

基于数学理解的“正弦函数图像与性质”教学

200333 上海市晋元高级中学 刘庆敏

摘要:随着新课标和新教材的推进和落实,基于数学理解的课堂教学越来越受到重视.笔者以“正弦函数图像与性质”这一内容为例,兼顾数学严谨性和学生认知特点,通过对比上海二期课改教材、人教社A版教材和上教社2020年版新教材中这一部分的差异,探讨如何从学生理解数学概念本质出发,利用研究一般函数的工具和方法来研究具体函数的图像和性质,同时通过两条并行交织的教学主线讨论如何选取适当的教学资源帮助学生突破难点,更好地理解数学内容的本质,落实“四基”,培养“四能”,发展学生的数学抽象、直观想象和逻辑推理等核心素养.

关键词:数学理解;正弦函数;图像;性质

一、问题的提出

上海教育出版社2020年版普通高中教科书的“前言”强调:“在任何情况下,都要基于课程标准,贯彻‘少而精’‘简而明’的原则,精心选择与组织教材内容,抓住本质,尽可能给学生以明快、清晰的感受,使学生能更深入地领会数学的真谛.”学生对于数学内容本质的理解不是自然而然发生的,需要教师在教学中根据教学内容精心设计教学环节,选取适当的教学资源,铺设合理的台阶帮助学生更好理解数学内容的本质.

在正弦函数图像与性质的教学中,有的教师会基于教材直接给出正弦函数的定义,然后根据第四章、第五章学习得到的研究函数的工具和方法画出正弦函数图像,再研究其主要性质.整个过程中,引入看似水到渠成,然而学生对这一几何量作为自变量如何数量化为横坐标心存犹疑.虽然不经深思也能囫圇吞枣地掌握正弦函数的图像,进而利用函数图像研究三角函数最重要的性质——周期性,但是在深思之后,学生不禁会产生疑问:同样是函数,为什么三角函数会有周期性?其他函数(如幂函数、指数函数、对数函数)为什么不存在周期性?自变量 x 在单位圆中明明是一个几何量——角,为什么可以表示在 x 轴上?笔者认为,解决这些问题的方法在于摸清学生数学学习的起点,铺设合理的台阶,帮助学生理解三角函数的本质,特别是用好单位圆刻画三角函数中的自变量与因变量、几何元素与代数对象之间的对应关系,这样可以在学生的现实起点上进行教学,同时梳理知识的逻辑起点,促进学生对知识的深度理解、灵活迁移和主动应用.

二、三角函数的本质和变量间的对应关系

史宁中在《数形结合与数学建模》中提到:初中

锐角三角函数表达的是关系的度量,而不是关系本身;如果将三角函数作为函数,那么这个函数应当描述角的大小与三角函数值的关系.这种关系指的是自然界和生活中的周期现象,事实上绝大多数周期性都可以通过三角函数的线性组合予以表征.项武义在《基础几何学》中提到,正弦函数、余弦函数是一对起源于圆周运动、密切配合的周期函数,它们是解析几何学和周期函数的分析学中最为基本和重要的函数;而正弦函数、余弦函数的基本性质乃是圆的几何性质(主要是对称性)的直接反映.由此可见,利用单位圆研究三角函数的图像和性质是从本质出发的溯源之举.

函数图像本质上是满足函数对应法则的所有有序点对 (x, y) 组成的集合,由于有序点对中 x 与 y 的对应关系而在平面直角坐标系中呈现为一条曲线.而三角函数的图像刻画的是三角函数值随着作为自变量的角变化而呈现周期性变化的一条曲线.

学生在前期经验中学到的函数的对应关系都是代数运算规律的反映,但三角函数不以“代数运算”为媒介,是几何量(角与有向线段)之间的直接对应,不是通过对角进行四则运算或指数、对数代数运算得到函数值,这是一个比较复杂不良结构情境,是学生主要的理解难点.因此,在角和三角函数值对应关系的认识上,必须采取措施破除固有观念,帮助学生进一步明晰三角函数的自变量、对应法则和因变量,特别是要利用单位圆强化学生对“给定一个角,如何得到对应的函数值”的认识.

