单元视角下条件概率、全概率公式和贝叶斯公式的教学

安徽省金寨第一中学　六安市徐道奎名师工作室　徐道奎　(邮编:237300)

摘　要　条件概率和新增的内容是整个概率论教学的重点和难点,更是高中学生概率学习的重点和难点.教学时,要重视概念的抽象概括,用整体的视角理解概念、公式之间的逻辑关系,构建概念联系体系,领悟概念及公式的本质,让学生从逻辑的、整体的、直观的视角理解一个概念和三个公式,培养学生分析和解决概率问题的能力.

关键词　条件概率;全概率公式;贝叶斯公式;体系建构

1　问题提出

根据普通高中数学课程标准(2017 年版,2020 年修订),人教版新教材对概率内容进行了调整,在原教材(课程标准·实验版对应的教材)条件概率的基础上增加了样本空间(有限)、乘法公式、全概率公式和贝叶斯公式(选学)等内容,新增内容使得高中概率知识体系更加完整,尤其条件概率、乘法公式、全概率公式、贝叶斯公式的整体"融入",强化了条件概率在求解概率问题中的应用,有利于学生全面领悟概率的本质.

条件概率及新增的内容概念性强,逻辑性强,运用概念和公式时对问题的分析和推理能力要求高,因此,对教师教学要求高.

条件概率、乘法公式、全概率公式和贝叶斯公式(以下称为一个概念三个公式)对培养学生思维方式和逻辑推理能力,形成解决概率问题的能力,掌握概率问题解决的方法,体悟概念和公式的现实和哲学上意义,落实"立德树人"的根本任务,都有着特别重要的价值.本文就条件概率定义(概念)及条件概率定义之后的乘法公式、全概率公式和贝叶斯公式的教学谈一点认识.

2　学情分析

学生学习"一个概念,三个公式"之前已初步掌握了概率的基本概念,初步理解样本空间,样本点,古典概型,事件及其关系,能够理解并事件、和事件、互斥事件、对立事件的基本含义.而这一部分内容(选择性必修(第三册))一般安排在高二下学期或高三上学期学习,学生的逻辑思维能力,直观观察能力和问题探究意识相比之前的概率学习时明显增强.不利因素是,学生对通过概率研究随机现象、随机事件的方法不适应,习惯于用"统计"的方法解决概率问题,对一些抽象的概念不理解,缺乏解决概率问题的基本方法(事件和样本空间分析).

3　逻辑关系

(1)条件概率是理解并进行复杂概率运算的基础,乘法公式、全概率公式和贝叶斯公式是条件概率的应用和拓展.条件概率的本质是缩小样本空间后的事件概率,通过古典概型(或其他概型),抽象概括成条件概率的概念(定义式)[1].

(2)将条件概率的"定义式"进行变形即可得到乘法公式,乘法公式与条件概率定义式是概率的同一关系的不同显现形式,由乘法公式立即可以得到独立事件概率计算公式.乘法公式彻底解决了积事件概率问题.

(3)全概率公式是概率加法和乘法公式的综合运用,其本质是将一个复杂事件的概率分解成若干个两两互斥的事件"相并"的概率,用以解决由"原因"事件引起"结果"事件概率问题,从已知的可求的事件的概率推算未知的复杂事件的概率是概率论问题解决的基本思想,全概率公式充分体现了这一思想.

(4)贝叶斯公式

贝叶斯公式是条件概率、全概率公式和概率乘法公式的融合.贝叶斯公式的本质是条件概率,其应用的意义在于,按照事件发生发展的顺

基金项目:六安市 2022 年度教育科研课题"双新"背景下指向深度学习的数学大单元教学实践研究(项目编号:LK2022033).

序针对“结果”反求“原因”的概率问题.

4 体系建构

“一个概念三个公式”的教学重心是概念的建立,其中,条件概率和全概率公式是相对初始的概念,是概念建立的关键环节.

4.1 条件概率:分析“事件”和“空间”,抽象、概括形成概念

如前所述,条件概率的本质是缩小样本空间后事件概率.人教版教材 A 版(以下简称“教材”)采取“问题情境——思考探究——抽象概括”的方式,以古典概型为基础,得出条件概率的概念(定义式),值得注意的是,条件概率虽从古典概型推出,但其适用范围却具有一般性,也适用于其他概型.

