

如何探寻递推关系

江苏南通市南通建筑职业技术学校 杨忠 (邮编:226000)

概率、排列和数列都是高中数学的重要内容,由于三者之间存在内在关联性,在近几年的高考、自主招生等各类考试中经常出现三者交汇题.此类题目以某个实际问题为背景,以概率或组合问题的形式呈现,需要学生首先找到某项与前几项之间的递归关系,再由求数列通项公式的方法和手段求解.在实际教学中,笔者注意到解决此类问题时,由递推数列求解通项数列属于程序性知识和方法,对学生而言不是难点.学生困难之处在于怎样从实际问题出发,经过分析建立数学模型,即确定问题中存在的递推关系,这也是数学教学中的一个薄弱点.笔者就这个问题,谈谈思考和心得.

首先以著名的结草成环问题为例来说明.

例1 现有 $n(n \in \mathbf{N}^*)$ 根草,共有 $2n$ 个草头,现将 $2n$ 个草头平均分成 n 组,每两个草头打结,求打结后所有草能构成一个圆环的打结方法数.

解析 递推关系 $p_n = f(p_{n-1}, p_{n-2}, \dots, p_{n-k})$ 本质是由 p_n 之前若干项表示出来,所以分析问题时应首先明确目标 p_n 为哪个量, p_{n-1} , p_{n-2} , $\dots$, p_{n-k} 又相应是什么量.

这个问题中,将 n 根草打结后所有草能构成一个圆环的打结方法数记为 p_n ,那么将 $n-1, n-2, \dots, 1$ 根草打结后所有草能构成一个圆环的打结方法数依次记为 $p_{n-1}, p_{n-2}, \dots, p_1$.

如何求 p_n ,可以先假设 $p_{n-1}, p_{n-2}, \dots, p_1$ 是已知或已经求得,若有需要这 $n-1$ 个量都可以用来表示 p_n ,然后考虑如何实现 p_n 对应的状态向 $p_{n-1}, p_{n-2}, \dots, p_1$ 对应的状态转移.

本题中,即考虑如何将 p_n 对应的 n 根草状态向 $n-1$ 根草状态转移,将草头编号为 $1, 2, 3, \dots, 2n-1, 2n$.不失一般性,先考虑 1 号的打结, 1 号和 2 号头打结不合题意, 1 号和 $3, \dots, 2n-1, 2n$ 共有 $2n-2$ 个草头可以打结,所以有 $2n-2$ 个打法.然后考虑剩余草头 $2n-2$ 个,此时可以看成 $n-1$ 根草打结后所有草能构成一个圆环

情形,其方法数为 p_{n-1} ,这样由分步原理知递推关系为 $p_n = (2n-2)p_{n-1}$,易得 $p_1 = 1$.

$$p_n = \frac{p_n}{p_{n-1}} \cdot \frac{p_{n-1}}{p_{n-2}} \cdot \dots \cdot \frac{p_2}{p_1} \cdot p_1 = (2n-2)(2n-4) \times \dots \times 2 \times 1 = 2^{n-1}(n-1)!$$

例1通过 n 根草状态转移为 $n-1$ 根草的状态找到递推关系,实现状态转移是找到递推关系的关键,笔者将状态转移的方法归纳为以下几种.

1 直接转移法

将 n 情形下状态转移为 $n-1$ 情形下的相同状态,如例1.现再举一例.

例2 如图1,

$\frac{n(n+1)}{2}$ 个不同的数随

机排成一个三角阵,设 M_k 是从上往下数第 k 行中

的最大数,求 $M_1 < M_2 < \dots < M_n$ 的概率.

解析 记 $M_1 < M_2 < \dots < M_n$ 的概率为 p_n , p_{n-1} 表示 $n-1$ 行的三角形阵 $M_1 < M_2 < \dots < M_{n-1}$ 的概率、 p_{n-2} 表示 $n-2$ 行的三角形阵 $M_1 < M_2 < \dots < M_{n-2}$ 的概率、 $\dots$ 、 p_2 表示 2 行的三角形阵 $M_1 < M_2$ 的概率.

$M_1 < M_2 < \dots < M_n$ 成立首先保证 M_n 是 $\frac{n(n+1)}{2}$ 个不同数中最大的一个数,即最大数在

第 n 行的,概率为 $\frac{n}{\frac{n(n+1)}{2}} = \frac{2}{n+1}$,同时上方

$n-1$ 行的三角形阵 $M_1 < M_2 < \dots < M_{n-1}$ 的概率为 p_{n-1} ,故 $M_1 < M_2 < \dots < M_n$ 的概率为 $p_n = \frac{2}{n+1} p_{n-1}$,由此确立递推公式.

$$\text{根据递推公式易得: } p_n = \frac{p_n}{p_{n-1}} \cdot \frac{p_{n-1}}{p_{n-2}} \cdot \dots \cdot \frac{p_3}{p_2} \cdot p_2 = \frac{2}{n+1} \cdot \frac{2}{n} \cdot \dots \cdot \frac{2}{3} = \frac{2^n}{(n+1)!}$$

2 排除转移法

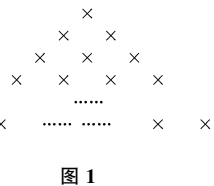


图1

将 n 情形下状态转移为排除 $n-1$ 情形下的相应状态.

