

高中立体几何教学中培养学生直观想象素养的策略

201101 上海市七宝中学 周 丹

摘 要:笔者以新课标和新课程对直观想象素养的要求和考查为切入点,基于教学实践,研究在高中立体几何教学中培养学生直观想象素养的教学策略,即关注学生识图、作图、用图能力的培养,为学生提供丰富的实物模型和现实情境,重视利用“基本图形”解决立体几何问题,关注立体几何基本研究方法、思想以及数学文化的渗透,并给出运用以上教学策略开展教学实践的案例。

关键词:立体几何;直观想象;数学核心素养

一、问题提出

《普通高中数学课程标准(2017年版2020年修订)》^[1](以下简称“课标”)中明确指出直观想象为六大数学核心素养之一.2021年版上教社教材中立体几何在整个高中数学的地位有所上升,建议课时数从原来的22节增加到现在的27节,教学时段从高三年级前移到高二年级,主要教学内容基本相同,部分内容的要求有所提高.而且,近几年的高考中涌现出传承中国古代数学文化、以立体几何为主题考查直观想象核心素养的试题.

二、概念界定

高中立体几何教学首先要关注几何直观,课标中直观想象素养的内涵是借助几何图形和空间想象感知事物的形态与变化、利用空间形式特别是图形理解和解决数学问题.直观想象由四个方面构成,分别是建立形与数的联系、利用几何图形描述问题、借助几何直观理解问题、运用空间想象认识事物.直观想象素养在教学实践中的落实等已有很多研究成果,目前较为普遍的认识是,直观想象包括几何直观、空间想象两个方面,空间想象一定程度依赖于几何直观.建立数与形的联系、借助几何直观使抽象问题形象化、构建直观模型使复杂问题简单化是落实培养直观想象素养的几个关键环节.

三、问题解决

笔者主要结合文献分析和教学实践,梳理高中立体几何教学中培养学生直观想象素养的教学策略.

(一)关注学生识图、作图、用图能力的培养

章建跃博士曾说,作图是立体几何学习的第一件大事.2021年版上教社教材将直观图形的画法前移至第十章第一节的第三课时,体现了对学生识图、作图、用图能力的关注.学生在这一节,画水平放置

的正六边形、三个平面相交的各种情形.学生作图中画交线,标明实线、虚线的过程增强了他们的识图、用图能力.除了直观图的作图外,还可以在利用牟合方盖推导球体体积公式一课前,让学生画一画牟合方盖.笔者以“正方体的截面”为主题探讨以下问题.

例1 平面有平、无限延展,无大小、厚薄之分的特点.用一个平面截正方体,正方体的表面与平面的交线所围成的平面图形叫做平面截正方体的截面.按照截面图形的边数进行分类,截面可以为四边形等.图1展示了截面为四边形时,四边形是梯形、正方形、矩形的情况,以及截面是三角形、五边形、六边形的情况.

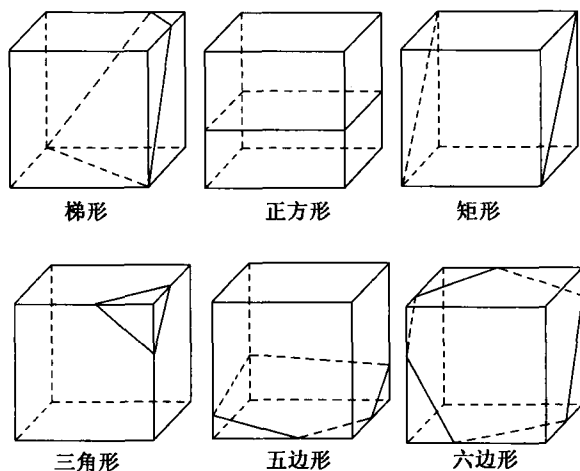


图1

请回答以下问题.

