=0,\\ \boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{AP}=\sqrt{2}x+\sqrt{2}z=0,\end{cases}$

取 $x=1$，得 $y=1$，$z=-1$，所以 $\boldsymbol{n}=(1,1,-1)$ 为平面 PAD 的一个法向量．

由 $OE\perp$ 平面 PBD，可得平面 PBD 的一个法向量为 $\boldsymbol{m}=(1,0,0)$．

由图可知二面角 $A-PD-B$ 的平面角为锐角，记为 θ，

则二面角 $A-PD-B$ 的余弦值为 $\cos\theta=\frac{|\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{m}|}{|\boldsymbol{n}|\cdot|\boldsymbol{m}|}=\frac{1}{\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{3}}{3}$．

法二 （结论解法）根据(1)可知 $AO\perp$ 平面 PBD，

所以三角形 PAD 在平面 PBD 内的射影为三角形 PDO．

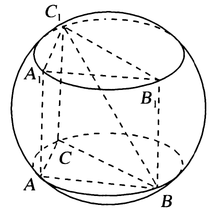
设 $AB=2$，则 $OD=OP=\sqrt{2}$，

所以 $S_{\triangle POD}=\frac{1}{2}\times\sqrt{2}\times\sqrt{2}=1$，$S_{\triangle APD}=\frac{1}{2}\times2\times2\times\sin 60^\circ=\sqrt{3}$，

易知二面角 $A-PD-B$ 的平面角为锐角，记为 θ，

由面积射影定理，可得二面角 $A-PD-B$ 的余弦值为 $\cos\theta=\frac{S_{\triangle POD}}{S_{\triangle APD}}=\frac{1}{\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{3}}{3}$．

【例 8】 C ［**法一** （常规解法）如图所示，由三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 的 6 个顶点都在球 O 的表面上，$AB=3$，$AC=4$，$AB\perp AC$，$AA_1=12$，



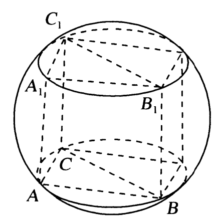
得三棱柱的底面是直角三角形，侧棱与底面垂直．

$\triangle ABC$ 的外心是斜边 BC 的中点，三棱柱上、下底面三角形的外心的连线垂直于底面 ABC，中点即为球心，

即侧面 B_1BCC_1 经过球的球心，球的直径是四边形 B_1BCC_1 的对角线长．

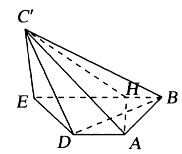
连接 BC_1，因为 $BC_1=\sqrt{3^2+4^2+12^2}=13$，所以球的半径 $R=\frac{13}{2}$．故选 C.

法二 （结论解法）由题意知三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 是底面为直角三角形的直三棱柱，可把直三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 补成一个长方体，如图所示，则直三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 的外接球和长方体的外接球是同一个球．



由 $AB=3$，$AC=4$，$AA_1=12$，根据结论(2)，可得 $2R=\sqrt{AB^2+AC^2+AA_1^2}=\sqrt{3^2+4^2+12^2}=13$（$R$ 为球 O 的半径），则 $R=\frac{13}{2}$．故选 C.］

【例 9】 $\sqrt{19-4\sqrt{3}}$ ［**法一** 如图所示，过点 A 作 BE 的垂线，垂足为 H，连接 $C'H$，



设 $\angle C'BE=\alpha$，$\alpha\in(0^\circ,60^\circ)$，则 $\angle ABE=90^\circ-\alpha$，易得 $BD=2$，$AB=\sqrt{3}$，

则 $AH=AB\sin(90^\circ-\alpha)=\sqrt{3}\cos\alpha$，$BH=AB\cos(90^\circ-\alpha)=\sqrt{3}\sin\alpha$．

因为平面 $BEC'\perp$ 平面 $ABED$，且交线为 BE，$AH\perp BE$，$AH\subset$ 平面 $ABED$，所以 $AH\perp$ 平面 BEC'，故 $AH\perp C'H$，于是 $AC'=\sqrt{AH^2+C'H^2}$．

又 $C'H^2=C'B^2+BH^2-2C'B\cdot BH\cdot\cos\alpha=16+3\sin^2\alpha-2\times4\times\sqrt{3}\sin\alpha\cos\alpha=16+3\sin^2\alpha-4\sqrt{3}\sin 2\alpha$，

