

一道上海春季高考压轴题的解法探究与推广

201101 上海市七宝中学 李佳伟 李燕红

摘要:笔者对2018年上海春季高考的压轴题进行研究,首先给出此题的解答,其次对其中各个小问进行推广.事实上,此题的实质就是数列增长快慢的问题,笔者根据其本质对问题的结论进行推广,有助于培养学生对问题的探究能力.

关键词:上海;春季高考;压轴题;解法;推广

1 试题呈现

试题(2018 上海春考-21) 若 $\{c_n\}$ 是递增数列,数列 $\{a_n\}$ 满足对任意的 $n \in \mathbb{N}^*$, 存在 $m \in \mathbb{N}^*$, 使得 $\frac{a_m - c_n}{a_m - c_{n+1}} \leq 0$, 则称 $\{a_n\}$ 是 $\{c_n\}$ 的“分隔数列”.

(1) 设 $c_n = 2n$, $a_n = n + 1$, 证明: 数列 $\{a_n\}$ 是 $\{c_n\}$ 的“分隔数列”;

(2) 设 $c_n = n - 4$, S_n 是 $\{c_n\}$ 的前 n 项和, $d_n = c_{3n-1}$, 判断数列 $\{S_n\}$ 是否是数列 $\{d_n\}$ 的“分隔数列”, 并说明理由;

(3) 设 $c_n = aq^{n-1}$, T_n 是 $\{c_n\}$ 的前 n 项和, 若数列 $\{T_n\}$ 是 $\{c_n\}$ 的“分隔数列”, 求实数 a, q 的取值范围.

分析: 根据题目条件 $\frac{a_m - c_n}{a_m - c_{n+1}} \leq 0$, 且 $\{c_n\}$ 是递增数列, 易得对任意的 $n \in \mathbb{N}^*$, 存在 $m \in \mathbb{N}^*$, 使得 $c_n \leq a_m < c_{n+1}$. 因此, 数列 $\{c_n\}$ 的“分隔数列”, 则为满足在 $\{c_n\}$ 中任意相邻的两项 c_n, c_{n+1} 之间至少存在一项的数列. 小问(1)给出两个递增的等差数列, 而等差数列具有比较特殊的性质, 值得对此问题做进一步探究. 小问(2)中的 d_n 依旧是等差数列, 只不过 d_n 定义为 c_{3n-1} , 项与项之间的距离扩大了, 但这并不改变其本质特征, S_n 是一个二次多项式, 二次多项式在一定范围内的增长速度比一次多项式快, 这就是小问(2)的本质所在. 在小问(2)的基础上, 小问(3)将其改成了相对复杂的等比数列, 但题目的本质没有改变, 事实上就是有关数列增长快慢的问题.

总之, 以应用能力和探究能力立意的“新定义”型问题发挥了高考区分功能, 对考生思维的敏锐性和独创性也提出较高要求. 仔细审题发现, “新定义”型问题并非完全的创新题, 而是教材知识的重新组合或再加工. 因此, 考生应当充满必胜的信心, 明确问题类型, 揭示问题实质, 最终成功解决问题.

2 解法探究

小问(1) 解答: 由上述分析可知, 要找到 m 使得

$2n \leq m+1 < 2n+2$, 只要取 $m=2n$ 即可.

小问(2) 解答: 由题意易得 $d_n = 3n - 5$, $S_n = \frac{3n^2 - 7n}{2}$, 当 $n=4$ 时, $7 \leq \frac{3m^2 - 7m}{2} < 10$, 而不存在 $m \in \mathbb{N}^*$ 使得此不等式成立, 所以 $\{S_n\}$ 不是 $\{d_n\}$ 的“分隔数列”. 事实上, 因为 $\{S_n\}$ 的项数比 $\{d_n\}$ 高, 所以当 n 充分大时, $\{S_n\}$ 中项与项之间的距离远远大于 $\{d_n\}$, $\{S_n\}$ 无法把 $\{d_n\}$ 中的每一项分隔开来, 因此, 可以从直观上判断出 $\{S_n\}$ 不是 $\{d_n\}$ 的“分隔数列”.

