试论数学核心素养视角下数列递推模型的教学价值

200124 上海师范大学附属中学 陈罡元

摘 要:笔者基于对数学核心素养的认识和理解,结合教学实践经验,以面向数学的核心内容和基本概念、面向数学的基本思想和思维方法、面向数学的学科价值与理性精神三个方向的视角,对典型数列递推问题加以分析、整理,梳理解决问题需要使用的数学思维方法. 探索将“提出问题”“建立模型”“解决问题”等环节展现在教学过程中,进一步挖掘数列递推模型的教学价值,并提供教学建议.

关键词:数学核心素养;数列递推模型;教学价值

一、数学核心素养在数列递推模型中的体现

引例 北京天坛的圜丘坛为古代祭天的场所,分上、中、下三层,上层中心有一块圆形石板(称为天心石),环绕天心石砌9块扇面形石板构成第一环,向外每环依次增加9块,下一层的第一环比上一层的最后一环多9块,向外每环依次也增加9块,已知每层环数相同,且下层比中层多729块,求三层共有多少块扇面形石板(不含天心石).

解:首先设第 n 环天石心块数为 a_n,第一层共有 n 环,则 $\{a_n\}$ 是以9为首项,9为公差的等差数列,再设 S_n 为 $\{a_n\}$ 的前 n 项和,由题意可得 $S_{3n}-S_{2n}=S_{2n}-S_n+729$,解方程即可得到 n,进一步得到 $S_{3n}=3402$.

在此问题的解决过程中,首先需要对天坛环形结构图形和石块数的规律产生直观想象,抽象得到等差数列的数学模型. 进而分别对层、环、块等变量加以逻辑分析,检验并修正得到的数学模型,运用等差数列前 n 项和的相关概念列出递推关系式并加以运算求解. 在此问题中,《普通高中数学课程标准(2017年版)》凝练并提出的数学学科核心素养[1]几乎都能得到较好的体现. 有研究认为,数学核心素养包括三种内涵[2]. 一是学生数学发展所必需的关键能力,二是学生经历数学化活动而习得的数学思维方式,三是学生经历数学化活动而习得的数学品格及健全人格养成. 笔者基于上述数学核心素养观点,分别从面向数学的核心内容和基本概念、面向数学的基本思想和思维方法、面向数学的学科价值与理性精神探讨数列递推模型的教学价值.

二、面向数学核心内容和基本概念的教学价值

在数列的概念体系中,基本概念中包含数列的定义即“按一定顺序排列的数”. 而对这种顺序关系的描述和研究就是数列学习的核心内容. 建立数列的递推关系模型是研究这种顺序关系非常直观、有效的途径,也是基本的研究方法之一. 甚至可以通过建立递推模型来定义数列,并进一步研究出更丰富的成果,比如斐波那契数列.

数学教学中常使用如下数列递推问题.

一个楼梯共有10级台阶,每步可以跨一级台阶或二级台阶. 走完这10级台阶,一共可以有多少种不同的走法?

解:设走到第 n 阶台阶共有 a_n 种不同的走法,考虑到当人在第 n 级台阶,其前一步应该处在第 $n-1$ 级台阶或第 $n-2$ 级台阶,因此可得数列 $\{a_n\}$ 的递推公式. $a_1=1, a_2=2, a_n=a_{n-1}+a_{n-2}, n\geqslant 3, n\in\mathbf{N}^*$.

类似于斐波那契数列的提出,此问题研究的数量、结构、变化等概念是面向数学本质的研究对象,体现了数学抽象和逻辑推理的核心思想.

另外,在学习等比数列的前 n 项和公式时,通过计算“棋盘放米”问题,学生在体验数学抽象和数学建模的过程中对核心概念产生深刻的认识和理解,进而产生对指数函数递增速度快慢的直观感受,在学习探究并解决问题的过程中产生获得感. 从庄周“一尺之棰”的典故引入极限的概念,使学生对有限和无限产生认知冲突,激发学习和探究的兴趣. 这些常见案例证明在日常教学中引入和使用数列递推模型是有效可行的. 这样的尝试不仅是为了提高学生的学习兴趣,更是希望通过提供体验数学建模活动的过程,提升学生对数学核心内容和基本概念的理解和掌握.