- (1)能否截出直角三角形?
- (2)截面面积最大的三角形是什么形状的?
- (3)截面为四边形时,四边形能否为菱形?若能,请画出来,若不能,请说明理由.
- (4)有没有可能截出边数超过6的多边形?
- (5)能否截出正五边形?
- (6)是否存在正六边形的截面?

解答此题时,可使用事先准备好的萝卜块或可以装水的透明正方体盒子帮助观察.

笔者曾利用立体几何章节教学前的一节课时间让学生测试,完成上述问题,时值疫情线上教学期间,学生在家中利用摄像头完成该测试问题.测试前一天,笔者提醒学生准备好萝卜块或装水的透明正方体盒子.测试过程中,笔者利用钉钉视频会议功能,不断翻页观察学生解答此题的状态,发现研究此问题时学生的主要表现有三类.第一类学生利用数学实验工具“水”立方(装不同容量水的正方体盒子),或用刀切事先准备好的正方体块来研究截面,探索正方体截面的形状,这属于在直观操作中培养直观想象素养.第二类学生在度量计算(算图)和思辨论述(证图)中培养直观想象素养,这属于数形结合.如基于计算论述不可能为直角三角形;基于逻辑推理思辨得出因为正方体有六个面,所以截面最多为六边形,当截面多边形为五边形时,必有两条边平行,从而不可能为正五边形等.第三类学生在具备一定直观想象和逻辑推理等数学核心素养的基础上,在熟悉几何画板或 GeoGebra 软件的情况下,制作出了直观的动态演示文件,揭示正方体截面之间的关系.

(二)为学生提供丰富的实物模型和现实情境

部分学生并不相信逻辑告诉他们的事实.反例比一般证明更能说服人.因而教师不能一味强调数学的抽象,而应遵循由特殊到一般、由直观到抽象的认识事物的客观规律.如对于假命题“四个面都是等腰三角形的四面体为正棱锥”的讨论中,可以为学生提供搭好的直观反例模型(如图 2-1 所示).又如,可以利用信息技术给学生展示直观的“正方体截面”动画(如图 2-2 所示).利用牟合方盖推导球体体积公式的课堂中,教师可以亲自为学生呈现将蛋糕切成牟合方盖的过程.

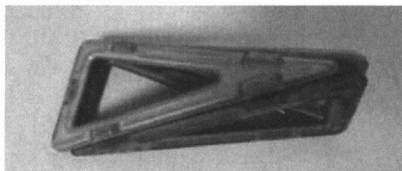


图 2-1

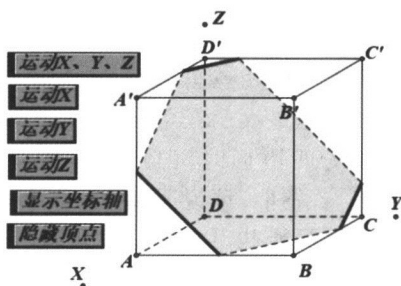


图 2-2

此外,在关于多面体与球的切接问题中,由于球心位置及球半径的确定对学生抽象思维要求较高,可在第一次出现相关问题时为学生提供直观图形.

如图 3,有了直观图形,学生可以更好地理解并求解问题,如例 2.

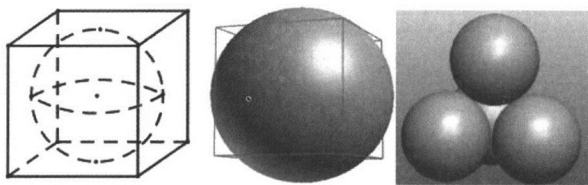


图 3

例 2 边长为 a 的正方体的各棱与球相切,则球的直径是多少?