条件概率概念的建立要抓住“事件”和“空间”进行分析,要分析“条件”是必然性还是“随机”性,是以“条件”重构的样本空间还是在原样本空间中运用“条件”.因此,“事件”“空间”和“条件”是概念建立的关键词.

(1)对条件 A 的理解.第一,从缩小样本空间的角度上看,在条件“已经发生”的基础上,样本空间缩小了,是在缩小了的空间上用概率模型或概率计算方法求解概率.第二,从概率之间的相互联系分析,在事件 A 发生的条件下,事件 B 发生的概率 $P(B|A)$ 又与在原样本空间上事件 A 发生的概率 $P(A)$ 有关系,正因为此时的 $P(A)$ 是事件 A 在原样本空间发生的概率,因而事件 A 在原样本空间里不是“必然发生”的事件,不是“发生过了”的事件,而是随机事件.

(2)对 $P(B|A)$ 和 $P(AB)$ 的分析.学生容易混淆 $P(B|A)$ 和 $P(AB)$,认为它们都是“事件 A 发生了,事件也 B 发生了”,实际上,它们有着本质的区别.第一,前者指缩小样本空间后事件 B 发生的概率,此时,事件 A 已经发生了,以 A 发生为条件重新组构样本空间.第二,后者指原样本空间上事件 A、B 同时发生的概率,此时事件 A 不一定是必然发生的事件,一般为随机事件.亦即,第一,它们的样本的空间不同,前者以事件 A 发生为条件,缩小了样本空间即 Ω_A,后者是原来样本空间 Ω 没有改变.第二,事件不同,前者是针对缩小样本空间后的事件 B,后者是针对原样本空间的事件 AB.

条件概率定义式 $P(B|A)=\dfrac{P(AB)}{P(A)}$ 反映了“原”样本空间的 $P(A)$、$P(AB)$ 与缩小后的样本空间的 $P(B|A)$ 之间的关系.

教学时一定要搞清楚 $P(B|A)$ 和 $P(AB)$ 两者的不同,否则,之后的“三个公式”教学就会出现误区,陷入困境.

(3)注意“条件”的变化.条件概率中的“条件”具有相对性,$P(B|A)=\dfrac{P(AB)}{P(A)}$,$P(A|B)=\dfrac{P(AB)}{P(B)}$①.①式中含两个式子,其“条件”不一样,说明在一个样本空间中,条件不是一成不变的,这在之后的乘法公式、贝叶斯公式中能够更好的体现.

(4)条件概率的计算.条件概率一般有三种求法,一是原样本空间概率法,即定义式,二是缩小样本空间法,是指在缩小的样本空间上用古典概型或几何概型等计算,三是原样本空间计数法,即 $P(B|A)=\dfrac{n(AB)}{n(A)}$.

(5)条件概率的性质.根据条件重构样本空间、缩小样本空间后“新”的样本空间上概率的性质即是条件概率的性质(见教材).

案例 1 (2022 全国高考Ⅰ卷第 20 题)试题略.

分析 第二问的第(i)问.考查意图:考查条件概率定义式,如果把左右两边的条件概率都进行转化,就有以下解法一.

解法一 由题意,左边 $R=\dfrac{P(B|A)}{P(\overline{B}|A)}\cdot$

$$\frac{P(\overline{B}|\overline{A})}{P(B|\overline{A})}=\frac{\dfrac{P(AB)}{P(A)}}{\dfrac{P(\overline{B}A)}{P(A)}}\cdot\frac{\dfrac{P(\overline{A}\overline{B})}{P(\overline{A})}}{\dfrac{P(B\overline{A})}{P(\overline{A})}}=\frac{P(AB)P(\overline{A}\overline{B})}{P(\overline{B}A)P(B\overline{A})},$$

$$\text{右边}=\frac{\dfrac{P(AB)}{P(B)}}{\dfrac{P(\overline{A}B)}{P(B)}}\cdot\frac{\dfrac{P(\overline{A}\overline{B})}{P(\overline{B})}}{\dfrac{P(A\overline{B})}{P(\overline{B})}}=\frac{P(AB)P(\overline{A}\overline{B})}{P(\overline{B}A)P(B\overline{A})}.$$

所以,左边=右边,原式得证.

