

“巧合”还是“优解”？

福建省德化第一中学 吴志鹏 (邮编:362500)

1 例题展示

已知 $f(x) = 2\sin^2(\omega x + \frac{\pi}{3}) - 1 (\omega > 0)$, 若 $f(x)$ 在 $[-\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{4}]$ 上单调递增, 则 ω 的取值范围为_____.

(教师)解答一 因为 $f(x) = 2\sin^2(\omega x + \frac{\pi}{3}) - 1 = -\cos(2\omega x + \frac{2\pi}{3})$, $f(x)$ 在 $[-\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{4}]$ 上单调递增, 所以

$$\begin{cases} 2\omega \times (-\frac{\pi}{6}) + \frac{2\pi}{3} \geq 0, \\ 2\omega \times \frac{\pi}{4} + \frac{2\pi}{3} \leq \pi, \\ \omega > 0, \end{cases} \quad \text{解得 } 0 < \omega \leq \frac{2}{3}.$$

所以 ω 的取值范围为 $(0, \frac{2}{3}]$.

(教辅)解答二 因为 $f(x) = 2\sin^2(\omega x + \frac{\pi}{3}) - 1 = -\cos(2\omega x + \frac{2\pi}{3})$, 由 $x \in [-\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{4}]$, 得 $2\omega \times (-\frac{\pi}{6}) + \frac{2\pi}{3} \leq 2\omega x + \frac{2\pi}{3} \leq 2\omega \times \frac{\pi}{4} + \frac{2\pi}{3}$

$$\text{即 } -\frac{\omega\pi}{3} + \frac{2\pi}{3} \leq 2\omega x + \frac{2\pi}{3} \leq \frac{\omega\pi}{2} + \frac{2\pi}{3},$$

由于 $f(x)$ 在 $[-\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{4}]$ 上单调递增,

所以有

$$\left[-\frac{\omega\pi}{3} + \frac{2\pi}{3}, \frac{\omega\pi}{2} + \frac{2\pi}{3}\right] \subseteq [2k\pi, 2k\pi + \pi] \quad (k \in \mathbb{Z})$$

$$\text{解得 } \begin{cases} \omega \leq 2 - 6k \\ \omega \leq 4k + \frac{2}{3} \quad (k \in \mathbb{Z}) \\ \omega > 0 \end{cases}$$

所以当 $k=0, 0 < \omega \leq \frac{2}{3}$, 故 ω 的取值范围

为 $(0, \frac{2}{3}]$.

2 问题探究

这是某高中教辅 2023 年一轮设计中的一个问题及其解答过程, 笔者对年级的部分教师讲解本题所用的方法进行了调查, 结果发现大部分的教师讲解时并未采用教辅(解答一)的解答方法, 而是采用解答二进行讲评. 究其原因, 部分教师认为教辅给出的解答存在疑问, 或是解释不清; 也有部分老师认为解答有问题, 答案存在“巧合”, 特殊代替一般. 上述两种解答得到的答案是一样的, 显然大部分老师采用了“一般法”, 这是正确的; 但教辅的解答却是更加的简洁, 那么会不会是“巧合”呢? 针对这个问题, 笔者找到教辅中的解答逻辑: 由于 $f(x) = -\cos t (t = 2\omega x + \frac{2\pi}{3})$ 的增区间为 $[2k\pi, 2k\pi + \pi] (k \in \mathbb{Z})$, 是一

些离散的区间, 由于 $\omega > 0$, 则使得 $2\omega \times (-\frac{\pi}{6}) + \frac{2\pi}{3} < \frac{2\pi}{3}$ 且 $2\omega \times \frac{\pi}{4} + \frac{2\pi}{3} > \frac{2\pi}{3}$, 由此可知本题 $f(x) = -\cos t$ 的增区间只能是 $[0, \pi]$, 故教辅的解答是正确的, 不是“巧合”, 而是“优解”, 其计算量更小, 更容易得到正确的结论, 那么解答一是否具有一般性呢? 答案却是否定的, 观察以下变式:

问题 已知 $f(x) = 2\sin^2(\omega x + \frac{\pi}{3}) - 1 (\omega > 0)$, 若 $f(x)$ 在 $[\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{4}]$ 上单调递增, 则 ω 的取值范围为_____.

分析 变式问题与原问题区别只是在于变式问题将 $[-\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{4}]$ 改变为 $[\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{4}]$

此时若按解答二(一般法)解答:

(下转第 66 页)

$$Q\left(\frac{-4ky_0 - 2k^2x_0 - x_0}{1-2k^2}, \frac{2k^2y_0 + 2kx_0 + y_0}{1-2k^2}\right).$$

$$\text{另一方面 } l_{AH}: y - y_1 = \frac{1}{k}(x - x_1), l_{QH}: y - y_2 = -\frac{1}{k}(x - x_2),$$

$$\text{联立得 } H\left(-\frac{x_0}{1-2k^2}, \frac{2y_0k^2 - 3y_0}{1-2k^2}\right), \text{ 若 } \frac{2y_0k^2 - 3y_0}{1-2k^2} = 0, \text{ 解得 } k = \frac{\sqrt{6}}{2}, \text{ 此时 } H\left(\frac{x_0}{2}, 0\right).$$

$$\text{当 } H \text{ 点落在双曲线右顶点和右焦点之间时 } \sqrt{2} \leq \frac{x_0}{2} \leq \sqrt{3}, \text{ 即 } 2\sqrt{2} \leq x_0 \leq 2\sqrt{3}.$$

$$\text{当过点 } P \text{ 的直线与双曲线相切时 } x_0^2 = \frac{12}{5}, \text{ 排除了相切时 } P, A \text{ 重合的情况.}$$

$$\text{由结论 4, } S_{\Delta APQ} = 4 \left| \frac{y_0^2k^3 - (e^2 - 1)^2x_0^2k}{(e^2 - 1 - k^2)^2} \right| = \frac{\sqrt{6}}{2} |2x_0^2 - 6|, \text{ 因为 } 2\sqrt{2} \leq x_0 \leq 2\sqrt{3}, \text{ 当 } x_0 = 2$$

$$\sqrt{3} \text{ 时, } (S_{\Delta APQ})_{\max} = 9\sqrt{6}, \text{ 此时 } P(2\sqrt{3}, \sqrt{5}) \text{ 或 } P(2\sqrt{3}, -\sqrt{5}).$$

4 写在最后

2022 年高考已落下帷幕, 每年的高考都会给我们留下较多经典的试题. 今年的全国 I 卷被誉为史上最难数学卷, 以重思维少计算为命题原则, 这也给我们一线教师提供了教学方向. 在我们平时的教学过程中, 应该多注重培养学生的思维能力和独立思考的能力, 当学生具备严谨地分析能力和举一反三的能力时, 才能以最高效的方式解答试题.

参考文献

- [1] 姜玮, 邹俊松. 2021 年新高考 I 卷第 21 题溯源与推广[J]. 数学通讯, 2021(20).
- [2] 阿波罗尼奥斯著, 朱恩宽等译. 圆锥曲线论 1~4 卷[M]. 西安: 陕西科学技术出版社, 2007.

(收稿日期: 2022-09-13)

(上接第 49 页)

$$\text{因为 } f(x) = 2 \sin^2(\omega x + \frac{\pi}{3}) - 1 = -\cos(2\omega x + \frac{2\pi}{3}), \text{ 由于 } x \in [\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{4}], \text{ 所以有 } 2\omega \times \frac{\pi}{6} + \frac{2\pi}{3} \leq 2\omega x + \frac{2\pi}{3} \leq 2\omega \times \frac{\pi}{4} + \frac{2\pi}{3}, \text{ 即 } \frac{\omega\pi}{3} + \frac{2\pi}{3} \leq 2\omega x + \frac{2\pi}{3} \leq \frac{\omega\pi}{2} + \frac{2\pi}{3}.$$

$$\text{由于 } f(x) \text{ 在 } [\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{4}] \text{ 上单调递增,}$$

$$\text{所以有 } [\frac{\omega\pi}{3} + \frac{2\pi}{3}, \frac{\omega\pi}{2} + \frac{2\pi}{3}] \subseteq [2k\pi, 2k\pi + \pi] (k \in \mathbb{Z}); \text{ 有}$$

$$\begin{cases} \frac{\omega\pi}{3} + \frac{2\pi}{3} \geq 2k\pi, \\ \frac{\omega\pi}{2} + \frac{2\pi}{3} \leq 2k\pi + \pi, \end{cases} \text{ 其中 } (k \in \mathbb{Z}),$$

$$\text{解得 } \begin{cases} \omega \geq -2 + 6k, \\ \omega \leq 4k + \frac{2}{3}, \end{cases} (k \in \mathbb{Z})$$

$$\text{所以故当 } k=0, \text{ 有 } 0 < \omega \leq \frac{2}{3}; \text{ 当 } k=1, \text{ 有 } 4 \leq \omega \leq \frac{14}{3}. \text{ 所以 } \omega \text{ 的取值范围为 } (0, \frac{2}{3}] \cup [4, \frac{14}{3}].$$

本题若按解答一方法进行求解, 其所求得的答案为 $(0, \frac{2}{3}]$, 明显存在遗漏, 究其原因: 由于 $\omega > 0$, 使得 $2\omega \times \frac{\pi}{6} + \frac{2\pi}{3} > \frac{2\pi}{3}$ 与 $2\omega \times \frac{\pi}{4} + \frac{2\pi}{3} > \frac{2\pi}{3}$ 均大于 $\frac{2\pi}{3}$, 故函数可能在 $(0, \pi]$ 或 $[2\pi, 3\pi], [4\pi, 5\pi] \dots$ 递减, 区间可能并不唯一.

结语 综上所述, 解答一方法简洁, 计算量小, 有利于学生提升解题效率, 也是我们教学中所倡导的, 但利用时要知其然且要知其所以然, 多思才能少算, 但不能盲目、乱用; 解答二是一般法也是通法, 是学生要熟练掌握的方法, 掌握了通法, 才有可能“以不变应万变”, 从容应对解題中出现的新问题.

(收稿日期: 2022-08-21)