(三)重视利用“基本图形”解决立体几何问题

对于立体几何问题,学生总感到图形线条多,又处在不同平面内,难以发现要素之间的关系.实际上,在空间几何体中,长方体、正四面体、球是基本图形,它们类似于平面几何中的直角三角形、等腰三角形、圆.把这些基本图形的组成元素的位置关系搞清楚了,在解决其他问题时,就容易排除干扰,提炼出本质特征来,因此,教学中要重视基本图形的作用^[2].立足从“基本图形”到“变式图形”,再到“综合图形”,要特别关注长方体这一最基本的立体图形,充分发挥它在研究立体图形及其位置关系中的作用.长方体的原型在生活中随处可见,学生所在的教室就提供了离学生最近的实例.在研究基本图形位置关系时,无论对于空间点、直线、平面位置关系的整体认识,还是对于空间直线、平面的平行、垂直关系的定义、判定定理、性质定理等,都可以在长方体中找到对应的表示.长方体还可以和空间直角坐标系建立联系,因此,它也是今后用向量法解决立体几何问题的基础.

例 3 在棱长为 a 的正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中,点 M 为等边三角形 D_1AC 中线 D_1E 上一点,记点 M 到平面 A_1D_1DA 、平面 D_1C_1CD 以及平面 $ABCD$ 的距离的平方和为 m ,则 m 的最小值为_____.

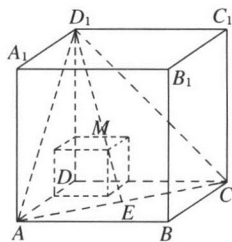


图 4

如图 4,构造一个小长方体解题.

(四)关注立体几何基本研究方法和思想的渗透

从人们认识世界的过程来看,对“形”的认识要先于对“数”的认识,“形”是直观、具体、形象的,“数”

是理性、抽象、逻辑的. 所以学习立体几何的基本方法是“直观感知(识图)—操作确认(画图)—度量计算(算图)—思辨”^[2]. 在经历识图、作图和在各种丰富的情境中识别基本图形的过程中, 学生能习得立体几何基本的研究思想和方法, 其中割补法、类比转化法是最基本的方法. 下面通过例题示例说明.

例 4 已知斜三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 的底面是直角三角形, 侧棱长为 4cm, 作与侧棱垂直的截面, 截得的 $\triangle EFG$ 是边长为 2cm 的正三角形, 则它的侧面积为_____.

如图 5, 先将原斜三棱柱沿直截面割为两部分, 后补为直棱柱, 割补过程中体积、侧面积并没有发生变化.

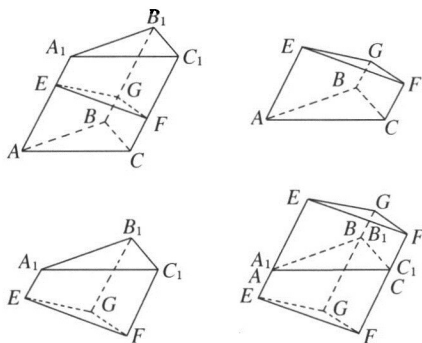


图 5

将立体几何中的空间问题转化为平面图形的问题, 其本质是降维, 降维也是推导欧拉定理的基本方法.

(五) 渗透数学文化, 培养爱国情怀

文化是民族生存和发展的重要力量. 立体几何中与中国古代数学文化息息相关的“关键词”有很多, 如牟合方盖、祖暅原理、堑堵、阳马等. 近几年的高考题也传递着以立体几何为载体传承中国古代数学文化的重要信息, 如 2019 年全国卷中的金石文化(形状为“半正多面体”的独孤印信)、2018 年全国卷中的“咬合时带卯眼的木构件的俯视图”、2015 年湖北卷中的“阳马”. 这些问题既考查了学生的直观想象素养, 又让学生感受立体几何的实用价值, 领略中国古代数学的魅力. 下面呈现两道以祖暅原理为背景、需要学生通过直观想象构造模型、还原几何体求解几何体体积的高考题.

例 5 (2013 上海高考理-13) 在平面上, 将两个半圆弧 $(x-1)^2 + y^2 = 1 (x \geq 1)$ 和 $(x-3)^2 + y^2 = 1 (x \geq 3)$, 两条直线 $y=1$ 和 $y=-1$ 围成的封闭图形记为 D (如图 6 中阴影部分所示). 记 D 绕 y 轴旋转一周而成的几何体为 Ω , 过 $(0, y) (|y| \leq 1)$ 作 Ω 的水平截面, 所得截面面积为 $4\pi \sqrt{1-y^2} + 8\pi$, 试利

用祖暅原理、一个平放的圆柱和一个长方体, 得出 Ω 的体积值_____.