如果从左边直接向右边转化,需要将左边的条件概率用定义式转化,化成“一般”(非条件)概率,然后把“一般”(非条件)概率再转化为变换“条件”后的条件概率,体现了“条件”的相对性.

解法二　左边 $R=\dfrac{P(B|A)P(\overline{B}|\overline{A})}{P(\overline{B}|A)P(B|\overline{A})}$

$$=\frac{\dfrac{P(AB)}{P(A)}}{\dfrac{P(\overline{B}A)}{P(A)}}\cdot\frac{\dfrac{P(\overline{A}\overline{B})}{P(\overline{A})}}{\dfrac{P(B\overline{A})}{P(\overline{A})}}=\frac{P(AB)P(\overline{A}\overline{B})}{P(\overline{B}A)P(B\overline{A})},$$

$$=\frac{P(B)P(A|B)P(\overline{B})P(\overline{A}|\overline{B})}{P(\overline{B})P(A|\overline{B})P(B)P(\overline{A}|B)}$$

$$=\frac{P(A|B)}{P(\overline{A}|B)}\cdot\frac{P(\overline{A}|\overline{B})}{P(A|\overline{B})}=\text{右边}.$$

第(ⅱ)问的考查意图　考查用缩小样本空间的方法求条件概率以及“条件概率”中的对立事件的概率关系．如：$P(A|B)$、$P(\overline{A}|B)$是在事件 B 发生的条件下（相同样本空间），事件 A 和 $\overline{A}$ 分别发生的概率，所以 $P(A|B)+P(\overline{A}|B)=1$，同理 $P(A|\overline{B})+P(\overline{A}|\overline{B})=1$．这实际上就是条件概率的性质：逆事件的条件概率．

4.2　乘法公式：注重条件的变化，条件概率定义的变式运用

由①式得乘法公式，$P(AB)=P(A)\cdot P(B|A)$，$P(AB)=P(B)\cdot P(A|B)$②．②式与①式是等价的，说明在求积事件 AB 概率时，“条件”可以是 A，也可以是 B，积事件中的“条件”是相对的．“一个概念，三个公式”的概念建立环环相扣，积事件中“条件”的变化是之后理解贝叶斯公式的基础．

运用公式②时，由于 $P(B|A)$与 $P(AB)$在同一式子中，我们一般通过缩小样本空间先求出条件概率 $P(B|A)$，再用公式②求积事件 AB 的概率．

两个事件的积事件概率公式可以推广到 n 个事件，即之前发生的事件作为之后事件发生的条件．

直观上，当事件 A 与 B 相互独立时，事件 A 发生与否对事件 B 发生的概率没有影响，此时 $P(B|A)=P(B)(P(A)>0)$，$P(A|B)=P(A)$ $(P(B)>0$ 注意：作为条件的事件其概率必须大于零），相应的，公式②变成了 $P(AB)=P(A)\cdot P(B)$③．如果从直观上判定两个事件是独立事件后，③式是作为独立事件的结论的，如果我们假定或已知两个事件相互独立，则可以用③式的结论求积事件概率了．而如果从独立事件定义角度上看，③式则作为判断独立事件的条件．