三、“正弦函数图像与性质”的教学设计

(一)教学内容解析

本节内容是上教社2020年版新教材必修二第七章的起始内容,也是承接第六章(三角)后建立三

角函数模型的重要内容.虽然学生在第六章中已经经历了角的推广,学习了角的弧度制,知道角的集合与实数集建立了一一对应的关系,但是在第六章中,角的正弦值基于角还是一个静态的几何对象,只不过是将这个几何对象放置在坐标系中而已.而在本章中,角已经作为三角函数的自变量了,这里有两个重要的集合:角的弧度数构成的集合,角的终边与单位圆交点的坐标(比值)构成的集合.如何理解这两个集合之间的对应关系是本节课的突破口.

用角的终边与单位圆交点坐标定义三角函数值后,三角函数的模型就建立起来了,接着就需要进一步研究它们的性质.函数图像是函数最直观表示,函数的性质可以鲜明地反映在它们的图像上.因此,正弦函数、余弦函数的图像是研究正弦函数、余弦函数性质的基础,它们从形的角度反映了正弦函数、余弦函数周期性的变化规律.

上教社2020年版教材中,本章内容共分为四节,分别是“7.1 正弦函数的图像与性质”,“7.2 余弦函数的图像与性质”,“7.3 函数 $y=A\sin(\omega x+\varphi)$ 的图像”和“7.4 正切函数的图像与性质”.

在上海二期课改教材中,这部分内容的处理呈现为得到正弦函数的图像后,紧接着利用平移得到余弦函数图像,然后结合这两类三角函数的图像研究函数的性质,正弦函数、余弦函数并没有明显的主次之分.相较于上海二期课改教材,上教社新教材做了内容顺序上的调整,因为余弦函数 $y=\cos x$ 与 $y=\sin\left(x+\frac{\pi}{2}\right)$ 是完全相同的函数,所以重点突出正弦函数的重要性,“7.1 正弦函数的图像与性质”着重研究正弦函数的图像、性质(周期性、奇偶性、单调性和最值),为后续三节内容的学习奠定基础,这也符合知识发生发展的内在逻辑.

上教社新教材中,本章节的内容如图1所示.

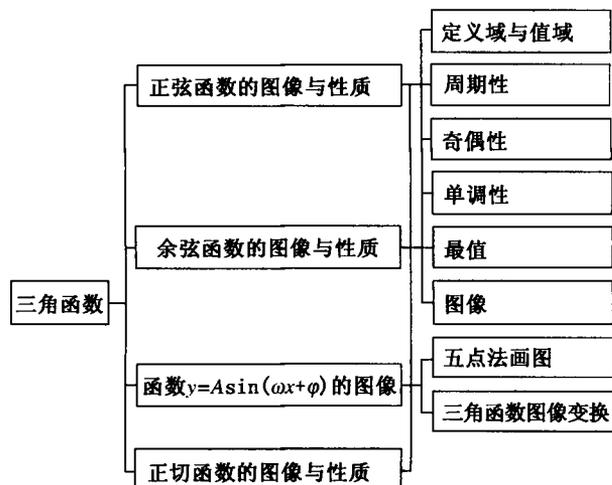


图1

从单元教学设计角度看,本节内容是三角函数章节的起始课,首先通过单位圆作出正弦函数图像,在图像的基础上进一步研究其性质.而对于余弦函数图像,可以选择平移或者类比作出,但用单位圆中的余弦线作余弦函数图像是难点,所以利用诱导公式,选择平移正弦函数图像得到余弦函数图像是常规做法.本节课为研究三角函数的图像和性质提供了普遍的范式,对研究余弦函数和正切函数至关重要.

在人教社A版教材中,“三角函数的图像与性质”共分为三节,对三角函数的性质如周期性、奇偶性、单调性和值域均有涉及,为学生后续学习 $y=A\sin(\omega x+\varphi)$ 的图像与性质做了充分的准备.虽然两个版本教材的侧重有所不同,但均体现出该节的学习对全章内容乃至整个函数学习有非常重要的作用.