例 3 (环形区域染色问题) 如图 2 将一个圆环分成 n ($n \in \mathbf{N}, n \geq 3$) 个区域, 用 m ($m \geq 3$) 种颜色给这 n 个区域染色, 要求相邻区域不使用同一种颜色, 但同一颜色可重复使用, 则不同的染色方案有多少种?

解析 设 p_n 表示将一个圆环分成 n 个区域染色的方案数, p_{n-1} 表示圆环分成 $n-1$ 个区域染色的方案数. 考察 n 个区域染色的方案, 1 区有 m 种染法, 2、3、……、 $n-1$ 、 n 区各有 $m-1$ 种染色方法, 依乘法原理共有 $m(m-1)^{n-1}$ 种染法.

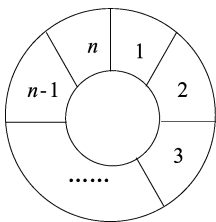


图 2

但这些方案中需排除 n 区和 1 区染上相同颜色的情形. 而排除 n 区与 1 区相同情形, 就是排除 $n-1$ 个区域涂上 m 种颜色的情形, 由此确立递推公式 $p_n = m(m-1)^{n-1} - p_{n-1}$, 进一步

$$p_n - (m-1)^n = -[p_{n-1} - (m-1)^{n-1}],$$

$$p_n - (m-1)^n = [p_3 - (m-1)^3](-1)^{n-3}$$

而 $p_3 = m(m-1)(m-2)$,

$$\text{故 } p_n = (m-1)^n + (m-1)(-1)^n (n \geq 3).$$

用这个结论解 2003 年高考江苏卷: 某城市在中心广场建一个花圃, 花圃分为 6 个部分如图 3, 现要栽种 4 种不同颜色的花且相邻部分不能同色, 由不同的栽种方法有_____种.

只需将图变形为圆环形, 1 区有 4 种栽法. 不同的栽法数为

$$N = 4 \times 6 = 120.$$

例 4 (2012 年全国高中数学联赛 8) 某情报站有 A、B、C、D 四种互不相同的密码, 每周使用其中的一种密码, 且每周都是从上周末使用的三种密码中等可能地随机选用一种. 设第一周使用 A 种密码, 那么第 7 周也使用 A 种密码的概率是_____ (用最简分数表示).

解析 本题与 A、B、C、D 四人之间传球问题具有相同的数学模型.

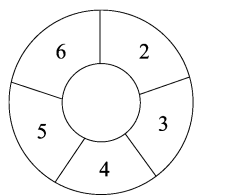


图 3

记 p_k 为第 k ($k \geq 2, k \in \mathbf{N}$) 周使用 A 密码的概率, p_{k-1} 为第 $k-1$ 周使用 A 密码的概率, 则第 k 周使用 A 密码排除第 $k-1$ 周使用 A 密码情形, 第 $k-1$ 周在使用 B、C 或 D 密码的情形下, 下一周使用 A 密码的概率为 $\frac{1}{3}$, 故确立递推公式

$$p_k = \frac{1}{3}(1 - p_{k-1}), \text{ 由 } p_1 = 1 \text{ 进一步求得 } p_k = \frac{3}{4}(-\frac{1}{3})^{k-1} + \frac{1}{4}, \text{ 故 } p_7 = \frac{61}{243}.$$

3 分类转移法

将 n 情形下状态转移为 $n-1$ 情形下的若干不同状态, 分类讨论.

例 5 A、B 两人拿两颗骰子做抛掷游戏, 规则如下: 若掷出的点数之和为 3 的倍数时, 则由原掷骰子的人继续掷; 若掷出的点数不是 3 的倍数时, 由对方接着掷. 第一次由 A 开始掷, 求第 n 次由 A 掷的概率.

解析 设第 n 次由 A 掷的概率为 p_n , 第 $n-1$ 次由 A 掷的概率为 p_{n-1} .