以下四条中的任意一条均可作为判断独立性的条件[6]：

(1)$P(AB)=P(A)\cdot P(B)$．

(2)$P(B|A)=P(B)(P(A)>0)$．

(3)$P(B|A)=P(B|\overline{A})(0<P(A)<1)$．

(4)$P(B|A)+P(\overline{B}|\overline{A})=1(0<P(A)<1)$．

4.3　全概率公式：抓住事件的转化，积事件、和事件的综合运用

全概率公式概是概率论又一个难点，其概念建立的关键是处理好事件的关系，尤其是通过对事件的发生发展的“路径”分析和样本空间中事件关系的分析把事件进行转化．

建立概念时，可按照“形成全概率公式初步印象(形式)→建立全概率公式意图和思想方法→全概率公式的证明→全概率公式的直观理解→全概率公式应用要点”的思路进行．

(1)形成全概率公式的初步印象

案例 2　甲袋中装有 3 只红球和 2 只白球，乙袋中 2 只红球和 5 只白球，现从甲袋中任取一球放入乙袋，再从乙袋中任取一球，求从乙袋中取出的是红球的概率．

设计意图　以事件的发生发展把事件进行转化的“朴素”的思维方式，处理好事件关系，渗透分类讨论思想．

分析　设 A 表示从甲袋取出的是红球，B 表示从乙袋中取出的是红球．显然，求从乙袋取出的是红球的事件概率要考虑从甲袋中取出的球是什么颜色，一是从甲袋取出的是红球放入乙袋，再从乙袋取出红球，二是从甲袋取出的是白球放入乙袋，然后从乙袋取出红球．因此，事件 B 转化为两个互斥事件 BA 与 $B\overline{A}$ 相并，即$(BA)\cup(B\overline{A})=B$．

由概率的有限可加性和乘法公式，得

$P(B)=P(BA)+P(B\overline{A})=P(A)P(B|A)+P(\overline{A})P(B|\overline{A})=\dfrac{3}{5}\cdot\dfrac{3}{8}+\dfrac{2}{5}\cdot\dfrac{2}{8}=\dfrac{13}{40}$．上述分析过程可用“概率树图”表示．这就是全概率公式的基本形式．

全概率公式的基本含义是通过事件转化求解概率．怎样把事件进行转化呢？第一，当一个

事件发生有多种情况时，要考虑分类，通过分类理出事件发生发展的条理. 第二，分类后的每一个事件一般不再是“单一”的事件，而是积事件. 第三，事件转化后，通过和事件与积事件求概率.

(2)建立全概率公式意图和思想方法

把一个复杂事件变成若干个互斥事件相并，通过并事件(互斥)概率和积事件概率乘法公式即可求得复杂事件的概率，这就是全概率公式的基本思想.

全概率公式是概率论的重要内容，生产实践中我们遇到的事件是复杂的，用“隐含的事件关系简单”“概率关系简单”的事件表示复杂事件，然后求其概率是我们处理概率问题的基本方法.

(3)全概率公式及其证明

“一般地，设 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 是一组两两互斥的事件，$A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_n=\Omega$，且 $P(A_i)>0$，$i=1,2,\cdots,n$，则对任意的 $B\subseteq\Omega$，有 $P(B)=\sum\limits_{i=1}^{n}P(A_i)P(B\mid A_i)$④”. 称④为全概率计算公式.

记 $\bigcup\limits_{i=1}^{n}A_i=\Omega$，$A_1,A_2,\cdots,A_n$ 称为样本空间 Ω 的一个“完全事件组”，或样本空间 Ω 的“一个划分”，是事件 B 发生的一系列“可能的原因”，它们两两互斥，而 $A,\overline{A}$ 一般认为是样本空间 Ω 的最简划分，即 $A\cup\overline{A}=\Omega$.

全概率公式可以利用并事件与积事件概率关系证明. 由于 $B=B\cap\Omega$，所以 $B=B\cap(A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_n)=(BA_1)\cup(BA_2)\cup\cdots\cup(BA_n)$，由概率性质，

$P(B)=P(BA_1)+P(BA_2)+\cdots+P(BA_n)$，再由积事件公式②，④式即得证.

(4)注重通过逻辑和直观理解全概率公式

注重通过“逻辑”和“直观”理解全概率公式. 全概率公式的逻辑基础是并事件、积事件的概率，用并事件求概率体现了求事件概率的分类讨论思想. 从逻辑的角度上讲，原样本空间 Ω 被分成 n 个两两互斥事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 后，在原样本空间中的每一个 $A_i(i=1,2,\cdots n)$ 上，事件 B 就是积事件 BA_i(教材和教师用书中，“新的样本空间上事件 B 就是积事件 AB”[2] 即是这个含义)，而 $P(BA_i)=P(A_i)P(B|A_i)$，求出事件 B 在原样本空间的每一个 $A_i(i=1,2,\cdots n)$ 上发生其概率和即可.