(二)教学目标解析

本节课的教学目标解析如表1所示.

(三)教学问题诊断分析

学生进入高中后,从集合与对应的观点刻画了函数概念,研究了幂函数、指数函数、对数函数的定义、图像和性质,已初步掌握学习和研究一个新函数的知识基础和基本方法,但是用单位圆上点的坐标表示任意角的三角函数,与学生已有经验有较大的差距,违背了学生从代数运算得到结果的认知经验.所以在本节课教学中,可能会遇到学生不会或者想不到利用正弦线作正弦函数图像的问题,学生产生困难或障碍的原因有以下两层.

第一层原因在于在之前的学习中,学生已经初步建立了列表描点画函数图像的基本方法,所以在学习正弦函数的图像这一节时,学生很自然地会使用这种方法,而利用单位圆画图本质上也是一种描点,由于正弦函数的特殊性(自变量为1、2、3等特殊值,对应的函数值为无理数,即某些特殊角的三角函数值也是无理数,难以精确地度量),常规的描点作图难以实现准确作图.在教学中设计列表描点的环节,让学生动手操作,在操作中体会其中的困难和不精确,促使学生寻找、思考优化的方法.

第二层原因是学生对于正弦函数的定义理解不够透彻.正弦函数是一种函数,从函数的定义看,要考虑正弦函数涉及的基本要素,即自变量、对应法则和因变量.在代数层面就是简洁的代数式 $y=\sin x$,在几何层面其实就是任意角 x 可以找到一个几何量表示,按照函数和任意角正弦的定义应该有唯一确定的几何量表示 $\sin x$.

因此,本节课很重要的一点在于让学生明确“给定一个角,如何得到对应的函数值”,在此基础上,明

表1

教学目标	教学目标达成的标志
(1)建立正弦函数的概念	学生明确正弦函数三要素
(2)经历利用单位圆绘制正弦函数 $y = \sin x$ 在 $[0, 2\pi]$ 上的图像,再通过诱导公式得到 $y = \sin x (x \in \mathbf{R})$ 的图像的过程,初步了解正弦函数的图像特征和函数性质	学生经历利用单位圆绘制正弦函数 $y = \sin x$ 上的一个点到一个周期 $[0, 2\pi]$ 再推广到 $y = \sin x (x \in \mathbf{R})$ 的图像的过程,感悟从特殊到一般的思想方法.学生能通过观察得到正弦函数图像的特征,体会研究函数性质的一般方法
(3)会用五点法绘制正弦函数在一个周期内的大致图像	学生能找到一个周期内的五点,根据五点画出正弦函数一个周期内的大致图像

确如何将三角函数图像上的一个点的坐标几何量化,突破了这一难点,本节课的学习就能水到渠成,学生在后续推导三角函数性质时也能更加得心应手.

(四)教学设计思路分析

根据上述分析,可确定本节课的教学重点是正弦函数的图像,教学难点是利用单位圆画正弦函数图像.如何突出重点、突破难点?教师需要从数学知识的本质出发,遵循学生数学学习的起点设计教学,深化学生对数学概念和知识的理解.

为了加深学生对角和角的正弦值之间对应关系的理解,需要使理解研究正弦函数的图像和性质区别于研究一般函数图像.一般来说,研究新函数图像要经历列表、描点、连光滑曲线等步骤,但在研究正弦函数图像的列表过程中,如果单纯利用计算器进行计算,那么势必会割裂角和对应正弦值之间的紧密联系,进而不利于后续利用单位圆进行函数性质的推导和归纳.事实上,研究如何绘制正弦函数的图像,首先要确定研究的有序点对的实际意义(单位圆中的角和角对应的正弦值),再确定研究内容(角的弧度数构成的集合到角的终边与单位圆交点的坐标(比值)构成的集合的对应关系在坐标系中的呈现方式),再通过观察单位圆中角的终边周而复始的变化,进而明确只需研究绘制 $[0, 2\pi]$ 这一区间内的函数图像,利用直观感知平移图像推广到全体实数,再用诱导公式进行严密论证.如此设计层层推进,可以加深学生对函数概念的理解,提升学生的数学抽象、直观想象和逻辑推理等核心素养.

