

数学试题参考答案

一、选择题

1. A 2. B 3. D 4. B
5. C 6. C 7. D 8. C

二、选择题

9. AC 10. AC 11. BCD 12. ABD

三、填空题

13. $\sqrt{3}$ 14. 28
15. 2, -2 , $-\frac{1}{2}$, $\frac{1}{2}$ (任一个即可) 16. $\frac{\sqrt{3}}{2}$

四、解答题

解:

$$(1) \text{ 由题意 } \triangle ADC \text{ 面积为 } \frac{\sqrt{3}}{2}, \text{ 所以 } \frac{1}{2}AD \cdot \frac{a}{2} \sin \angle ADC = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

$$\text{因为 } AD=1, \angle ADC=\frac{\pi}{3}, \text{ 所以 } a=4. \text{ 从而 } \tan B = \frac{AD \sin \angle ADC}{BD + AD \cos \angle ADC} = \frac{\sqrt{3}}{5}.$$

$$(2) \text{ 由 } \vec{AD} = \frac{\vec{AB} + \vec{AC}}{2}, \text{ 得 } \vec{AD}^2 = \frac{\vec{AB}^2 + 2\vec{AB} \cdot \vec{AC} + \vec{AC}^2}{4}, \text{ 所以 } b^2 + c^2 + 2bc \cos \angle BAC = 4.$$

$$\text{因为 } b^2 + c^2 = 8, \frac{1}{2}bc \sin \angle BAC = \sqrt{3}, \text{ 所以 } \tan \angle BAC = -\sqrt{3}, \text{ 故 } \angle BAC = \frac{2\pi}{3}.$$

因此 $bc=4$, 于是 $b=c=2$.

18. 解:

$$(1) \text{ 设的公差为 } d, \text{ 则 } b_1 = a_1 - 6, b_2 = 2a_1 + 2d, b_3 = a_1 + 2d - 6.$$

$$\text{由题意 } 4a_1 + 6d = 32, 4a_1 + 4d - 12 = 16, \text{ 解得 } a_1 = 5, d = 2.$$

$$\text{所以 } \{a_n\} \text{ 的通项公式 } a_n = a_1 + (n-1)d = 2n + 3.$$

$$(2) S_n = \frac{n(a_1 + a_n)}{2} = n^2 + 4n.$$

若 n 为偶数, 则

$$\begin{aligned} T_n &= (a_1 + a_3 + \cdots + a_{n-1} - 6 \times \frac{n}{2}) + 2(a_2 + a_4 + \cdots + a_n) \\ &= \frac{\frac{n}{2}(a_1 + a_{n-1})}{2} - 3n + \frac{n}{2}(a_2 + a_n) \\ &= \frac{3n^2 + 7n}{2}. \end{aligned}$$

$$\text{当 } n > 5 \text{ 时, } T_n - S_n = \frac{n(n-1)}{2} > 0, T_n > S_n.$$

若 n 为奇数, 则

$$\begin{aligned} T_n &= T_{n-1} + b_n \\ &= \frac{3(n-1)^2 + 7(n-1)}{2} + 2n + 3 - 6 \\ &= \frac{3n^2 + 5n - 10}{2}. \end{aligned}$$

$$\text{当 } n > 5 \text{ 时, } T_n - S_n = \frac{(n-5)(n+2)}{2} > 0, T_n > S_n.$$

综上, 当 $n > 5$ 时, $T_n > S_n$.

19. 解:

(1) 当 $p(c)=0.5\%$ 时, 由直方图 $(c-95)\times 0.002=0.005$, 解得 $c=97.5$.
此时

$$q(c)=(100-97.5)\times 0.010+0.002\times 5=0.035=3.5\%.$$

(2) 当 $c\in[95, 100)$ 时,

$$p(c)=(c-95)\times 0.002=0.002c-0.19.$$

$$q(c)=(100-c)\times 0.01+0.002\times 5=-0.01c+1.01.$$

所以

$$f(c)=p(c)+q(c)=-0.008c+0.82.$$

因为 $f(c)$ 在 $[95, 100)$ 单调递减, 所以 $f(c)>f(100)=0.02$.