直观上，可以借助于概率“树图”和韦恩图分析，以集合视角理解全概率公式. 教学时，要根据高中学生的认知特点，对照直观的图形，用通俗易懂的语言解释全概率公式.

(5)全概率公式的运用要领

第一，化难为易，找准样本空间及空间的合理“划分”.

用全概率公式解决概率问题，关键要理解原样本空间和该空间的一个“划分”的意义，什么是样本空间的一个“划分”，为什么要划分？以“教材”的例 5 为例，样本空间的样本点是三台机床加工的零件，显然，这个样本点要分为第一台、第二台和第三台机床加工的零件，相应的事件“任取一个零件为次品”有三种情况，即取出的次品是第一台生产的、第二台生产的和第三台生产的. 如果不把空间进行划分，问题理不出条理，我们称事件中隐含的关系复杂. 因此，划分样本空间，可以突出样本空间的层次，使事件关系变得简单.

有些问题，明显可以看出构成“空间”的样本点(基本事件)具有不同的类型，这往往也是我们划分空间的标准.

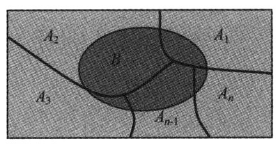

图 1

第二，用全概率公式解决问题的基本路径是：①全概率问题一般涉及事件和“条件”，所以要用字母表示相应的事件，这里的“事件”尽量“单一”，一般不交叉，如：涉及男女性别不同和色盲与否的问题，一般不用如：“男生色盲”“女生不色盲”作为一个事件，而用“男生”“女生”“色盲”“不色盲”为一个事件. ②根据问题所反映的“事实”，确定具体的样本空间及其“构成”空间中的样本点(基本事件). ③分析样本空间中的事件有没有层次和不同的类型，依据事件的层次和类型进行空间划分. ④分析问题中(题目)的每一个条件，把条件转化为相应的“事件关系”或“事件的概率”. ⑤根据全概率公式进行计算.

案例 3 (根据文[3]例题改编) 根据数据分析，一种较复杂的数学问题，某班级学习能力强的学生有 90% 的可能会做，学习能力不强的学生有 90% 的可能不会做. 据分析，这个班有 80% 的学

生其学习能力是强的(可认为任意抽取一个学生,其有 80%的可能性是学习能力强的).

(1)现随机选一名学生,其会做的可能性有多大?

(2)若某个学生会做,其多大可能是学习能力强的?

分析 本题涉及学习能力强与不强,问题会做不会做,先用字母表示有关事件. A—学习能力强,$\overline{A}$—学习能力不强,B—问题会做,$\overline{B}$—问题不会做. 题目的条件可转化为:$P(B|A)=0.9$,$P(\overline{B}|\overline{A})=0.9$,$P(A)=0.8$. 概率空间划分为 $A\cup\overline{A}=\Omega$.

(1)根据样本空间的构成,把会做的学生分成两类,一类是学习能力强的学生,一类是学习能力不强的学生,根据全概率公式,$P(B)=P(A)P(B|A)+P(\overline{A})P(B|\overline{A})=0.9\times0.8+0.1\times0.2=0.74$;

(2)该问题可以放在学习贝叶斯公式之后分析,我们在此解答的目的是巩固条件概率和全概率公式. 问题相当于已知 $P(B)$(第一问的结果),求 $P(A|B)$,由条件概率公式,$P(A|B)=\dfrac{P(AB)}{P(B)}$,需要先求出 $P(AB)$,在求 $P(AB)$时,我们转化问题的视角(贝叶斯公式思想),把事件 A 作为条件,所以 $P(AB)=P(A)\cdot P(B|A)=0.8\times0.9=0.72$,所以 $P(A|B)=\dfrac{P(AB)}{P(B)}=\dfrac{0.72}{0.74}=0.973$.

全概率公式教学的难点是:当 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 都是引发事件 B 发生的原因时($A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_n=\Omega,A_i\cdot A_j=\varnothing,P(A_i)>0,i=1,2,\cdots,n,$),为什么 $B=(BA_1)\cup(BA_2)\cup\cdots\cup(BA_n)$(事件关系的转化式)? 突破难点有一个过程,不能急于求成,要渗透于概念形成的各个环节,在全概率概念建立和完善之后,要及时引导学生总结"事件关系的转化式"的意义.