小问(3) 解答: $c_n = aq^{n-1}$ 当 $q \neq 0$ 时是等比数列, 由于题目要求 $\{c_n\}$ 为递增数列, 所以只有两种情况, 即 $a < 0, 0 < q < 1$ 或者 $a > 0, q > 1$. T_n 是 $\{c_n\}$ 的前 n 项和, 因此, 当 $a < 0, 0 < q < 1$ 时, $\{T_n\}$ 是递减数列, 而 $T_1 = c_1$, 显然, $\{T_n\}$ 不是 $\{c_n\}$ 的“分隔数列”. 下面考虑 $a > 0, q > 1$ 的情况, 由于 $T_1 = c_1, c_2 < c_1 + c_2 = T_2 < c_3, c_3 < c_1 + c_2 + c_3 = T_3 < c_4, \dots, c_n < c_1 + c_2 + \dots + c_n = T_n < c_{n+1}$, 因此可以得到 $m=n$, 进一步得

$$\begin{cases} \frac{a(1-q^n)}{1-q} \geq aq^{n-1} \\ \frac{a(1-q^n)}{1-q} < aq^n \\ a > 0 \\ q > 1 \end{cases}, \text{ 推得 } q^{n+1} - 2q^n + 1 > 0, \text{ 故}$$

有 $(q-2)q^n + 1 > 0$, 所以对任意的 $n \in \mathbb{N}^*$, $(q-2)q^n + 1 > 0$ 恒成立. 若 $1 < q < 2$, 当 $n > \left[\log_q \frac{1}{2-q} \right] + 1$ 时, $(q-2)q^n + 1 < 0$; 当 $q \geq 2$ 时, $(q-2)q^n + 1 > 0$ 恒成立, 因此 $a > 0, q \geq 2$.

3 命题推广

推广 1 设 $c_n = s_1 n + t_1, a_n = s_2 n + t_2$, 其中 $s_1 \geq s_2 > 0$, 若 $a_1 = s_2 + t_2 < c_2 = 2s_1 + t_1$, 则 $\{a_n\}$ 是 $\{c_n\}$ 的“分隔数列”.

证明: 利用反证法. 若 $\{a_n\}$ 不是 $\{c_n\}$ 的“分隔数列”, 则存在 $k_1, k_2 \in \mathbb{N}^*$ 使得 $a_{k_1} < c_{k_2} < c_{k_2+1} \leq a_{k_1+1}$,

(下转第 36 页)

④既是奇函数又是偶函数的函数一定是 $f(x) = 0(x \in \mathbf{R})$;

⑤若 $f(x)$ 是奇函数,且在 $x=0$ 处有定义,则 $f(0)=0$;

⑥奇函数 $f(x)$ 与偶函数 $g(x)$ 的公共定义域非空,则 $h(x)=f(x)g(x)$ 必为奇函数.

设计意图: 让学生领会奇函数、偶函数的定义与性质,领会定义增一字则多余、少一字则不明的严谨性,使用符号表示数学抽象背后的简洁美、统一美.

3. 是否存在定义在 $\mathbf{R}$ 上且既是奇函数又是偶函数的函数? 若存在,写出所有满足此条件的函数; 若不存在,说明理由.

设计意图: 帮助学生理解数学概念的严谨性,体会数学的求真、向善、尚美(这也是罗中的校风).

罗中的课堂实践表明,基于学生的认知水平,根据国家育人目标对于美育的要求,在课堂中引入真实情境,挖掘数学本身的美育元素,即数学本身蕴含的简洁美、对称美、抽象美、统一美等特征,利用类比

猜想、特殊到一般、归纳与演绎等思维方式,引导学生发现美、鉴赏美,进而创造美,不断提升数学审美能力,使学生喜爱数学、享受数学学习带来的乐趣,让美成为学生健康成长的必备素养.

参考文献

- [1] 史宁中,王尚志.普通高中数学课程标准(2017年版2020年修订)解读[M].北京:高等教育出版社,2020:63.
- [2] 上海市中小学(幼儿园)课程改革委员会.普通高中教科书·数学:必修第一册[M].上海:上海教育出版社,2020:115-117.
- [3] 董志彪,冯园园.高中数学美育的学科特征及实现策略[J].教学与管理,2021(11):107-109.
- [4] 史宁中,王尚志.普通高中数学课程标准选修课程用书·数学D类 美与数学[M].北京:人民教育出版社,2021.
- [5] 蔡天新.数学与人类文明[M].北京:商务印书馆,2012.