三、面向数学基本思想方法和思维方式的教学价值

汉诺塔问题是一个能够凸显数学思想方法的例

子.先设将 n 个圆盘转移到另一根柱子上最少需要 a_n 次移动,然后可以将转移过程分为三个步骤.第一步先将上方的 $n-1$ 个圆盘转移到第三根柱子上,这一共需要 a_{n-1} 次移动;第二步将最下方的一个圆盘转移到目标柱子上,这需要1步;第三步将第三根柱子上的 $n-1$ 个圆盘转移到目标柱子上,这一共需要 a_{n-1} 步.因此,$a_n=2a_{n-1}+1$,由于 $a_1=1$,得 $a_n=2^n-1$,$n\in\mathbf{N}^*$.

此题中,运用数列递推实质上是从宏观视角处理问题,从各种复杂情境中提取最直接的信息,具有数学抽象思维方式的特征.而在具体建立递推模型时,又运用化繁为简的化归思想,将 n 的问题与 $n-1$ 的同构子问题建立等量联系.在离散数学等领域,这类方法常用来解决一些递归问题[3].

另一个经典的问题是进出栈模型.栈是一种先进后出的数据结构,则序列为 $1,2,3,\cdots,n$ 时有多少个不同的出栈顺序?

可以设一共有 $c(n)$ 种不同的顺序.那么,假设 k 是最后一个出栈的数.比 k 早进栈且早出栈的有 $k-1$ 个数,一共有 $c(k-1)$ 种方案.比 k 晚进栈且早出栈的有 $n-k$ 个数,一共有 $c(n-k)$ 种方案.所以一共有 $c(k-1)\times c(n-k)$ 种方案.而当 k 取不同值时,产生的出栈序列是相互独立的,所以结果可以累加得 $c(0)=1$,$c(1)=1$,$c(n)=c(0)c(n-1)+c(1)\cdot c(n-2)+c(2)c(n-3)+\cdots+c(n-1)c(0)$,$n\geqslant 2$,$n\in\mathbf{N}^*$.

在处理这个问题时,采用了类似于汉诺塔问题的化归思想,不过这个问题更为复杂,需要对 k 的所有可能取值加以讨论,体现了数学的另一重要思想方法——分类讨论.再使用加法原则将所有情况的种数进行相加,即可得到此问题的一个公式解.

而该问题的一种几何表述可以是:在 $n\times n$ 的格子中,只在主对角线下方三角形中走,每次横或竖走一格,则从 $(0,0)$ 到 (n,n) 步数最少的走法共有几种?这是数学中数形结合思想的体现,在这里代数问题和直观图形建立了巧妙的联系,互相印证,而且进一步研究还可以得到更多结论.

对上述问题进行以下转化,就可以得到它的另一个公式解.要求步数最少,则每步只能往右或往上走,向右走一步记为1,向上走一步记为0,于是一种走法就对应了一个由 n 个0和 n 个1组成的 $2n$ 位数,并且此数的前 m 位数 $(1\leqslant m\leqslant 2n)$ 中,1的个数大于等于0的个数.设每一个 $n\in\mathbf{N}$ 的满足上述条件的 $2n$ 位数的个数为 $c(n)$,可通过计算得 $c(n)=C_{2n}^{n}-C_{2n}^{n-1}=\dfrac{C_{2n}^{n}}{n+1}$.

正是在各种数学思想方法的反复运用下,不同问题之间能够顺利实现合理的转化,这里运用化归思想的同时,还运用了分类讨论、数形结合等重要思想方法.出栈问题如同一个宝库,需要综合运用各种数学思想方法进行分析,有助于训练和提升数学素养和逻辑思维;它还能延伸出许多相关问题,值得进一步探究.

四、面向数学学科价值与理性精神的教学价值

有时一些问题看似错综复杂,其实却隐含着递推的内在联系,当从递推的角度去思考、分析、发掘这种关系,就会发现所要探索的本质.这其实就是数学学科价值的体现,也是对理性精神的一种诠释.笔者对以下三个问题进行分析,力求使学生体会这种理性精神.

例1 对于集合 $N=\{1,2,3,\cdots,n\}$ 的每一个非空集,定义一个"交替和"如下:按照递减的次序重新排列该子集,然后从最大数开始交替地减、加后继的数.例如集合 $\{1,2,4,6,9\}$ 的"交替和"是 $9-6+4-2+1=6$,集合 $\{5\}$ 的"交替和"为5.求集合 $N=\{1,2,3,\cdots,n\}$ 的每一个非空子集的"交替和"的总和 S_n.

