

基于“问题链”的数学探究教学的设计和思考

——以“用向量法研究三角形的性质”为例

310012 浙江省杭州学军中学 张春杰

摘要:“用向量法研究三角形的性质”这一单元的教学要求是学生以课题研究和项目学习相结合的形式,以向量法为研究手段,以问题链为教学主线,对三角形的性质进行“再研究”.学生通过经历探究过程,感受知识发生、发展和形成的过程,掌握数学探究活动的研究思路和研究策略.在此过程中,学生直观想象、数学运算等核心素养的培育得以落地,数学探究活动的育人价值得到凸显.

关键词:问题链;数学探究活动;向量法;三角形;性质

数学探究活动是运用数学知识解决数学问题的重要的实践活动,是高中数学新课程的主线之一^[1].“用向量法研究三角形的性质”是人教A版新教材中的一个数学探究活动.杭州市以“用向量法研究三角形的性质”为活动主题,组织了一场青年教师课堂教学评比活动,笔者全程观摩了此活动,并进行了教学设计和思考,现对其展开论述.

一、内容和内容解析

(一)内容:用向量法研究三角形的性质

本单元内容分为三个课时.

第1课时,回顾初中学习的三角形性质,并从几何的角度进行研究方法的再总结.

第2课时,梳理向量法的三部曲,并以三角形的重心性质研究为例,进行传统法和向量法的对比研究.

第3课时,用向量法研究三角形外心、重心、内心和其他几何性质.

(二)内容解析

向量兼具几何和代数的特征,是沟通几何和代数的桥梁,向量单元的教学任务是理解向量语言和通过向量法解决几何问题.三角形是几何中最简单、最常见的平面图形,学生通过向量法解决三角形问题,感悟向量法的特点、便捷性和力量.

通过证明与几何法的对比,提炼向量法研究平面几何问题的研究架构:首先,用几何的眼光观察性质;其次,用向量(数)表示三角形(形)性质;第三,几何性质的向量运算(数);最后,通过向量运算研究三角形的性质^[2].通过向量运算研究图形性质是方法和策略的提升,开辟了一条新的运算推理之路.

向量法是直观想象、逻辑推理和数学运算的聚焦点,蕴含丰富的数学思想.这就需要教师从整体的高度进行设计,通过巧妙的数学情境和问题引领学

生进行探究,在数学探究的过程中养成独立思考、交流合作的习惯,培养探索精神,体验成功的乐趣.

(三)教学重点

用向量方法研究三角形性质的三部曲.

二、目标和目标解析

(一)单元目标

1. 会用几何的眼光观察图形,能用向量及其运算刻画平面几何中元素的关系.

2. 能用向量法证明三角形的有关性质,掌握用向量法研究几何问题的基本策略.

3. 通过探究三角形的“新”性质,体验数学探究的过程和方法,体会向量法开辟了一条新的运算推理之路.

(二)目标解析

1. 能用向量的运算刻画几何图形中的平移、共线、垂直、相似、距离、角度等.

2. 能用向量法研究三角形的有关性质,掌握用向量法研究几何问题的三部曲.第一步,几何问题向量化;第二步,向量的代数运算;第三步,向量表达为几何问题.

3. 掌握向量法研究三角形的方法,并继续探究三角形的“新”性质,提升独立进行课题研究的能力.

三、教学问题诊断分析

(一)问题诊断

首先,学生对课题和项目研究比较陌生.《普通高中数学课程标准(2017年版2020年修订)》对于数学探究活动的描述是:围绕某个具体的数学问题开展课题研究,并实现解决问题的过程.教材建议以课题研究的形式展开,课题研究包含四个环节:选题、开题、做题和解题.但是学生进行课题研究的经

验略有欠缺,为指导学生更好地进行课题形式的探究活动,教师应该积极参与到学生的课题研究进程中,给予适当的指导.

其次,学生认为向量法就是坐标法.向量兼具数、形于一身,对向量及其运算不能狭隘地进行理解,教学中要强化向量法是“代数运算”和“图形运算”的结合.向量法是利用运算律,通过向量运算解决几何问题,不能简单理解为坐标的代数运算.这一点在教学中要重点凸显出来.

(二)教学难点

如何合理地将三角形的几何性质转化为向量运算.