第 n 次由 A 掷转化为第 $n-1$ 次由 A 掷和由 B 掷两种情形,

第 $n-1$ 次由 A 掷, 第 n 次继续由 A 掷, 此时概率为 $\frac{12}{36}p_{n-1}$,

第 $n-1$ 次由 B 掷, 第 n 次由 A 掷, 此时概率为 $(1 - \frac{12}{36})(1 - p_{n-1})$,

$$\text{故 } p_n = \frac{12}{36}p_{n-1} + (1 - \frac{12}{36})(1 - p_{n-1}) (n \geq 2), \text{ 即 } p_n = -\frac{1}{3}p_{n-1} + \frac{2}{3} (n \geq 2), \text{ 由 } p_1 = 1 \text{ 进一步求得 } p_n = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}(-\frac{1}{3})^{n-1}.$$

有时, 需将 n 情形下状态转移为 $n-1$ 、 $n-2$ 、 $n-3$ 、……若干阶段情形下的若干不同状态, 分类讨论, 如下题:

例 6 (2011 年华约自主招生试题) 有一枚均匀的硬币连续抛掷 n 次, 以 p_n 表示未出现连续 3 次正面的概率.

(1) 求 p_1 、 p_2 、 p_3 和 p_4 ;

(2) 探究数列 $\{p_n\}$ 的递推公式, 并给出证明;

(3) 略.

巧解幽隐无穷事 探源究本方顺理

——对一道“独立事件”问题的解法探究有感

浙江省象山中学 杨育池 (邮编:315700)

微课以视频为表现方式,记录教师在教学过程中,围绕教学中的重点、难点与疑点知识或问题而开展的教与学的活动过程,是数字化教与学资源中的一种.留心身边,笔者发现我们平时的答疑解惑、辅导讨论活动也短小精干,虽不能通过网络传播,但更具生成性与互动性,是极真实、极具可视可评性的“微课”.

1 问题不同构,巧解幽隐无穷事

学科辅导时间,我校两位青年教师差不多在同一时间、围绕同一问题为学生展开教学答疑,向笔者展示了一次简短而精彩、完整且精致的同题异构“微课”.

例1 一名工人要看管三台机床,在一小时内机床不需要工人照顾的概率对于第一台是0.9,第二台是0.8,第三台是0.85,求在一小时的过程中不需要工人照顾的机床台数 X 的数学期望(均值).

1.1 析理不透难解惑

甲班一同学问L老师:您上课时讲了这个题的解法,我发现有巧妙的算法: $E(X) = 0.9 + 0.8 + 0.85 = 2.55$ 台.

L老师:嗯,不错,真巧,会不会是巧合呢?

学生:我用其它数据也验算了这种算法,所得期望值还是一样.

L老师:看来这不是巧合了.我们来验证一下吧.

L老师用字母代替具体数字将问题“一般化”:一个工人看管三台机床,在一小时内,这三台机床需要工人照管的概率分别为 p^1, p^2, p^3 ,求在一小时内不需要工人照管的机床台数 X 的数学期望.

师生共同验证:记“第一台,第二台,第三台机床不需照顾”分别为事件 A, B, C .又随机变量 X 的可能取值为0,1,2,3.由独立事件的概率公式与对立事件的概率公式,得

$$P(X=0) = P(\overline{A}\overline{B}\overline{C}) = (1-p^1)(1-p^2)(1-p^3),$$

$$P(X=1) = P(\overline{A}BC + A\overline{B}\overline{C} + \overline{A}\overline{B}C) = p^1(1-p^2)(1-p^3) + p^2(1-p^1)(1-p^3) + p^3(1-p^1)(1-p^2),$$

$$P(X=2) = P(\overline{A}BC + A\overline{B}C + A\overline{B}\overline{C}) = (1-p^1)p^2p^3 + (1-p^2)p^1p^3 + (1-p^3)p^1p^2,$$

$$P(X=3) = P(ABC) = p^1p^2p^3.$$

解析 这里研究(2), p_n 表示抛掷 n 次连续3次来出现正面的概率,则 p_{n-1} 表示抛掷 $n-1$ 次连续3次来出现正面的概率, p_{n-2} 表示抛掷 $n-2$ 次连续3次来出现正面的概率,……依次类推,考察 $n, n-1, n-2$,三个阶段的状态如图4, n 次未出现连续3次正面不可能转化为①;

可以转化为情形②同时保证前 $n-3$ 次未出

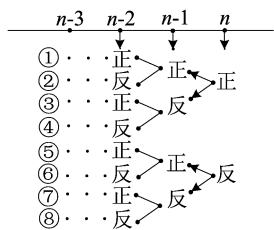


图4

现连续3次正面,对应的概率为 $\frac{1}{8}p_{n-3}$;

可以转化为情形③或④,即第 n 次正、 $n-1$ 次反,同时前 $n-2$ 次未出现连续3次正面,对应的概率为 $\frac{1}{4}p_{n-2}$;

可以转化为情形⑤或⑥或⑦或⑧,即第 n 次反,同时前 $n-1$ 次未出现连续3次正面,对应的概率为 $\frac{1}{2}p_{n-1}$;

$$\text{所以得到 } p_n = \frac{1}{2}p_{n-1} + \frac{1}{4}p_{n-2} + \frac{1}{8}p_{n-3}.$$

(收稿日期:2015-03-30)