所以 $AC'=\sqrt{AH^2+C'H^2}=\sqrt{19-4\sqrt{3}\sin 2\alpha}$，当 $\alpha=45^\circ$ 时，AC' 取得最小值，为 $\sqrt{19-4\sqrt{3}}$．

法二 （结论解法）设 $\angle C'BE=\alpha$，$\alpha\in(0^\circ,60^\circ)$，则 $\angle ABE=90^\circ-\alpha$，由题意及三余弦定理有 $\cos\angle C'BA=\cos\angle C'BE\cdot\cos\angle EBA=\cos\alpha\cos(90^\circ-\alpha)=\frac{1}{2}\sin 2\alpha$，

$AC'^2=AB^2+BC'^2-2AB\cdot BC'\cos\angle C'BA$，易得 $AB=\sqrt{3}$，

故 $AC'^2=(\sqrt{3})^2+4^2-2\times4\times\sqrt{3}\times\frac{1}{2}\sin 2\alpha=19-4\sqrt{3}\sin 2\alpha\geqslant 19-4\sqrt{3}$，

当且仅当 $\alpha=45^\circ$ 时，取“=”，故 AC' 的最小值为 $\sqrt{19-4\sqrt{3}}$．］

【例 10】 B ［**法一** （常规解法）由圆 C：$(x-1)^2+y^2=1$ 的方程可知其圆心为 $C(1,0)$，半径为 1.

连接 CD，以线段 CD 为直径的圆的方程为
$(x-1)(x-1)+(y+2)(y-0)=0$，
整理得 $(x-1)^2+(y+1)^2=1$.
将两圆的方程相减，可得公共弦 AB 所在直线的方程为 $2y+1=0$.故选 B.
法二 （结论解法）根据结论(2)，得弦 AB 所在直线的方程为 $(1-1)(x-1)+(-2)y=1$，即 $2y+1=0$.故选 B.]

【例 11】 B ［**法一** （常规解法）设直线 AB 的方程为 $x=ty+m$，$A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$，$y_1y_2<0$.
因为 A,B 在抛物线上，所以 $x_1=y_1^2$，$x_2=y_2^2$，
由 $\begin{cases}x=ty+m,\\y^2=x\end{cases}$ 得 $y^2-ty-m=0$，$\Delta>0$，所以 $y_1y_2=-m$.
又 $\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=2$，所以 $x_1x_2+y_1y_2=(y_1y_2)^2+y_1y_2=2$，将 $y_1y_2=-m$ 代入得 $m^2-m-2=0$，解得 $m=2$ 或 $m=-1$.
又 $y_1y_2=-m<0$，所以 $m=2$，直线 AB：$x=ty+2$ 恒过定点 $(2,0)$，
所以 $S_{\triangle ABO}=\frac{1}{2}\times2\times|y_1-y_2|=\left|y_1+\frac{2}{y_1}\right|$，$S_{\triangle AFO}=\frac{1}{2}\times\frac{1}{4}\times|y_1|=\frac{1}{8}|y_1|$，$S_{\triangle ABO}+S_{\triangle AFO}=\left|y_1+\frac{2}{y_1}\right|+\frac{1}{8}|y_1|=\frac{9}{8}|y_1|+\left|\frac{2}{y_1}\right|\geqslant2\sqrt{\frac{9}{8}|y_1|\times\left|\frac{2}{y_1}\right|}=3$，当且仅当 $\frac{9}{8}|y_1|=\left|\frac{2}{y_1}\right|$，即 $|y_1|=\frac{4}{3}$ 时取等号，故 $\triangle ABO$ 与 $\triangle AFO$ 面积之和的最小值为 3，故选 B.
法二 （结论解法）依题意，设 $A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$，不妨令 $y_1>0$，$y_2<0$.
则由 $\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=2$ 得 $x_1x_2+y_1y_2=(y_1y_2)^2+y_1y_2=2$，解得 $y_1y_2=-2$.
根据三角形的面积坐标公式得，$\triangle ABO$ 与 $\triangle AFO$ 面积之和等于 $\frac{1}{2}|x_1y_2-x_2y_1|+\frac{1}{2}\times\frac{1}{4}y_1=\frac{1}{2}|y_1^2y_2-y_2^2y_1|+\frac{1}{8}y_1=\frac{1}{2}\times2(y_1-y_2)+\frac{1}{8}y_1=\frac{9}{8}y_1+(-y_2)\geqslant2\sqrt{-\frac{9}{8}y_1y_2}=3$，当且仅当 $\frac{9}{8}y_1=-y_2$，即 $y_1=\frac{4}{3}$ 时取等号，因此 $\triangle ABO$ 与 $\triangle AFO$ 面积之和的最小值为 3，故选 B.]