四、教学支持条件分析

(一)对本单元三个课时的教学进行适当安排

对于本单元三个课时的数学探究活动,考虑到教学的时间和学生的情况,可以采取第1课时先从宏观层面引导学生回顾、梳理初中几何问题的研究方法和研究结论,并以研究报告的形式交流;第2课时以三角形的重心为对象展开研究,探索重心的几何性质,并从几何和向量两个维度进行研究、对比;第3课时可以采用指定几个研究课题(如将学生分为外心组、内心组和垂心组等)分别展开研究,撰写研究报告,课堂上进行互动交流.第2课时和第3课时的间隔时间应尽可能长,以便学生有充足的时间进行研究.

(二)技术条件

教师可以对学生进行“几何画板”等几何软件使用的培训,为新性质探究提供帮助.

五、课时教学设计

用向量法研究三角形的性质(第2课时)

(一)课时教学内容

三角形重心性质的研究.

(二)课时教学目标

1. 通过从几何角度观察图形,体会几何图形的本质特征.
2. 通过将几何性质转化为向量的运算,掌握向量垂直、共线等运算特征.
3. 通过研究解决重心的性质问题,掌握向量法解决问题的三部曲.

(三)教学重点和难点

教学重点:向量法研究问题的三部曲.

教学难点:几何问题如何转为为合适的向量问题.

(四)教学过程设计

环节1 创设问题情境

问题1 三角形的重心是怎么定义的?

追问1 物理上的重心是怎么定义的?

追问2 三角形的中线一定交于一点吗?

师生活动:在提出问题1后,学生思考,教师巡视,学生回答并总结,剖析定义.

设计意图:引导学生回顾重心的定义,激发思维的起点.重心是经常被使用的概念,通过回顾这个概念是如何定义的,三角形的三线是否一定共点,学生回到思维的起点,为接下来的研究做好铺垫.

环节2 从几何角度研究

问题2 如何从几何角度对三角形三条中线交于一点进行证明?

追问1 一般证明三角形三线共点有什么样的策略?

追问2 你能给出证明的方法吗?

师生活动:在第1课时已经回顾并梳理了初中研究三角形的方法,可以提前把学生分为若干组,进行相关问题的探讨,这里教师引领学生再思考、再梳理、再研究,然后学生汇报证明的思路和过程.

设计意图:在定义出现认知冲突后,很自然地需要进行分析解决.对于解决什么和如何解决,教师引领学生进行分析.这是一个学生已有的知识结构能够解决的问题,可以放手给学生,通过小组合作、组长汇报,学生经历发生、发展和解决的过程.通过知识的梳理、方法的整合、思想的碰撞,学生在用几何法解决三条中线共点的过程中,对重心性质的认识进一步提升.

环节3 从向量角度研究

问题3 从向量的角度能进行证明吗?

追问1 用向量法证明几何问题的步骤是什么?

追问2 从向量的角度证明三线共点的策略是什么?

追问3 你能给出详细的证明吗?

师生活动:将问题抛给学生,学生分组思考、讨论和完善;教师巡视、指导,参与学生的研究过程,然后让学生以组为单位进行汇报交流,在汇报交流完毕后,其他学生可以进行提问.

设计意图:虽然用几何法解决几何问题看起来比较简洁,但是不容易展开思考,如三角形三条中线交于一点的证明需要添加辅助线,要求有很强的逻辑思维能力.向量法开辟了一种证明几何问题的新思路,用它解决一些几何问题(垂直、平行等)比较方便.

环节4 继续重心性质的研究

问题4 重心还有哪些性质?

追问1 如何从向量的角度表达?

追问2 如何用向量法进行证明?

师生活动:仍然将问题抛给学生,学生分组进行研究、讨论,教师作为指导者和参与者,学生派代表分组汇报,各个小组交流汇报。

设计意图:之前重点解决的是重心存在的问题,接下来让学生从横向视野进行探究。既然是中线的交点,有中点存在,可以延伸出哪些性质?培养学生感知、猜想和证明的能力。

环节5 课堂小结

问题5 请你带着下面的问题对本节课进行小结。

- (1)几何法和向量法各有哪些特点?
- (2)解决向量问题的步骤有哪些?
- (3)用向量法解决问题的关键点在哪里?