当 $c\in[100, 105]$ 时,

$$p(c)=(c-100)\times 0.012+0.002\times 5=0.012c-1.19.$$

$$q(c)=(105-c)\times 0.002=-0.002c+0.21.$$

所以

$$f(c)=p(c)+q(c)=0.01c-0.98.$$

因为 $f(c)$ 在 $[100, 105]$ 单调递增, 所以 $f(c)>f(100)=0.02$.

于是

$$f(c)=\begin{cases} -0.008c+0.82, & c\in[95, 100), \\ 0.01c-0.98, & c\in[100, 105]. \end{cases}$$

当 $c=100$ 时, $f(c)$ 在区间 $[95, 105]$ 取最小值 0.02 .

20. 解法1:

因为 $BD\perp CD$, $\angle ADB=\angle ADC=60^\circ$, 设 $DA=DB=DC=2$, 则 $DE=\sqrt{2}$.

以 $\{\vec{DA}, \vec{DB}, \vec{DC}\}$ 为基底, 则 $\vec{DA}\cdot\vec{DB}=2$, $\vec{DA}\cdot\vec{DC}=0$, $\vec{DB}\cdot\vec{DC}=2$.

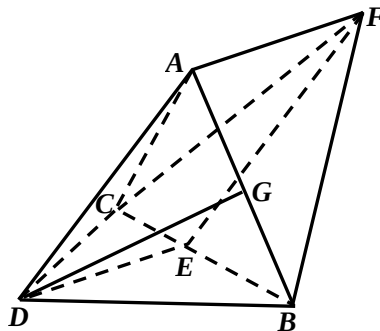
(1) 因为 $\vec{BC}\cdot\vec{DA}=(\vec{DC}-\vec{DB})\cdot\vec{DA}=\vec{DC}\cdot\vec{DA}-\vec{DB}\cdot\vec{DA}=0$, 所以 $BC\perp DA$.

(2) 因为 $\vec{DE}\cdot\vec{AB}=\frac{\vec{DB}+\vec{DC}}{2}\cdot(\vec{DB}-\vec{DA})=\frac{\vec{DB}^2+\vec{DB}\cdot\vec{DC}-\vec{DA}\cdot\vec{DB}-\vec{DA}\cdot\vec{DC}}{2}=0$, 所以

$DE\perp AB$. 由 $\vec{EF}=\vec{DA}$, 知 $\vec{AF}=\vec{DE}$, 所以 $AF\perp AB$.

设 AB 中点为 G , 连结 DG , 则 $DG\perp AB$, 且 $DG=\sqrt{3}$.

$$\begin{aligned}\vec{DE}\cdot\vec{DG} &= \frac{\vec{DB}+\vec{DC}}{2}\cdot\frac{\vec{DB}+\vec{DA}}{2} \\ &= \frac{1}{4}(\vec{DB}^2+\vec{DA}\cdot\vec{DB}+\vec{DB}\cdot\vec{DC}+\vec{DA}\cdot\vec{DC}) \\ &= 2.\end{aligned}$$



由 $\cos\langle\vec{AF}, \vec{DG}\rangle=\cos\langle\vec{DE}, \vec{DG}\rangle=\frac{\vec{DE}\cdot\vec{DG}}{|\vec{DE}||\vec{DG}|}=\frac{\sqrt{6}}{3}$, 知二面角 $D-AB-F$ 的正弦值为

$$\sqrt{1-\cos^2\langle\vec{AF}, \vec{DG}\rangle}=\frac{\sqrt{3}}{3}.$$

解法 2:

(1) 连结 DE , AE , 因为 $DB=DC$, E 为 BC 中点, 所以 $BC \perp DE$.

因为 $DA=DB=DC$, $\angle ADB=\angle ADC=60^\circ$, 所以 $AB=AC$, 所以 $BC \perp AE$.

因为 $DE \cap AE=E$, 所以 $BC \perp$ 平面 ADE , 因此 $BC \perp DA$.