【例 12】 A ［**法一** （常规解法）由椭圆 $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{16}=1$ 的焦点为 F_1，F_2 知，$|F_1F_2|=2c=6$，
在 $\triangle F_1PF_2$ 中，不妨设 $|PF_1|=m$，$|PF_2|=n$，则 $|PF_1|+|PF_2|=m+n=2a=10$.
由余弦定理得 $|F_1F_2|^2=|PF_1|^2+|PF_2|^2-2|PF_1|\cdot|PF_2|\cos\angle F_1PF_2$，
即 $(2c)^2=m^2+n^2-2mn\cos60°$，即 $36=(m+n)^2-3mn=100-3mn$，解得 $mn=\frac{64}{3}$.
所以 $S_{\triangle F_1PF_2}=\frac{1}{2}\cdot|PF_1|\cdot|PF_2|\cdot\sin\angle F_1PF_2$
$=\frac{1}{2}mn\sin60°=\frac{16\sqrt{3}}{3}$.故选 A.
法二 （结论解法）依题意知 $b=4$，
根据结论(1)，得 $S_{\triangle F_1PF_2}=b^2\tan\frac{\angle F_1PF_2}{2}=16\times\tan\frac{60°}{2}=\frac{16\sqrt{3}}{3}$.故选 A.]

【例 13】 D ［**法一** （常规解法）由双曲线的渐近线方程为 $y=\pm2x$，可知 $\frac{b}{a}=2$，即 $b=2a$.
又 $c^2=a^2+b^2=a^2+4a^2=5a^2$，所以 $e^2=\frac{c^2}{a^2}=5$，
即 $e=\sqrt{5}$.故选 D.
法二 （结论解法）由双曲线的渐近线方程为 $y=\pm2x$，可知渐近线的斜率 $k=\pm2$.
根据结论(3)，得 $e=\sqrt{1+k^2}=\sqrt{1+4}=\sqrt{5}$.故选 D.]

【例 14】 64 ［**法一** （常规解法）依题意，抛物线 C：$y^2=16x$ 的焦点为 $F(4,0)$，直线 l 的方程为 $x=\sqrt{3}y+4$.
由 $\begin{cases}x=\sqrt{3}y+4,\\y^2=16x,\end{cases}$ 消去 x 并整理，得 $y^2-16\sqrt{3}y-64=0$，
设 $A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$，则 $y_1+y_2=16\sqrt{3}$，$y_1y_2=-64$.
$S_{\triangle OAB}=\frac{1}{2}|y_1-y_2|\times|OF|=\frac{1}{2}\sqrt{(y_1+y_2)^2-4y_1y_2}\times4$
$=2\times\sqrt{(16\sqrt{3})^2-4\times(-64)}=64$.
故填 64.
法二 （结论解法）依题意，抛物线 C：$y^2=16x$ 中，$p=8$，直线 l 的倾斜角 $\alpha=\frac{\pi}{6}$.
根据结论(3)，得 $S_{\triangle OAB}=\frac{p^2}{2\sin\alpha}=\frac{8^2}{2\sin\frac{\pi}{6}}=64$.故填 64.]

【例 15】 $x-2y+2=0$ ［**法一** （常规解法）设 $A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$.由 $x^2=4y$ 得 $y'=\frac{1}{2}x$，
所以过点 A 的切线方程为 $y-y_1=\frac{1}{2}x_1(x-x_1)$，即 $x_1x-2y-2y_1=0$.
将 $(1,-1)$ 代入上式可得 $x_1-2y_1+2=0$，同理得 $x_2-2y_2+2=0$，
所以 $A(x_1,y_1)B(x_2,y_2)$ 的坐标都满足方程 $x-2y+2=0$，此即直线 AB 的方程.
法二 （结论解法）由题意知抛物线 $x^2=4y$ 的准线方程为 $y=-1$.
由 $H(1,-1)$，得 H 在抛物线的准线上.
易知 $\triangle HAB$ 是阿基米德三角形.
设抛物线的焦点为 F，连接 HF，则 AB 过 $F(0,1)$，$HF\perp AB$，
由抛物线的阿基米德三角形的性质知 $k_{AB}\cdot k_{HF}=-1$，易知 $k_{HF}=-2$，所以 $k_{AB}=\frac{1}{2}$.
故直线 AB 的方程为 $y=\frac{1}{2}x+1$，即 $x-2y+2=0$.]