在对正弦函数图像有了基本的认识之后,学生通过观察角以及角对应的正弦值在单位圆中的几何量,理解了角和对应正弦值之间的函数关系,从函数角度非常自然地找到最值点和零点所对应的五点,自行归纳作出正弦函数图像的一般方法——五点(作图)法.正弦函数图像是本节课的教学重点,突出教学重点的关键是让学生亲身经历作图的过程,在发现、分析和解决困惑中促进学生理解为什么要用和怎样利用单位圆作正弦函数的图像.通过正弦函数图像的学习,学生也能很好地培养数形结合思想

和模型思想.

(五)教学片段

基于上述分析,要突破正弦函数图像与性质的教学难点,教学过程应该具有代数和几何两条主线.

几何主线:单位圆中角和角的终边与单位圆交点的坐标(比值)之间的对应关系→横纵坐标对应的几何元素→正弦函数图像上某点对应的几何量→正弦函数图像→五点法作正弦函数图像.

代数主线:角和角的终边与单位圆交点的坐标(比值)之间的对应关系→正弦函数定义→研究函数的一般方法(画图)→观察推导函数图像特征和函数性质.

通过上述主线,设计一系列活动和问题,层层递进,突出重点、突破难点,最后实现本节课的预设教学目标,提升学生的数学抽象、直观想象和逻辑推理等核心素养.

片段1

问题1 在上一章中我们学习了任意角的正弦、余弦和正切的定义,以正弦为例,请同学们回忆一下,任意角 α 的正弦是如何定义的?

学生回顾旧知后回答问题,教师在学生的回答中提炼关键点.任意角 α 的正弦是这个角 α 终边上异于原点的任意一点的纵坐标与该点到原点的距离的比值,用 $\sin\alpha$ 这样一个新的符号来表示这个比值.

同时,教师在单位圆中借助动画展示上述代数数量的几何表示,明确 α 对应单位圆中的弧长, $\sin\alpha$ 对应单位圆中的点的纵坐标,引出下一个问题.

问题2 两个变量 α 和 $\sin\alpha$ 之间有什么关系呢?你依据什么得到这个判断?

学生通过单位圆中两个几何量的一一对应,很容易得到结论,但是在描述原因时回答稍有遗漏,教师及时给予补充,给出严谨的函数关系定义.

设计意图:通过问题1和问题2落实教学目标(1).在第六章中学生已经经历了角的推广,但是角的正弦值基于角还是一个静态的几何对象,而在本节内容中,角已经作为三角函数的自变量了.帮助学生理解角的弧度数构成的集合、角的终边与单位圆

交点的坐标(比值)构成的集合间的对应关系,从而明确这两个变量之间的对应关系是一种函数关系,构建起正弦函数的定义,为后续绘制函数图像和研究函数性质做好铺垫.

片段 2

定义了一个新函数后,按照研究函数的基本方法,可以绘制函数图像.教师先让学生列表描点,在此过程中,学生发现自变量随意取值的结果是函数值取不到精确值,遇到困难后学生从自变量是角这一认知出发,将 x 的取值取为自己熟悉的 $\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}$ 等特殊角,但是在描函数值时同样遇到有些函数值是无理数的情况.为了解决这一问题,达到作图理论上的精确,教师提出引导性问题.

问题 3 如何精确描出点 $(\frac{\pi}{3}, \sin \frac{\pi}{3})$ 的横坐标?

为了描绘出一个点,教师引导学生在单位圆中找到 2π 对应的几何量(单位圆周长),通过将单位圆12等分,得到等分点表示的一些特殊角 $\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}, \dots$ 启发学生利用等分过的单位圆周长在 x 轴上精确画出角对应的12个等分点,即将单位圆周长展开,化曲为直,平移到 x 轴上.经过启发,学生理解了角与 x 轴上点的一一对应关系,然后教师播放动画课件,演示上述过程,给学生以直观感受,进一步强化学生的理解.