师生活动:给学生时间思考、梳理和回顾,小组内部先进行交流,然后小组派代表发言,在学生发言的基础上,教师进行点评和总结。

设计意图:通过问题引导学生对知识、方法和思想进行结构化梳理,反思解决问题的方法和策略,体会问题本身蕴含的数学思想,不仅有助于提升学生对问题本质的认识,也有助于学生养成善于反思、勤于反思的习惯。

环节6 课外课题研究

问题6 请你在课后围绕下面几个问题从向量的角度加以研究,并撰写小论文。

- (1)三角形的外心怎么定义?有哪些性质?
- (2)三角形的内心怎么定义?有哪些性质?
- (3)三角形的垂心怎么定义?有哪些性质?
- (4)三角形的旁心怎么定义?有哪些性质?
- (5)对于三角形,你还能发现哪些性质?

设计意图:问题是课堂教学的心脏,让学生带着问题走进课堂,在问题的解决中体会数学探究的策略和方法,并将课堂中掌握的解决问题方法应用于课堂外新的问题解决中。课堂教学的核心在于培养学生独立思考和研究问题的策略,提升研究问题的能力,培养学生的数学核心素养。

六、教学设计说明和思考

(一)数学探究活动应凸显单元整体设计

“用向量研究三角形的性质”是数学探究课,共三个课时。需要对这三个课时进行整体的教学设计,不能将其割裂开来,要凸显知识的一致性和思想的连贯性,通过数学知识发生、发展过程和学生思维过程两方面的融合来构建。从知识方法的层面来说,重点强化向量法解决几何问题;从思想层面来说,凸显几何问题如何转为合适的向量问题,如何进行课题研究。数学探究活动不仅是一次课题形式的学习,更重要的是培养学生独立研究问题的能力。

(二)单元课时设计时应凸显问题链设计主线

章建跃博士指出,教学设计要以“问题链”的形式呈现,“问题链”构成课时的教学主线^[3]。“问题链”的设计要具有适切性,能对学生理解概念、形成技能和领悟思想有推动作用,要能够激发学生探究的热情,推动学生主动进行研究。

本课时设计从重心的定义(为何三角形三条中线交于一点)出发,让学生的思维回到研究的起点(这样定义重心可行吗),自然着手解决三条中线交于一点的问题,然后抛出环环相扣的问题。你能从几何角度进行研究吗?有几种方法?能用向量法证明吗?用向量法解决的步骤是什么?有几种方法?向量法和几何法各有什么特点?这些问题层层深入,一步一步地激发学生的探究欲望,学生在解决问题过程中体验探究的思路和方法,为接下来的研究搭建平台。“三角形外心等如何定义?有哪些性质?”“请从向量法的角度研究,并撰写小论文,后期进行交流汇报”引导学生以小组为单位进行课后研究,真正形成大课堂的理念,培养学生独立进行研究的能力。

(三)教学设计应凸显数学育人的价值理念

整个教学设计过程中,学生的主体地位要凸显出来^[4]。考虑到教学的实际情况,教师要适当参与和设计一些问题,让学生避免走过多的冤枉路,以便有更多精力进行小组合作,选择研究手段和方法,体验研究新问题的思路和方法,让学生经历知识发生、发展和形成的过程。重心存在问题的顺利解决也提升了学生的深度学习能力,促使学生在批判中思维,在思维中成长。在完整体验向量解决问题的一般过程后,学生再独立地进行深层次(重心的其他性质)和更广范围(外心等)的研究,改变了教学过程中教师主导课堂的局面,使学生真正成为探究的主体,凸显育人的教学理念。

参考文献

- [1] 中华人民共和国教育部. 普通高中数学课程标准:2017年版2020年修订[S]. 北京:人民教育出版社,2020.
- [2] 陈利利,张曜光.“用向量法研究三角形的性质”教学设计、教学反思与点评[J]. 中学数学教学参考(上旬),2020(13):24-30.
- [3] 章建跃. 核心素养立意的高中数学课程教材教法研究[M]. 上海:华东师范大学出版社,2021.
- [4] 周远方,张园园,范俊明.以课题研究开展探究活动以项目学习凸显育人价值——“正方体截面的探究”课例评析[J]. 中国数学教育,2021(6):53-54;64.