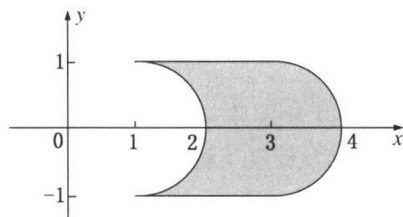


图 6

例 6 (2019 浙江高考-4) 祖暅是我国南北朝时代的伟大科学家, 他提出的“幂势既同, 则积不容异”被称为祖暅原理, 利用该原理可以得到柱体的体积公式 $V_{\text{柱体}} = sh$, 其中 s 是柱体的底面积, h 是柱体的高. 若某柱体的三视图如图 7 所示, 则该柱体的体积是()

- A. 158 B. 162 C. 182 D. 324

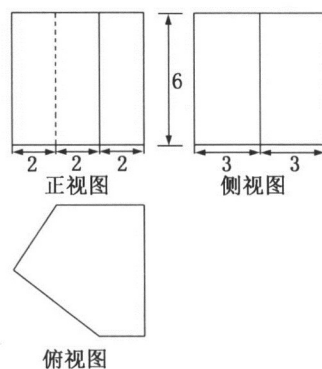


图 7

祖暅原理是祖暅一生最具有代表性的发现, 也是等价转化数学思想的体现. 割补的本质也是等价转化. 例 7、例 8 为 2021 年版教材配置的习题, 例 7 中的多面体来自《九章算术》^[3] 中的“楔体”, 其体积的求法可借助多种割补方案, 既可以充分发挥学生思维的发散性, 又培养了学生的直观想象素养, 更展现了中国古人的智慧. 例 8 的“鳖臑”中存在特殊的线面关系, 更体现“斜解立方, 得两堑堵; 斜解堑堵, 其一为阳马, 一为鳖臑”的割补思想.

例 7 在如图 8 所示的多面体中, 已知 $ABCD$ 为矩形, $ABFE$ 和 $DCFE$ 为全等的等腰梯形, $AB=4$, $BC=AE=EF=2$. 求此多面体的表面积与体积.

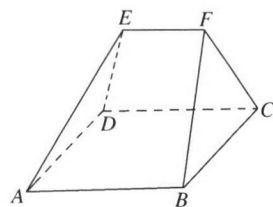


图 8

例 8 我国古代数学著作《九章算术》中研究过一种叫“鳖臑”的几何体

(见《九章算术》卷五“商功”之一六),它指的是由四个直角三角形围成的四面体.用你学过的立体几何知识说明这种四面体确实存在.

四、案例及思考

中国古代数学家将割补法与等价转化奉为珍宝,创造出了让人赞叹不已的精神食粮.如祖暅在刘徽构造的牟合方盖模型基础上,结合割补思想推导出了球的体积公式.与圆柱圆锥模型推导球的体积公式相比,或许复杂了些,但经历这一过程让人感受到的数学价值和情怀无以言表、无可媲美.笔者简述课程案例的主要环节.

(一)准备工作

在本节课的前一天,布置画牟合方盖模型的作图题.题目如下.

请用笔画出一个棱长为4cm的正方体,用圆柱从纵、横两侧面(横表示左右方向,纵表示前后方向)作内切圆柱体时,请画出两圆柱体的公共部分(请标清公共部分几何体的轮廓线).

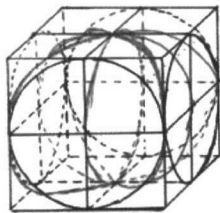


图 9-1

图 9-1 为学生的作图.

