

高中数学教学中培养学生直观想象素养的策略初探

201700 上海市青浦高级中学 胡彰迪

摘要:笔者在解读直观想象素养内涵及行为表现的基础上,通过问卷调查的方式调查高中生直观想象素养水平,剖析当前高中生直观想象素养的表现状况,进而结合案例,对培养学生直观想象素养的策略进行探究.

关键词:数学核心素养;直观想象

直观想象是数学学科的六大核心素养之一,培养学生直观想象素养是高中数学教学的一项重要任务.《普通高中数学课程标准(2017年版2020年修订)》(以下简称“课标”)指出:“高中数学课程以学生发展为本,落实立德树人根本任务,培育科学精神和创新意识,提升数学学科核心素养.”课标提出的数学核心素养中,直观想象素养是指借助几何直观和空间想象感知事物的形态与变化,利用空间形式特别是图形理解和解决数学问题的素养.

一、直观想象素养解读

(一)直观想象素养的内涵

课标指出,直观想象主要包括借助空间认识事物的位置关系、形态变化与运动规律;利用图形描述、分析数学问题;建立形与数的联系,构建数学问题的直观模型,探索解决问题的思路.因此,直观想象素养是学生学好数学必不可少的.学生在储备了几何图形及空间思维的基础知识后,以图形为载体对数学问题进行解读,找出研究对象的位置形态及变化规律,使数学问题形象化和具体化,从而寻得结果.

(二)直观想象素养的主要表现

课标指出,直观想象主要表现为建立数与形的联系,利用几何图形描述问题,借助几何直观理解问题,运用空间想象认识事物.对于这四种表现,可以做如下解读.

1. 建立数与形的联系

数学是研究数量关系和空间形式的科学,数具有概括和抽象的特征,形具有具体和直观的特征.以形助数或以数思形,通过数形结合的思想方法,建立数与形的联系,这是学习者最需要培养的一种素养.正如华罗庚先生所言:“数缺形时少直观,形缺数时难入微.数形结合百般好,隔离分家万事休.”

2. 利用几何图形描述问题

利用几何图形描述问题,即能够借助几何图形的形象关系描述一个相对复杂、抽象的问题,也就是

把研究问题图形化.利用图形描述数学问题,有助于学生对事物关系产生直观的感知和认识.

3. 借助几何直观理解问题

对空间形式和数量关系进行直接感知、整体把握,从而把复杂的数学问题变得简明、形象,促进数学的思考和想象.在数学学习中,很重要的一点即是培养学生的数学直观.因为数学的结论常常是“看”出来的,不是“证”出来的,这种“看”依赖的就是数学直观.

4. 运用空间想象认识事物

根据物体特征抽象出几何图形,根据几何图形想象出所描述的物体,想象物体的方位和相互之间的位置关系,描述图形的运动和变化.

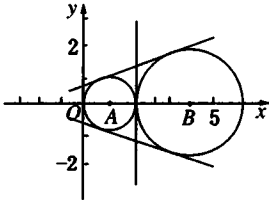
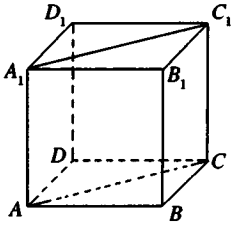
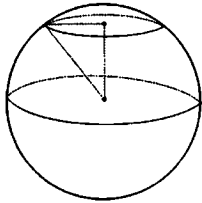
二、高中生直观想象素养现状调查及归因分析

(一)高中生直观想象素养现状调查

直观想象素养在整个高中数学学习阶段有着重要的作用,学生直观想象素养的培养和发展已成为高中数学教师课堂教学的重要目标.为了解高中生的直观想象素养现状,笔者对本校高三学生开展了调查,调查主要采取测试的形式.测试卷的编制以课标中关于学业水平考试和高考命题的建议为指导,以函数、几何与代数、数学建模为内容主线,以课标中对于直观想象素养三个水平的描述为标准;重点考查学生运用图形和空间想象思考问题、运用数形结合解决问题的能力以及通过几何直观洞察表面现象的数学结构与联系、抓住事物本质的思维品质.