(1)自然语言的直观意义是:事件 B 发生总是在样本空间的每一个 A_i 空间中与事件 A_i 同时发生.

(2)逻辑的角度(最严谨)分析为:$B=B\cap\Omega,A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_n=\Omega$.

(3)集合的视角理解是:样本空间 Ω 上,事件 B 与 A_i 交集的并集(参看图 1).

(4)结论反映的本质是(从事件的概率关系反观事件关系):事件 B 在样本空间 Ω 上发生的概率是它在该空间的每一个划分 A_i 上发生概率的加权平均数[4]. 这个"权"即 $P(A_i)$.

4.4 贝叶斯公式:领悟概率问题解决的思维转化,概念、公式的全面融合

贝叶斯公式的本质是条件概率,从思维策略上分析,全概率公式和贝叶斯公式体现了解决概率问题的两种不同的思维方式,前者"由因推果",分类讨论,用来解决已知"原因"事件求"结果"事件概率的问题,后者"执果寻因","分析每个原因对结果所做的贡献",用以求解已知"结果"发生时,"某个原因"事件导致的概率.

案例 4(人教版教材例 5,题略)

分析 问题涉及零件是否为次品和来自哪一台车床,因此,要先把事件用字母表示,理出事件及其关系条理. 设 B="任取一零件为次品",A_i="零件为第 $i(i=1,2,3)$台车床加工". 整个问题围绕 B 和 $A_i(i=1,2,3)$展开,显然 A_1,A_2,A_3 两两互斥,$A_1\cup A_2\cup A_3=\Omega$,$P(B|A_1)=0.06$,$P(B|A_2)=P(B|A_3)=0.05$,$P(A_1)=0.25$,$P(A_2)=0.30$,$P(A_3)=0.45$.

(1)求 $P(B)$. 因为 A_1,A_2,A_3 是样本空间 Ω 的一个划分,所以,由全概率公式,$P(B)=P(B|A_1)+P(B|A_2)+P(B|A_3)=0.0525$.

重点分析第二问.

(2)题目要我们求 $P(A_i|B)(i=1,2,3)$.

以求 $P(A_1|B)$(*)为例,由条件概率知,$P(A_1|B)=\dfrac{P(A_1B)}{P(B)}$,结合题设,我们在求积事件概率 $P(A_1B)$(* *)时,用乘法公式,把"条件"变成 A_1,即 $P(A_1B)=P(A_1)P(B|A_1)$,在求 $P(B)$时,用全概率公式,$P(B)=P(B|A_1)+P(B|A_2)+P(B|A_3)$(* * *),亦即第一问结论,$P(B)=0.0525$. 注意:求(*)式时,"$B$"为条件,而在已知的(* *)(* * *)中,用乘法公式和全概率公式,"A_i"为条件,即"已知"(右边)和要求的"结论"(左边)的"条件"发生了改变,

$$P(A_1|B)=\frac{P(A_1B)}{P(B)}$$

$$=\frac{P(A_1)P(B|A_1)}{P(B|A_1)+P(B|A_2)+P(B|A_3)}$$

就是贝叶斯公式,即条件概率.

问题解决的出发点是条件概率,通过改变"条件"求积事件($P(A_1B)$)概率,再结合全概率公式(求 $P(B)$ 时用全概率公式,$A_1\cup A_2\cup A_3=\Omega$,$A_1,A_2,A_3$ 是样本空间的一个划分),问题得到解决.这样,即可得出贝叶斯公式的基本形式.