(二)课前实验

教师用圆柱形的牙签盒从纵、横两个方向切正方体形状的面包,得到牟合方盖实物.如图 9-2 所示为切的过程,如图 9-3 所示为切得的牟合方盖.

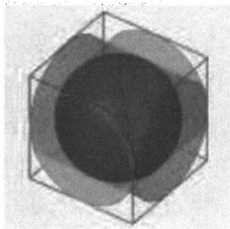


图 9-2

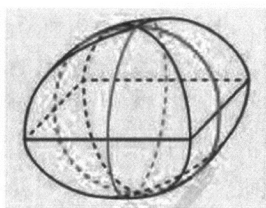


图 9-3

(三)课中讲解

环节 1 取出牟合方盖的八分之一(如图 10-1 所示)

环节 2 研究八分之一牟合方盖的体积并思考相关问题

(1)如图 10-2,设小正方体的棱长为 r ,设 $ON=h$, $NL=a$,为什么 $OL=r$? 试求图 10-2 中“带状阴影”部分的面

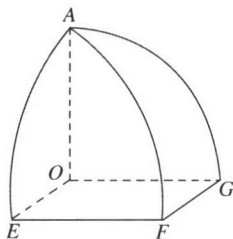


图 10-1

积.(因为点 L 在四分之一圆弧上,所以 $OL=r$,而 $S_{\text{带状阴影}}=r^2-a^2=h^2$)

(2)如图 10-3,设 $ON=h$,思考四棱锥 $O-AB-CD$ 的截面 $NRST$ 的形状及面积.(截面 $NRST$ 为正方形,且 $S_{NRST}=h^2$)

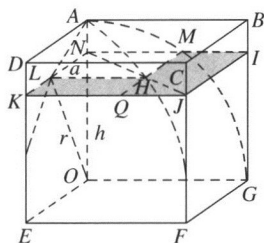


图 10-2

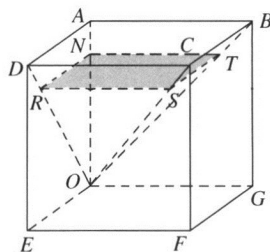


图 10-3

(3)如图 10-1,求八分之一牟合方盖的体积.

$$(V_{\frac{1}{8}\text{牟合方盖}} = V_{\text{小正方体}} - V_{O-ABCD} = \frac{2}{3}r^3)$$

环节 3 牟合方盖体积的应用

推导球的体积公式并思考以下问题.

(1)用平行于底面的平面去截正方体的内切球,所得截面是什么?

(2)用平行于底面的平面去截正方体的牟合方盖,所得截面是什么?

(3)用平行于底面的平面去截正方体的牟合方盖和内切球,求在等高处的截面面积比. ($\frac{S_{\text{牟合方盖截面}}}{S_{\text{内切球截面}}} = \frac{4}{\pi}$)

环节 4 思考讨论

(1)说说你对牟合方盖的认识.

(2)在祖暅原理的基础上,利用牟合方盖模型推出了球的体积公式,过程中都涉及了哪些思想?(割补法和等价转化)

(3)你是否还有其他推导球的体积公式的方法?

本节课是运用前文所述教学策略的教学实践案例.课前准备让学生画出牟合方盖,关注学生的作图、识图.课前教师切出一个牟合方盖,为学生提供实物情境.课中借助正方体、四棱锥、球等基本图形,演绎了运用数学转化与化归思想方法推导球体体积的精彩篇章.此外,本节课多次使用祖暅原理,传播先祖的智慧,传承中国古代数学文化,让学生内心产生自豪感,也激励学生养成钻研求真的科学精神,是非常好的数学学科育人案例.笔者执教的学生经历了利用牟合方盖推导球的体积公式的过程后,

(下转第 26 页)

点评:本题考查了三角形的综合问题,主要涉及正弦、余弦定理等.对于 $\square^2 - \triangle^2$ 结构,有几种思路进行发散.

高考题(2019 全国 I 卷理-17) $\triangle ABC$ 的内角 A, B, C 的对边分别为 a, b, c . 设 $(\sin B - \sin C)^2 = \sin^2 A - \sin B \sin C$.