(上接第32页)

由此可得 $s_2 = a_{k_1+1} - a_{k_1} > c_{k_2+1} - c_{k_2} = s_1$, 这与 $s_1 \geq s_2 > 0$ 矛盾,所以结论成立,证毕.

评析: 从这个结论可见,若 $\{a_n\}$ 与 $\{c_n\}$ 都是递增等差数列,只要满足 $\{a_n\}$ 的公差不大于 $\{c_n\}$ 的公差,也就是说数列 $\{a_n\}$ 中的项排列得比 $\{c_n\}$ 中的项“紧密”,并且 $\{a_n\}$ 的首项 a_1 比 $\{c_n\}$ 中的第二项 c_2 小,则 $\{a_n\}$ 可以把 $\{c_n\}$ 中的项分隔开来,这与我们的直观感受是一致的.

推广2 设 $c_n = t_q n^q + t_{q-1} n^{q-1} + \dots + t_1 n + t_0$, $a_n = s_p n^p + s_{p-1} n^{p-1} + \dots + s_1 n + s_0$, 其中 $p > q$, $p, q \in \mathbf{N}^*$, 且 c_n 单调递增, $s_p > 0$, 若 $p > q$, 则 $\{a_n\}$ 不是 $\{c_n\}$ 的“分隔数列”.

证明: 不妨设 $c_1 \leq a_1 < c_2$, 由于 $p > q$, 故 $\lim_{k \rightarrow \infty} (a_{k+1} - c_{k+2}) = +\infty$, 因此存在正整数 M , 当 $k > M$ 时, 有 $a_{k+1} > c_{k+2}$, 所以 $\{a_n\}$ 中至多有 k 项落在区间 $[c_1, c_{k+2})$ 上, 即为 $a_1, a_2, \dots, a_k$. 把 $[c_1, c_2), [c_2, c_3), \dots, [c_{k+1}, c_{k+2})$ 这 $k+1$ 区间当作抽屉, 而把 $a_1, a_2, \dots, a_k$ 当作 k 个小球, 根据抽屉原理, 至少有一个区间 $[c_m, c_{m+1})$, ($m=1, 2, \dots, k+1$) 不含任何 $\{a_n\}$ 中的项, 因此 $\{a_n\}$ 不是 $\{c_n\}$ 的“分隔数列”, 证毕.

推广3 设 $\{c_n\}$ 为递增数列, T_n 是 c_n 的前 n 项和, 若 $\{T_n\}$ 为 $\{c_n\}$ 的“分隔数列”, 若 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{c_{n+1}}{c_n}$ 存在, 则

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{c_{n+1}}{c_n} \geq 2.$$

证明: 由之前的分析易得 $c_n < T_n < c_{n+1}$, 显然

$\lim_{n \rightarrow \infty} T_n = +\infty$, 因此 $\lim_{n \rightarrow \infty} c_n = +\infty$. 当 n 充分大时, 由于 $c_n > 0$, 所以由极限的保不等式性得 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{T_n}{c_n} \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{c_{n+1}}{c_n}$.

因为 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{c_{n+1}}{c_n}$ 存在, 不妨设 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{c_{n+1}}{c_n} = t$, 则由数学分析中的 Stolz 定理得 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{T_n}{c_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{T_n - T_{n-1}}{c_n - c_{n-1}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{c_n}{c_n - c_{n-1}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{1 - \frac{c_{n-1}}{c_n}} = \frac{1}{1 - \frac{1}{t}} \leq t$, 解得 $t = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{c_{n+1}}{c_n} \geq 2$.

由推广3可见, 原题的答案 $a > 0, q \geq 2$ 也在情理之中. 此外, 可加强以上结论或提出一些新结论.

4 总结

数学题目千千万, 学生应善于利用做过的题目, 从中汲取有用的模型、处理方法、结论, 建立题目之间的联想系统. 新课标提出的数学核心素养包括数学建模和直观想象. 应该建立哪些模型, 想象哪些方法和结论? 建立命题联想系统不失为一种好方法.

学生一直在解给定的题目, 与解决问题相比, 提出问题或许更为重要. 在教学的过程中, 教师要为学生提供微探究的机会, 从给定的题目中提出新的问题, 解决新的问题. 在教学中不仅教会学生如何思考问题, 还要帮助学生学会提出问题.

参考文献

- [1] 朱丽萍. 数列中的存在性问题研究[J]. 中学教学参考, 2013(9):40-41.