这次测试依据课标描述的直观想象素养的三个水平,设置了九道题目,测试卷中的题目主要来源于课标中的直观想象素养测评案例、高中数学教材中的习题以及对高考试题的改编,满分为100分.测评时,并不仅以结果正确与否作为评分依据,而是根据学生解答过程确定所对应的分数,从而衡量学生直观想象素养的水平.笔者以三道试题为例,对直观想象素养的水平评价进行分析(如表1所示).

表1 直观素养水平分析

试题及素养水平	过程及分析	得分说明
第1题(水平一) 400m标准跑道的内圈如图所示,其中左右两边均是半径为36m的半圆弧,求每条直道的长度(圆周率取3.14,结果精确到1m) 	跑道两端的半圆弧合起来是一个完整的圆,所以弧形跑道的长度是 $2 \times 3.14 \times 36 = 226.08\text{m}$,故每条直道长度约为 $(400 - 226.08) \div 2 \approx 87\text{m}$	分析并计算出圆的周长(3分) 求出每条直道的长度(3分)
第4题(水平二) 若点 $A(1,0)$ 与点 $B(4,0)$ 到直线 l 的距离分别为1和2,则这样的直线 l 有几条?	与点 $A(1,0)$ 距离为1的直线即以 A 为圆心,1为半径的圆的切线,与点 $B(4,0)$ 距离为2的直线即以 B 为圆心,2为半径的圆的切线.故问题可转化为求圆 A 与圆 B 的公切线条数.如图可知,这样的直线 l 有三条 	得出特殊直线 $x=2$ (3分) 画出完整示意图,找到另外两条直线并得出正确答案(7分)
第9题(水平三) 如图,在棱长为2的正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中,点 P 是平面 ACC_1A_1 上一动点,且满足 $\overrightarrow{D_1P} \cdot \overrightarrow{CP} = 0$,则满足条件的所有点 P 所围成的平面区域的面积是_____ 	由 $\overrightarrow{D_1P} \cdot \overrightarrow{CP} = 0$ 可知点 P 在空间中的轨迹是以 D_1C 为直径的球面,而点 P 是平面 ACC_1A_1 上一动点,故满足以上条件的点 P 所围成的平面区域即球被平面所截得的圆.如图,球的直径为 $\sqrt{2}$,球心到平面的距离为 $\frac{\sqrt{2}}{2}$,则截面圆的半径为 $\frac{\sqrt{6}}{2}$,故所围成平面区域的面积为 $\pi \cdot \left(\frac{\sqrt{6}}{2}\right)^2 = \frac{3}{2}\pi$ 	根据题意分析出点 P 所围成的平面区域为圆(8分) 画出相关示意图,并求得正确答案(8分)

(二)高中生直观想象素养现状分析

整个高三年级共452名学生参与测试,最终回收有效测试卷443份,有效率为98%.学生得分情况如表2、表3、图1、图2所示.

由表2数据可知,学生直观想象素养测试最低分为18分,最高分为95分,标准差为16.8,说明不同学生的直观素养水平存在一定的差异.由图1可知学生直观想象测试得分大致满足正态分布,说明测试题的设计比较合理,但是观察图2可以发现不及格的学生所占比例偏高,这是值得注意的.

由表3数据可知,我校高三绝大多数学生对于水平一的题目可以取得理想的分数,失分也多是由

于计算错误.水平二试题平均得分为0.63,对于将近半数学生而言,这几道题目存在一定的难度.尤其值得注意的是第6题的得分率与其他几道同水平的题目相比明显偏低,这道题原题是“若实数 x, y 满足 $x+y=12$,求 $\sqrt{x^2+1} + \sqrt{y^2+16}$ 的最小值”.对于直观想象意识较强的学生,很快能找到解题思路,将 $\sqrt{x^2+1} + \sqrt{y^2+16}$ 转化为 $\sqrt{x^2+1} + \sqrt{(x-12)^2+16}$,然后可以看成点 $(x,0)$ 到点 $(0,-1)$ 和 $(12,4)$ 的距离和,问题迎刃而解.但是大部分学生都是尝试用代数方法求函数 $y = \sqrt{x^2+1} + \sqrt{(x-12)^2+16}$ 的最小值,最后都无从下手.可

见,很多学生存在的问题是无法将数学问题直观化,借助图形解决问题.水平三的试题平均得分率仅为0.35,这说明学生在水平三中表现不佳,绝大多数学生还达不到直观想象素养水平三的要求.其中第9

题的得分率尤其低,这道题在表1已呈现过,很多学生连第一步将点P的轨迹看作球面都理解不了,这说明绝大多数的学生缺乏空间想象力,不能利用空间形式感知图形的运动和变化.