在上述例题基础上,总结出一般情形下的贝叶斯公式,即:在公式④的条件下,若 $P(B)>0$,则 $P(A_i|B)=\dfrac{P(A_i)P(B|A_i)}{\sum\limits_{k=1}^{n}P(A_k)P(B|A_k)}, i=1,2,\cdots n$ ⑤. 特别地, $P(A|B)=\dfrac{P(AB)}{P(B)}=\dfrac{P(A)P(B|A)}{P(A)P(B|A)+P(\overline{A})P(B|\overline{A})}$ ⑥. 为什么说贝叶斯公式是"执果寻因",对于高中学生,不能仅从概念上和意义上讲解,要引导他们直观观察.我们观察公式⑤即可发现其"形式上"的特征,由"$A_i(i=1,2\cdots)$ 条件下事件 B 发生的概率(右式),可求 B 条件下事件 A 发生的概率(左式)",说明在一个样本空间里,"条件"是变化的,条件是相对的.如果从形式上理解和记忆,公式⑥的前半部分 $P(A|B)=\dfrac{P(AB)}{P(B)}$ 即为条件概率,而该条件概率分子、分母中的 $P(AB)$、$P(B)$ 可用积事件和全概率公式求出,不过与公式左边的"$P(A|B)$"相比,右边的"条件"改变了.

贝叶斯公式是条件概率、全概率公式、乘法公式的融合,教学的关键是理顺其与条件概率、全概率公式之间的逻辑联系和公式自身的逻辑关系,引导学生理解公式的本质及其意义.公式的结论形成后要引导学生分析:(1)公式的来龙去脉,怎样由条件概率推出公式.(2)公式的意义,已知"结果"的概率求某个"原因"概率是改变"条件"后概率之间的关系.(3)公式中哪一部分用积事件概率求出,哪一部分通过全概率公式求出.

贝叶斯公式的运用,使我们充分理解了条件概率、乘法公式和全概率公式之间的联系,在生产实践中,贝叶斯公式的这种"执果寻因"的意义更为重要.

案例 5 大数据表明,50 周岁以上男性的低风险人群中,每 1000 名中有 3 名患有结肠癌(以下简称为"J 病").如果一名男性患有"J 病",其大便检查有隐血的可能性是 50%,如果没有患"J 病",其大便检查有隐血的可能性只有 3%.现有一 50 周岁低风险男性的大便检查有隐血,问其患"J 病"的概率有多大?

问题意图 贝叶斯公式,"执果寻因".

分析 用字母表示出相关事件,A:50 周岁低风险男性患"J 病";B:大便检查有隐血.

由题意,$P(A)=0.003$,$P(B|A)=0.5$,$P(B|\overline{A})=0.03$.现在我们来求 $P(A|B)$.

由贝叶斯公式⑥,

$$P(A|B)=\frac{P(A)P(B|A)}{P(A)P(B|A)+P(\overline{A})P(B|\overline{A})}$$

$$=\frac{0.003\times 0.5}{0.003\times 0.5+0.997\times 0.03}=0.047755.$$

贝叶斯公式之所以著名,"在于其现实以至哲理意义上的解释",在不知事件 B 是否发生的情况下,人们把 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 发生的可能性 $P(A_1),P(A_2),\cdots,P(A_n)$,称为"先验概率",现在已知事件 B 发生,人们对 A_i 发生的可能性大小就按照公式⑤进行估计,称为"后验概率".

5 结束语

"一个概念,三个公式"的教学绝不能止于公式的记忆和死板教条的应用,要让学生理解概念、公式之间的联系,把握概念和公式的本质.第一,以条件概率为逻辑起点,理顺关系,掌握知识间的逻辑结构.第二,要充分理解"条件概率"之于三个公式的意义,"条件"的相对性,"条件"的变化.第三,要掌握通过"事件"引领,注重事件的转化和样本空间的分析,以事件和空间串联问题线索的问题解决方法,分析事件之间关系、概率之间关系.

参考文献

[1] 杨鸿,曹广福.条件概率与独立性教学中的认知偏差及对策研究[J].高中数学教与学.2022(10).

[2] 人民教育出版社,等.普通高中教科书 教师教学用书 数学 A 版(选择性必修 第三册)[M].北京:人民教育出版社,2020,6:79.

[3] 陈中明.全概率公式与贝叶斯公式的启发式教学设计浅谈[J].教育教学论坛,2019(6)

[4] 李多猛,马杰.单元视角下的"全概率公式"主题教学设计[J].中小学数学(高中),2022.4.

(收稿日期:2022-10-20)