解:设 $N=\{1,2,3,\cdots,n\}$ 的子集的"交替和"的总和组成数列 $\{S_n\}$.规定空子集的"交替和"为0.对于 $N=\{1,2,3,\cdots,n\}$ 中的子集分为两类.

(1)子集中不包含元素 n,这类子集的"交替和"的总和就是 S_{n-1}.

(2)子集中包含元素 n,对于任意一个这类的子集,设该子集的"交替和"为 J_i,而在该子集中划去 n 后的集合(包含空集)的"交替和"为 T_i,由于 n 是该子集中的最大元素,则易得 $J_i=n-T_i$.又因为这类子集共有 2^{n-1} 个,所以这类集合"交替和"的总和为 $n\cdot 2^{n-1}-S_{n-1}$.

综合上述两类情况,可以得到 $S_n=S_{n-1}+n\cdot 2^{n-1}-S_{n-1}=n\cdot 2^{n-1}$.

例2 设 $x_1,x_2,x_3,\cdots x_n$ 为正整数 $1,2,3,\cdots n$ $(n\geqslant 2)$ 的一个排列,则满足对任意正整数 s,t 且 $1\leqslant s<t\leqslant n$ 都有 $x_s+s\leqslant x_t+t$ 成立的不同排列的个数为多少?

解:设 n 个数时符合要求的排列数为 a_n,显然当

$n=2$ 时,$a_n=2$.接下来,研究数列 a_n 的递推关系.

首先,对于符合条件的 $1,2,3,\cdots n$ 的排列 $x_1,x_2,x_3,\cdots x_n$ 的基础上插入 $n+1$,则有以下两种情况.

(1)将 $n+1$ 放在最后一项.由于 $1\leqslant s<t\leqslant n$,都有 $x_s+s\leqslant x_t+t$,且 $x_s,x_t\leqslant n$,则有 $x_s+s\leqslant x_t+t\leqslant n+1+n+1$,因此所得到的排列符合要求.

(2)将 $n+1$ 放在原排列中 n 的前一项.根据题意有 $x_1+1\leqslant x_2+2\leqslant\cdots\leqslant x_{i-1}+i-1\leqslant x_i+i\leqslant x_{i+1}+i+1\leqslant\cdots\leqslant x_n+n$.则 $x_1+1\leqslant x_2+2\leqslant\cdots\leqslant x_{i-1}+i-1\leqslant x_i+i+1=x_i+i+1\leqslant x_{i+1}+i+2\leqslant\cdots\leqslant x_n+n+1$. $x_1+1\leqslant x_2+2\leqslant\cdots\leqslant x_{i-1}+i-1\leqslant(n+1)+i=n+(i+1)\leqslant x_{i+1}+i+2\leqslant\cdots\leqslant x_n+n+1$.因此所得到的排列符合要求.

对于 $x_n<n$ 排列有 $n+1+i>x_n+i+1$,因此,将 $n+1$ 放在原排列中除上述两类外其余位置都无法得到满足要求的排列.

然后,证明命题 *:在对于不符合条件的 $1,2,3,\cdots n$ 的排列 $x_1,x_2,x_3,\cdots x_n$ 的基础上,插入 $n+1$,将无法得到满足要求的 $n+1$ 个数的排列.

可以考虑将符合要求的 $1,2,3,\cdots n+1$ 的排列中去除最大项 $x_i=n+1$.对于 $1\leqslant s<t\leqslant i-1$ 和 $i+1\leqslant s<t\leqslant n+1$ 都有 $x_s+s\leqslant x_t+t$,只需考虑 x_{i-1},x_i,x_{i+1}. $\because x_{i-1}+i-1\leqslant x_i+i\leqslant x_{i+1}+i+1$, $\therefore(n+1)+i\leqslant x_{i+1}+i+1$, $\therefore x_{i+1}\geqslant n$, $\therefore x_{i+1}+i\geqslant n+i\geqslant x_{i-1}+i-1$.

因此去除最大项后 $1,2,3,\cdots n$ 的排列仍然符合要求,根据逆否命题,可证命题 *.

综上,可以得到 a_n 的递推关系 $a_{n+1}=2a_n$,$a_2=2$,$(n\geqslant 2,n\in\mathbf{N}^*)$.