表2 总分统计量表

统计量	样本量	平均值	标准差	最大值	最小值
测试分数	443	60.17607	16.79234	95	18

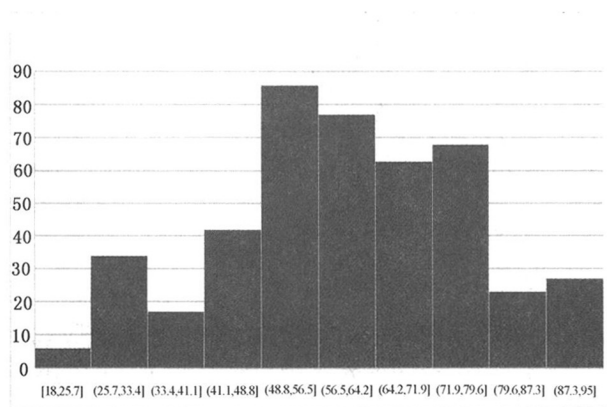


图1 测试分数直方图

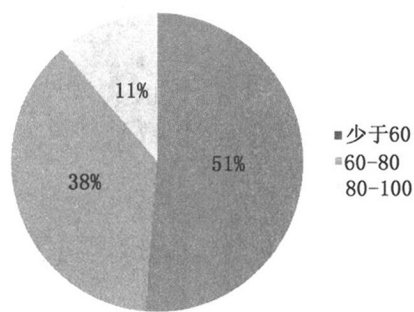


图2 测试分数段比重图

表3 水平一、水平二、水平三得分率量表

题号	1	2	3	4	5	6	7	8	9
水平	水平一	水平一	水平一	水平二	水平二	水平二	水平二	水平三	水平三
平均分	5.88	5.52	7.60	7.40	8.16	5.16	9.24	8.50	2.72
得分率	0.98	0.92	0.95	0.74	0.68	0.43	0.66	0.53	0.17
平均得分率	0.95	0.95	0.95	0.63	0.63	0.63	0.63	0.35	0.35

三、直观想象素养的培养策略

课堂是学生素养形成的主要场所,教师是培养学生核心素养的责任人.在数学教学中,教师要通过向学生传授感知事物、发现问题及解决问题的方法,指引学生在后续的学习过程中逐步习得直观想象能力,形成直观想象素养.而教师自身对直观想象的认识,以及对直观想象素养的重视程度,会对学生直观想象能力的培养与提高产生很大影响.学生直观想象能力不强,很可能是教师对培养直观想象能力不重视造成的.基于上述调查,教师应从以下几方面着手培养学生的直观想象素养.

(一)建立数与形的联系,培养高中生运用直观想象的意识

高中数学很多知识既有“数”的特征,又有“形”的特征,学生从两方面去认识和思考问题,才能拓宽思路,提升直观想象素养.测试中很多学生得低分是因为缺乏直观想象意识,不能建立数与形之间的联系.

案例1 已知实数 x_1, x_2, y_1, y_2 , 且满足条件 $x_1^2 + y_1^2 = 1, x_2^2 + y_2^2 = 1, x_1x_2 + y_1y_2 = \frac{1}{2}$, 则

$\frac{|x_1 + y_1 - 1|}{\sqrt{2}} + \frac{|x_2 + y_2 - 1|}{\sqrt{2}}$ 的最大值为_____.

分析: 本题是2018年上海市高考数学试卷的第12题.因本题中的未知量较多,并且关系较为复杂,所以仅用代数方法解题基本无从下手.如能关注到 $x_1^2 + y_1^2 = 1$ 和 $x_2^2 + y_2^2 = 1$ 这两个表达式的特点,就不难联想到单位圆,而 $x_1x_2 + y_1y_2$ 这种形式又可以联想到向量的数量积,对于 $\frac{|x_1 + y_1 - 1|}{\sqrt{2}}$ 和

$\frac{|x_2 + y_2 - 1|}{\sqrt{2}}$, 则可以联想到点到直线的距离,故此

题适宜通过构造几何图形来解决.