(2) 设 $DA=DB=DC=2$, 则 $AB=AC=2$, $AE=DE=\sqrt{2}$, 所以 $AE \perp DE$. 由 (1) 知 $AE \perp$ 平面 BDC .

以 E 为坐标原点, $\vec{ED}$ 为 x 轴正方向, 建立如图所示的空间直角坐标系 $E-xyz$, 则
 $A(0, 0, \sqrt{2})$, $B(0, \sqrt{2}, 0)$, $D(\sqrt{2}, 0, 0)$,
 $\vec{AB}=(0, \sqrt{2}, -\sqrt{2})$, $\vec{AD}=(\sqrt{2}, 0, -\sqrt{2})$.

由 $\vec{EF}=\vec{DA}$, 知 $\vec{AF}=\vec{DE}=(-\sqrt{2}, 0, 0)$.

设平面 DAB 的法向量为 $\mathbf{m}=(x_1, y_1, z_1)$,
 平面 ABF 的法向量为 $\mathbf{n}=(x_2, y_2, z_2)$.

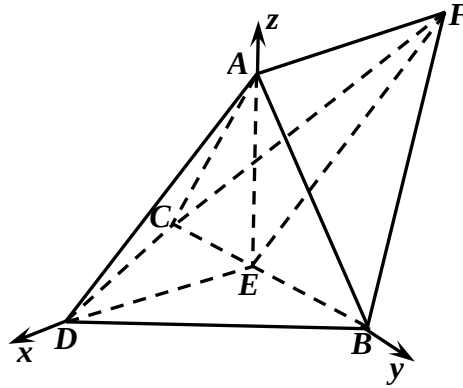
$$\text{由} \begin{cases} \mathbf{m} \cdot \vec{AB}=0, \\ \mathbf{m} \cdot \vec{AD}=0. \end{cases} \quad \text{得} \begin{cases} \sqrt{2}y_1 - \sqrt{2}z_1=0, \\ \sqrt{2}x_1 - \sqrt{2}z_1=0. \end{cases}$$

可取 $\mathbf{m}=(1, 1, 1)$.

$$\text{由} \begin{cases} \mathbf{n} \cdot \vec{AB}=0, \\ \mathbf{n} \cdot \vec{AF}=0. \end{cases} \quad \text{得} \begin{cases} \sqrt{2}y_2 - \sqrt{2}z_2=0, \\ \sqrt{2}x_2=0. \end{cases} \quad \text{可取} \mathbf{n}=(0, 1, 1).$$

因为 $\cos \langle \mathbf{m}, \mathbf{n} \rangle = \frac{\mathbf{m} \cdot \mathbf{n}}{|\mathbf{m}| |\mathbf{n}|} = \frac{\sqrt{6}}{3}$, 所以二面角 $D-AB-F$ 的正弦值为

$$\sqrt{1 - \cos^2 \langle \mathbf{m}, \mathbf{n} \rangle} = \frac{\sqrt{3}}{3}.$$



21. 解:

(1) 设 $C: \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 (a>0, b>0)$, 由题意 $a^2 + b^2 = 20$, $\frac{\sqrt{a^2 + b^2}}{a} = \sqrt{5}$, 解得 $a^2 = 4$,
 $b^2 = 16$, 所以 $C: \frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{16} = 1$.

(2) 由题设 MN 不垂直于 y 轴, 设 $MN: x = my - 4$, $4m^2 - 1 < 0$, 代入 $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{16} = 1$ 得 $(4m^2 - 1)y^2 - 32my + 48 = 0$, 因为 $\Delta = 256m^2 + 192 > 0$, 所以设 $M(x_1, y_1)$, $N(x_2, y_2)$,

$$\text{则 } y_1 + y_2 = \frac{32m}{4m^2 - 1}, \quad y_1 y_2 = \frac{48}{4m^2 - 1}.$$

$$\text{由 } \frac{x_1^2}{4} - \frac{y_1^2}{16} = 1, \quad \text{可得 } x_1 + 2 = \frac{y_1^2}{4(x_1 - 2)}.$$