由此可得,正整数 $1,2,3,\cdots n(n\geqslant 2)$ 的排列数为 2^{n-1}.

数学中常运用"归纳—猜测—证明"的思维方式来处理问题.上述两个问题都可以通过计算观察,采用不完全归纳并猜测得到一般结论,是容易处理的.在此方法的程序中,证明环节的重要性尤为突出,它更能体现数学的学科价值和理性精神,也体现不完全归纳到完全归纳的科学进步.另外,逻辑证明的多样性和复杂性往往需要综合运用各种数学思想和数学方法,教学中引导和尝试处理此类问题可以起到全方位训练数学核心素养的作用.

例3 已知定义在 $\mathbf{N}^*$ 上的单调递增函数 $y=f(x)$,对于任意的 $n\in\mathbf{N}^*$,都有 $f(n)\in\mathbf{N}^*$ 且 $f(f(n))=3n$ 恒成立,则 $f(n)=$________.

解:根据题意易得 $f(1)=2,f(2)=3,f(3)=6$.由此可进一步递推得到这些项的值. $f(6)=f(f(3))=9,f(9)=f(f(6))=18,f(18)=f(f(9))=27\cdots$可以归纳猜测,并用归纳法证明函数在这两列特殊位置的取值,得 $f(3^k)=2\cdot 3^k,f(2\cdot 3^k)=3^{k+1}$.进而观察当 $3^k<n\leqslant 2\cdot 3^k$ 时,自变量正整数 n 共有 3^k 个,而值域 $(2\cdot 3^k,3^{k+1}]$ 中整数个数也为 3^k 个.因此可得 $f(n)=2\cdot 3^k+(n-3^k)=n+3^k,n\in(3^k,2\cdot 3^k]$.而当 $2\cdot 3^k<n\leqslant 3^{k+1}$ 时,自变量正整数 n 共有 3^k 个.注意到此段函数的定义域和上一段函数的值域相同,即存在 $m\in(3^k,2\cdot 3^k]$,由于 $2\cdot 3^k<f(m)\leqslant 3^{k+1}$,使得 $f(n)=f(f(m))=3m$,而值域 $(3^{k+1},2\cdot 3^{k+1}]$ 中 3 的倍数个数也为 3^k 个,因此可得 $f(n)=3^{k+1}+3(n-2\cdot 3^k)=3n-3^{k+1},n\in(2\cdot 3^k,3^{k+1}]$.

$$综上,f(n)=\begin{cases}2,n=1\\ 3n-3^{k+1},n\in(2\cdot 3^k,3^{k+1}],k\in\mathbf{N}.\\ n+3^k,n\in(3^k,2\cdot 3^k],k\in\mathbf{N}\end{cases}$$

例3问题的解决体现了以"点—线—面"的方式探索未知的科学精神.首先根据解析式得 $f(f(1))=3$,假设 $f(1)=1$ 或 $f(1)=2$,结合函数递增的条件进行验证,从而推理得 $f(1)=2,f(2)=3,f(3)=6$.这其中已经包含了逻辑推理和分析的步骤,重复上述推理的过程,还可以不断推出之后的一些特殊的数.这就是"点"的层面.为了探究整个数列的分布情况,需要寻找这些特殊的数的规律,发现 $f(3^k)=2\cdot 3^k,f(2\cdot 3^k)=3^{k+1}$ 这样两列递推模型就像两条射线无限延升向未知的无穷远处,为探索所有 n 的通项提供了方向指引.有了"点"和"线"的铺设,如同建立了坐标系,研究"面"就不再是难事.考查 n 在 $3^k<n\leqslant 2\cdot 3^k$ 和 $2\cdot 3^k<n\leqslant 3^{k+1}$ 时其函数值的规律,就能得到对于整个正整数上的函数解析式即数列的通项公式.其实类似"点—线—面"的过程也正是科学探索其他未知问题的主要方式之一.在教学中使用这样的数学递推问题模型有助于体现数学的学科价值,同时也能有效提升学生的理性思维.从而习得数学品格、养成健全科学人格.

参考文献

[1] 中华人民共和国教育部.普通高中数学课程标准:2017年版[S].北京:北京师范大学出版社,2018:4.

[2] 孔凡哲,史宁中.中国学生发展的数学核心素养概念界定及养成途径[J].教育科学研究,2017(6):5-11.

[3] 冯跃峰.递归计数的六种方法[J].中等数学,2020(8):2.