解: 设 $P(x_1, y_1), Q(x_2, y_2)$, 则由 $x_1^2 + y_1^2 = 1, x_2^2 + y_2^2 = 1$ 可知 P, Q 两点都在单位圆 $x^2 + y^2 = 1$ 上, 由 $x_1x_2 + y_1y_2 = \frac{1}{2}$ 可知 $\overrightarrow{OP} \cdot \overrightarrow{OQ} = \frac{1}{2}$, 故

$\angle POQ = 60^\circ$, 即 $\triangle POQ$ 是一个等边三角形, 而 $\frac{|x_1+y_1-1|}{\sqrt{2}} + \frac{|x_2+y_2-1|}{\sqrt{2}}$ 就是 P, Q 两点到直线 $l: x+y-1=0$ 的距离之和.

如图 3-1, 设 P 在 l 上的投影为 P' , Q 在 l 上的投影为 Q' , 另设 PQ 中点为 M , M 在 l 上的投影为 M' , 原点 O 在 l 上的投影为 O' , 则可得到 $|PP'| + |QQ'| = 2|MM'| \leq 2(|MO| + |OO'|) = 2\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \sqrt{3} + \sqrt{2}$, 当 M, O, M' 三点共线, 且 M, O 在直线同侧时, $\frac{|x_1+y_1-1|}{\sqrt{2}} + \frac{|x_2+y_2-1|}{\sqrt{2}}$ 的最大值为 $\sqrt{3} + \sqrt{2}$.

向量具有几何与代数的双重属性, 是引导学生利用数形结合思考和解决问题的好工具. 教师要结合教学内容, 让学生挖掘代数符号背后所隐藏的几何意义, 切身体会数形结合的魅力, 从而理解问题的本质, 直观想象素养也在点滴之间得到提升.

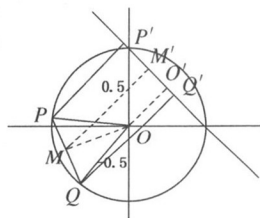


图 3-1

(二) 学会利用图形简化问题, 夯实高中生运用直观想象的基础

图形是数学的主要研究对象, 利用图像描述和分析问题, 能将复杂问题简明化、形象化, 有利于探究问题并形成思路, 进而得到结论. 在高中数学学习过程中, 注重函数图像的应用是培养直观想象素养的一条重要途径.

案例 2 已知关于 x 的不等式 $(2x-1)^2 < ax^2$ 恰有三个整数解, 则实数 a 的取值范围为_____.

分析: 此题如果直接利用函数图像解, 则意味着 $y = (2x-1)^2$ 的图像在 $y = ax^2$ 的图像下方, 而且其横坐标为整数的点恰有三个. 但是这两个函数的图像都是抛物线, 而且其中一个函数的二次项系数还不确定, 导致抛物线的开口大小也不确定, 所以直接画图就不太好处理. 对此, 可将已知条件稍作整理, 显然 $a > 0$, 故 $(2x-1)^2 < ax^2 \Leftrightarrow |2x-1| < \sqrt{ax}$. 这样, 只需画出 $y = |2x-1|$ 和 $y = \sqrt{ax}$ 的图像即可, 而这两个函数的图像都是折线, a 影响的是折线的斜率, 画图时容易控制.

解答: 由 $(2x-1)^2 < ax^2$ 可知 $a > 0$, 故 $(2x-1)^2 < ax^2 \Leftrightarrow |2x-1| < \sqrt{ax}$. 在如图 3-2 所示的直角坐标系中画出 $y = |2x-1|$ 和 $y = \sqrt{ax}$ 的图像. 由图像可知, $\sqrt{a} < 2 \Rightarrow 0 < a < 4$, 记 $f(x) = |2x-1|$, $g(x) = \sqrt{ax}$.