(1)求 A ; (2)若 $\sqrt{2}a + b = 2c$, 求 $\sin C$.

点评:对于 $(\square - \triangle)^2 = \bigcirc^2 - \square\triangle$ 这一结构,先用完全平方公式,化简后变为 $\square^2 + \triangle^2 = \bigcirc^2 + \square\triangle$,再用余弦定理解决.

3. (石家庄市 2017 届高三一测-17) $\triangle ABC$ 的内角 A, B, C 的对边分别为 a, b, c , 且 $(a-c)^2 = b^2 - \frac{3}{4}ac$.

(1)求 $\cos B$ 的值;

(2)若 $b = \sqrt{13}$, 且 $\sin A, \sin B, \sin C$ 成等差数列, 求 $\triangle ABC$ 的面积.

点评:对于 $(\square - \triangle)^2 = \bigcirc^2 - \square\triangle$ 这种结构,比对 2019 年全国 I 卷理科数学第 17 题,发现它们的结构有异曲同工之妙.

(上接第 4 页)

对刘徽构造的牟合方盖模型,祖暅将八分之一牟合方盖体积转化为一个小正方体体积减去一个四棱锥体积,以及千年之前的数学家基于祖暅原理将割补法运用得淋漓尽致发出感叹.数学转化与化归的思想方法,数学的文化价值和育人价值的体现莫过于此.

“关注学生识图、作图、用图能力的培养”以及“利用信息技术和实物模型为学生提供丰富的现实情境”侧重在直观感知和操作确认中培养直观想象和数学抽象素养,即为学生理解和掌握图形提供直观,以实现抽象与直观的结合.而“关注在各种情境中熟悉掌握基本图形、基本研究思想方法,关注渗透数学文化”侧重实现学生的感性认识飞跃到理性认识,在这一过程中,学生的空间想象能力、推理论证能力、运用图形语言进行交流的能力以及几何直观能力均得到提高,数学抽象、直观想象和逻辑推理素养得以培育.经历这样的过程,也会让学生最终获得言必有据的缜密思维习惯和求真的理性精神,激发学生的爱国热情和民族自豪感,培养学习的积极性和主动性.

立体几何在培养学生的直观想象等数学学科核心素养方面发挥着不可替代的作用.而给学生“冷静思考的时间”和“充分表达的机会”,是实现深度理解的一个重要途径^[4].因此,在“立体几何初步”单元教学的设计和安排中,教师要关注几何研究对象尤其

是基本图形^[5],善于整合各类教育教学资源.教师要关注学生主体,倡导数学探究,结合立体几何内容的内在逻辑和学生的认知特点,构建有针对性的教学进度研究框架和探究实践案例.如可将 2021 年版上教社高中数学教材必修三^[6]中的“多面体的欧拉定理”、必修四^[7]中的“包装彩带”整合为学生探索研究的案例,更好地培养学生的直观想象素养.

参考文献

- [1] 中华人民共和国教育部.普通高中数学课程标准:2017 年版 2020 年修订[S].北京:人民教育出版社,2020.
- [2] 李海东.基于核心素养的“立体几何初步”教材设计与教学思考[J].数学教育学报,2019(1):12-15.
- [3] 张苍.九章算术:全译修订本[M].重庆:重庆出版社,2016.
- [4] 唐恒钧,张维忠,陈碧芬.基于深度理解的问题链教学[J].教育发展研究,2020(4):5.
- [5] 宋建辉.基于学科核心素养的 2019 年高考全国卷立体试题分析[J].数学通报,2020(2):47-51.
- [6] 上海市中小学(幼儿园)课程改革委员会.普通高中教科书·数学:必修第三册[M].上海:上海教育出版社,2021.
- [7] 上海市中小学(幼儿园)课程改革委员会.普通高中教科书·数学:必修第四册[M].上海:上海教育出版社,2021.

欢迎订阅《上海中学数学》