问题 4 如何精确描出纵坐标 $\sin \frac{\pi}{3}$? 单位圆中有没有相应的几何量来描绘 $\sin \frac{\pi}{3}$?

联系本课开始时对任意角三角函数值定义的复习,学生很容易得到答案,播放动画,在圆之中显示 $\frac{\pi}{3}$ 角终边与单位圆的交点 B .在此基础上,教师引导学生利用两个几何量精确描出点 $(\frac{\pi}{3}, \sin \frac{\pi}{3})$,在成功描出点 $(\frac{\pi}{3}, \sin \frac{\pi}{3})$ 后,请学生自己动手操作,在工作单上描出 $(\frac{4\pi}{3}, \sin \frac{4\pi}{3})$.

设计意图:通过问题3和问题4落实教学目标(2),学生经历利用单位圆绘制正弦函数 $y = \sin x$ 上的一个点的过程,为接下来从一个点到一个周期 $[0, 2\pi]$ 再推广到 $y = \sin x (x \in \mathbf{R})$ 的图像的过程做了充分的铺垫,突破了教学中的难点.学生也可以通过这一过程,感悟从特殊到一般的思想方法.

在本节课的教学中,很重要的一点是要在角和

三角函数值的对应关系的认识上帮助学生进一步明晰三角函数的自变量、对应法则和因变量,特别是要利用单位圆强化学生对“给定一个角,如何得到对应的函数值”的认识.为了促进学生的理解,在上述教学活动中设计了根据定义将一个特殊点的横、纵坐标一一对应到相应的几何量,即利用单位圆中的正弦线画出一个特殊点 $(\frac{\pi}{3}, \frac{\sqrt{3}}{2})$.在绘制第一个点后,

加大难度,让学生自己动手画出点 $(\frac{4\pi}{3}, -\frac{\sqrt{3}}{2})$,选择这个点是为了再次强化三角函数线是有向线段,为后续顺利作图提供必要铺垫.掌握了某一点的作法原理后,借助单位圆选择具体的、足够多的点进行描点,最后借助技术描出任意多的点,连线画成三角函数的图像.

四、结语

数学教材修订、编撰的过程中,对于“三角函数”章节,在顺序上有调整,在内容上有删减、补充,在重心上各有侧重,但是在“正弦函数图像”这一节中,利用单位圆绘制正弦函数图像始终没有变过.理论上也可采用研究一般函数图像的方法,通过最常规的列表描点进行绘制,但是基于学生对数学的理解,用好角与 x 轴上点的对应、角与角的正弦值的对应才是本节课的核心.数学知识的理解是循序渐进、逐步完善的过程.作为教师,只有从学生数学学习的起点出发,遵循知识的生长性原则,不断铺设合理的台阶,才能为学生理解数学创造可能.

参考文献

- [1] 章建跃. 中学数学课程论[M]. 北京: 北京师范大学出版社, 2011.
- [2] 曹一鸣, 冯启磊, 陈鹏举. 基于学生核心素养的数学学科能力研究[M]. 北京: 北京师范大学出版社, 2017.
- [3] 史宁中, 王尚志. 普通高中数学课程标准(2017年版)解读[M]. 北京: 高等教育出版社, 2018.
- [4] 项武义. 基础几何学[M]. 北京: 人民教育出版社, 2004.
- [5] 上海市中小学(幼儿园)课程改革委员会. 普通高中教科书·数学: 必修第二册[M]. 上海: 上海教育出版社, 2020.
- [6] 上海市中小学(幼儿园)课程改革委员会. 高级中学课本·数学: 高中一年级第二学期[M]. 上海: 上海教育出版社, 2007.
- [7] 人民教育出版社 课程教材研究所, 中学数学课程教材研究开发中心. 普通高中课程标准实验教科书·数学: 必修4 A版[M]. 北京: 人民教育出版社, 2019.