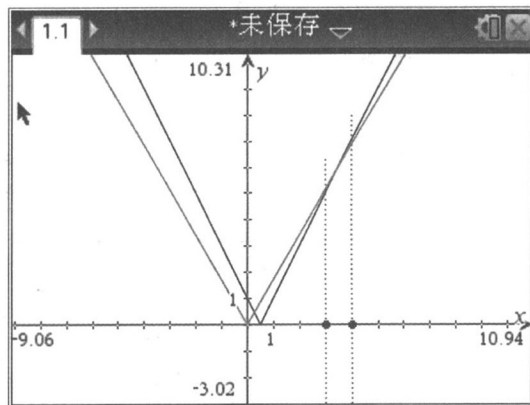


图 3-2

由图 3-2 可知 $|2x-1| < \sqrt{ax}$ 的三个整数解必定是 1, 2, 3.

$$\text{故 } \begin{cases} f(3) < g(3) \\ f(4) \geq g(4) \end{cases}, \text{ 解得 } \frac{25}{9} < a \leq \frac{49}{16}.$$

函数、方程、不等式这三者之间有着千丝万缕的联系, 而函数图像在其中起到了很重要的作用. 学生利用函数图像能更深入、直观地理解问题, 看到问题的本质.

(三) 借助几何直观理解问题, 搭建高中生运用直观想象的桥梁

在数学学习中, 培养学生的几何直观很重要. 因为数学的结论往往是“看”出来的, 而不是“证”出来的. 几何直观是借助“形”的直观理解抽象的“数”, 依托“形”的直观产生对数量关系及事物其他本质属性的感知, 它是直观想象素养一种重要的表现形式.

案例 3 等比数列前 n 项和、无穷等比数列各项和公式的推导, 可以运用直观想象进行如下的设计.

教学片段

问题 1 如图 3-3, 在直角坐标系中有直线 $l_1: y = x$ 和 $l_2: y = qx + a$; 过 l_2 和 y 轴的交点 B_0 作 x 轴的平行线, 交 l_1 于 A_1 ; 过 A_1 作 y 轴的平行线, 交 l_2 于 B_1 ; 再过 B_1 作 x 轴的平行线, 交 l_1 于 A_2 , 如此作下去, 依次得到线段 $B_0A_1, A_1B_1, B_1A_2, A_2B_2, \dots, B_{n-1}A_n, A_nB_n$. 观察 B_n 坐标的特点, 会得到什么发现? 能否由此推导求等比数列前 n 项和的公式?

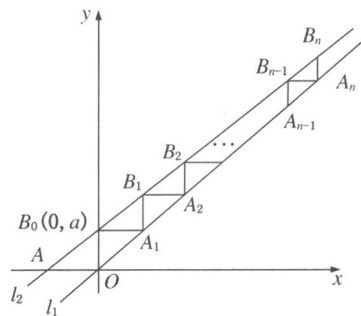


图 3-3

生:根据平行线的作法,易得 $OB_0 = B_0A_1 = a$, $A_1B_1 = B_1A_2 = aq$, $A_2B_2 = B_2A_3 = aq^2, \dots, A_{n-1}B_{n-1} = B_{n-1}A_n = aq^{n-1}$, $A_nB_n = aq^n$, B_n 的坐标为 $(a+aq+\dots+aq^{n-1}, a+aq+\dots+aq^n)$. 记 $S_n = a+aq+\dots+aq^{n-1}$, 则 B_n 的坐标为 (S_n, S_n+aq^n) , 因为 B_n 在直线 l_2 上, 所以 $S_n+aq^n = qS_n+a$, 从而得出 $S_n = \frac{a(1-q^n)}{1-q} (q \neq 1)$.

问题2 在上述条件下, 若 $0 < q < 1$, 还能发现什么?

生:若 $0 < q < 1$, 则 l_1 与 l_2 必定相交, 可求得交点坐标为 $(\frac{a}{1-q}, \frac{a}{1-q})$, 当 $n \rightarrow +\infty$ 时, B_n 无限逼近两直线的交点, 所以, $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \lim_{n \rightarrow \infty} S_{n+1} = \frac{a}{1-q}$.

用上述方法推导等比数列前 n 项和的公式比错位相减法更为清晰, 而且运算过程也更简明. 在此基础上, 求无穷等比数列各项和的公式则是顺理成章, 也更能让学生理解公式的本质. 数学教材中的很多公式都有其特定的几何意义, 如果教师在教学过程中挖掘这些数学公式的几何意义, 重视几何直观在知识理解及问题解决方面的重要作用, 那么学生运用直观想象的能力也会得到进一步的提升.