$$\text{由 } PA_1: y = \frac{y_1}{x_1 + 2}(x + 2), \quad PA_2: y = \frac{y_2}{x_2 - 2}(x - 2), \quad \text{可得}$$

$$\begin{aligned} \frac{x-2}{x+2} &= \frac{y_1(x_2-2)}{y_2(x_1+2)} = \frac{4(x_1-2)(x_2-2)}{y_1 y_2} \\ &= \frac{4(my_1-6)(my_2-6)}{y_1 y_2} \\ &= \frac{4(m^2 y_1 y_2 - 6m(y_1 + y_2) + 36)}{y_1 y_2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{4(m^2 \frac{48}{4m^2-1} - 6m \frac{32m}{4m^2-1} + 36)}{\frac{48}{4m^2-1}} \\
&= -3
\end{aligned}$$

因此 $x = -1$, 点 P 在定直线 $x = -1$ 上.

22. 解:

(1) 设 $g(x) = \sin x - x$, $g'(x) = \cos x - 1$, 当 $0 < x < 1$ 时, $g'(x) < 0$, $g(x)$ 单调递减. 由 $g(x) < g(0)$ 可得 $\sin x < x$.

设 $h(x) = \sin x - x + x^2$, $h'(x) = \cos x(1 + \frac{-1+2x}{\cos x})$, 当 $0 < x < 1$ 时, $1 + \frac{-1+2x}{\cos x} > 0$, 从而 $h'(x) > 0$, $h(x)$ 单调递增, 由 $h(x) > h(0)$ 可得 $\sin x > x - x^2$.

综上, 当 $0 < x < 1$ 时, $x - x^2 < \sin x < x$.

(2) $f(x)$ 定义域为 $(-1, 1)$, $f'(x) = -a \sin ax + \frac{2x}{1-x^2}$.

若 $a = 0$, 当 $0 < x < 1$ 时, $f'(x) = \frac{2x}{1-x^2} > 0$, $f(x)$ 单调递增, $x = 0$ 不是 $f(x)$ 的极大值点.

若 $0 < a \leq \sqrt{2}$, 当 $0 < x < \min\{1, \frac{1}{a}\}$ 时, $0 < ax < 1$, 由 (1) 可得 $-a \sin ax > -a^2 x$, 所以

以 $f'(x) > x(-a^2 + \frac{2}{1-x^2}) > 0$, $f(x)$ 单调递增, 所以 $x = 0$ 不是 $f(x)$ 的极大值点.

若 $a > \sqrt{2}$, 当 $0 < x < \frac{1}{a}$ 时, 由 (1) 可得 $-a^2 x < -a \sin ax < a^3 x^2 - a^2 x$, 从而

$$-a^2 + \frac{2}{1-x^2} < \frac{f'(x)}{x} < a^3 x - a^2 + \frac{2}{1-x^2}.$$

设 $F(x) = -a^2 + \frac{2}{1-x^2}$, $G(x) = a^3 x - a^2 + \frac{2}{1-x^2}$, $F(x)$, $G(x)$ 均在 $(0, \frac{1}{a})$ 单调递增.

因为 $F(0) = 2 - a^2 < 0$, $G(0) = 2 - a^2 < 0$, 而 $G(\frac{1}{a}) = \frac{2a^2}{a^2-1} > 0$, 所以存在 $x_0 \in (0, \frac{1}{a})$, 当

$0 < x < x_0$ 时, $f'(x) < 0$, $f(x)$ 单调递减. 由 $f'(-x) = -f'(x)$ 得当 $-x_0 < x < 0$ 时, $f'(x) > 0$, $f(x)$ 单调递增, 因此 $x = 0$ 为 $f(x)$ 的极大值点.

若 $a < 0$, 由 $x = 0$ 为 $f(x) = \cos(-ax) - \ln(1-x^2)$ 的极大值点, 可得 $-a > \sqrt{2}$, $a < -\sqrt{2}$.

综上, a 的取值范围为 $(-\infty, -\sqrt{2}) \cup (\sqrt{2}, +\infty)$.