【例 16】 A ［**法一** （常规解法）由 $\overrightarrow{OP}=\lambda\overrightarrow{OF}$，得 O,P,F 三点共线，所以 P 在 x 轴上.
设直线 AB 的方程为 $x=my+a(a\neq0)$，
联立直线 AB 和抛物线的方程得 $\begin{cases}x=my+a,\\y^2=2px,\end{cases}$ 消去 x 并整理，得 $y^2-2pmy-2pa=0$，$\Delta=4p^2m^2+8pa>0$.
设 $A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$，则 $y_1y_2=-2pa$，$x_1x_2=\frac{y_1^2}{2p}\times\frac{y_2^2}{2p}=a^2$.
因为 $OA\perp OB$，所以 $\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=0$，则 $x_1x_2+y_1y_2=0$，即 $a^2-2pa=0$，
解得 $a=2p$，则直线 AB 的方程为 $x=my+2p$，
可知直线 AB 恒过定点 $(2p,0)$，即 $P(2p,0)$.
则 $\overrightarrow{OP}=(2p,0)$，$\overrightarrow{OF}=\left(\frac{p}{2},0\right)$，由 $\overrightarrow{OP}=\lambda\overrightarrow{OF}$，得 $\lambda=4$.故选 A.
法二 （结论解法）由 $\overrightarrow{OP}=\lambda\overrightarrow{OF}$，得 O,P,F 三点共线，所以点 P 在 x 轴上.
由题意知两弦 OA,OB 互相垂直，
根据抛物线的两垂直弦的性质，可知直线 AB 恒过定点 $(2p,0)$，即 $P(2p,0)$.
则 $\overrightarrow{OP}=(2p,0)$，$\overrightarrow{OF}=\left(\frac{p}{2},0\right)$，由 $\overrightarrow{OP}=\lambda\overrightarrow{OF}$，得 $\lambda=4$.故选 A.]

【例 17】 $6x+5y+28=0$ ［（结论解法）由题意知 $b=4$，又 $e^2=\frac{c^2}{a^2}=\frac{a^2-b^2}{a^2}=\frac{1}{5}$，所以 $a^2=20$，
所以椭圆 C 的方程为 $\frac{x^2}{20}+\frac{y^2}{16}=1$，椭圆 C 的左焦点为 $F(-2,0)$.
设线段 MN 的中点为 $Q(x_0,y_0)$，连接 BQ，
由三角形的重心性质知 $\overrightarrow{BF}=2\overrightarrow{FQ}$，
从而 $(-2,-4)=2(x_0+2,y_0)$，解得 $x_0=-3$，$y_0=-2$，即 $Q(-3,-2)$.由结论(1)，得 $k_{MN}=-\frac{4}{5}\times\frac{-3}{-2}=-\frac{6}{5}$，
所以直线 l 的方程为 $y+2=-\frac{6}{5}(x+3)$，即 $6x+5y+28=0$.
故填 $6x+5y+28=0$.]

【例 18】 (1)B ［由 $\begin{cases}x+1>0,\\\ln(x+1)-x\neq0,\end{cases}$
得 $\{x\,|\,x>-1$ 且 $x\neq0\}$，所以排除选项 D，
当 $x>-1$ 时，由不等式 $\ln(x+1)<x$ 知 $\ln(x+1)-x<0$，排除 A，C，故选 B.]
(2)**证明** 令 $g(x)=f(x)-\left(\frac{1}{2}x^2+x+1\right)=e^x-\frac{1}{2}x^2-x-1$，$x\in\mathbf{R}$，则 $g'(x)=e^x-x-1$，由不等式 $e^x\geqslant x+1$ 恒成立，
可知 $g'(x)\geqslant0$ 恒成立，所以 $g(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上为增函数，且 $g(0)=0$，
所以函数 $g(x)$ 有唯一零点，即两曲线有唯一公共点.