(四) 运用空间想象认识事物, 增强高中生运用直观想象的能力

直观想象素养的培养不应局限于利用平面图形解决问题, 教师还要引导学生对事物的空间形式进行观察、分析和认知, 对空间图形的点、线、面的位置关系与变化进行空间想象, 进而大胆猜想, 深入探究.

案例4 如图3-4, 边长为2的正方形 $ABCD$ 中, E, F 分别是边 AB, BC 的中点, $\triangle AED, \triangle EBF, \triangle FCD$ 分别沿边 DE, EF, FD 折起, 使 A, B, C 三点重合于点 A' , 若四面体 $A'EFD$ 的四个顶点在同一个球面上, 则该球的表面积为_____.

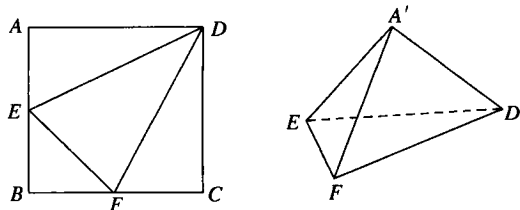


图3-4

分析: 求四面体外接球的表面积, 关键是要算出外接球的球半径. 问题在于, 即使四面体的所有棱长都能算出, 因为这个四面体不特殊, 其外接球的球心也很难确定, 球半径更难以算出; 但如能注意到 $A'E, A'F, A'D$ 两两垂直, 并联想到从长方体一个

顶点出发的三条棱也具有这样的特征, 就容易想到将这个四面体置于长方体中进而解决问题了.

解: 基于 $A'E = 1, A'F = 1, A'D = 2$, 构造一个三条棱长分别为 1, 1, 2 的长方体, 将四面体置于其中 (如图3-5所示). 根据对称性, 四面体的外接球即长方体的外接球, 而长方体外接球的直径即它的对角线, 故外接球半径 $R = \frac{\sqrt{1^2+1^2+2^2}}{2} = \frac{\sqrt{6}}{2}$, 则 $S = 4\pi R^2 = 6\pi$.

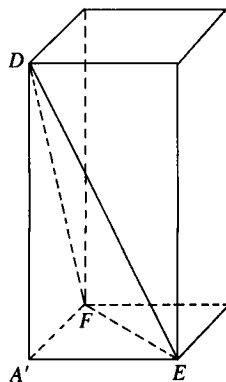


图3-5

在立体几何教学中, 教师要引导学生运用直观感知、度量计算等方式认识和探究空间图形的性质, 想象物体的方位和相互之间的位置关系. 学生在学习过程中, 可利用长方体、球、圆柱、圆锥等基本空间几何体培养自身的空间想象能力, 进而提升直观想象素养.

四、启示

直观想象作为数学核心素养之一, 在数学学习中具有重要作用. 教师在教学实践中应依据课标, 加强对学生的直观想象素养的培养, 将数学知识点的教学与直观想象素养的培养有机结合, 注重运用直观图形启发和引导学生探究新知识, 解决新问题.

另外, 要重视让学生体验利用几何直观和空间想象解题的便捷, 并在惊叹这一思想方法奇效的过程中, 提高对它的兴趣. 将直观想象素养的培养很好地融入高中数学课堂教学, 还需要不断地实践探索.

参考文献

- [1] 中华人民共和国教育部. 普通高中数学课程标准: 2017年版 2020年修订[S]. 北京: 人民教育出版社, 2020.
- [2] 史宁中, 王尚志. 普通高中数学课程标准(2017年版 2020年修订)解读[M]. 北京: 高等教育出版社, 2020.
- [3] 郑雪静, 陈清华, 王长平, 等. 高中生直观想象素养的测量与评价研究[J]. 数学教育学报, 2020(4).
- [4] 刘春林. 落实高中生数学直观想象素养的教学研究[D]. 石家庄: 河北师范大学, 2018.
- [5] 刘永和. 论如何在高中数学教学中培养学生的直观想象能力[J]. 教学方法, 2020(4): 28.
- [6] 汪晓勤. HPM: 数学史与数学教育[M]. 北京: 科学出版社, 2017.
- [7] 王亚东. 新课标下高中数学课堂中培养学生直观想象素养的研究[D]. 岳阳: 湖南理工学院, 2019.