

创设问题情境 促进数学理解

202157 上海市崇明区正大中学 陈东华

摘要:数学学习强调理解,理解是学好数学的关键.许多研究者提出了数学理解的不同类型,如解释、阐释、应用、洞察、移情、反思等,揭示了学习者对数学理解的真实状态.笔者探究在数学问题的解决过程中,如何有效促进初中学生加强数学理解,构建理解性的数学课堂.

关键词:初中数学;问题情境;数学理解

新的课程改革以及学生综合素质评价都更加强调整基于复杂现实情境下培养学生解决问题的能力,这也对教师提出了新的要求.如何在课堂中精心创设问题情境,促进学生在自我阐释、应用迁移、批判洞察等维度加深对问题的理解,从而提高解决问题的能力?笔者通过亲身经历的教学实例,阐述如何创设问题情境,促进学生理解.

笔者在长期的初中教学实践中体会到,通过有效创设数学问题情境,调动学生动手操作和探究,让学生在解决数学问题的过程中获得情感体验与活动经验,是促进学生数学理解的有效途径.

一、创设具有思考深度的问题情境,促进学生的移情体验性理解

教师要引导学生在数学学习过程中尊重他人的观点,在心理上容许他人对数学问题有不同的看法,这样可以开阔学生视野,拓宽看待数学问题的角度.因此,笔者在数学教学中通过创设具有思考深度的问题情境,帮助学生通过群体交互的支撑和互助力量,通过对他人观点的反思和洞察,对自身经验进行不断反省和改进,从而达到对数学思想和方法的深层次理解.

例如,在一次函数教学中有这样一个问题.直线 $y=kx+b$ 与两坐标轴围成的三角形面积为6,并且与直线 $y=-2x+6$ 平行,求这条直线的解析式.有学生仅仅把这个问题当作代数问题,凭借模式化思维画示意图(甚至是没有标注单位长度的简易草图),然后设这条直线的解析式为 $y=-2x+b$ (因为它与直线 $y=-2x+6$ 平行,即得到 $k=-2$),根据它与坐标轴的交点分别为 $(0,b)$ 和 $(\frac{b}{2},0)$,以及与两条坐标轴围成的三角形面积为6,列出方程,获得 b 的两个解.

而有的学生会提出如下问题:这个三角形的形状、大小到底是什么样的?它又处在什么具体位置?

学生提出,首先要画直线 $y=-2x+6$ 的图形,标出它与两条坐标轴的交点 A 和 B ,显示出 $\triangle AOB$ 的面积,得到 $S_{\triangle AOB}=9$. 弄清楚问题的背景之后,很多学生感到需要一起动手操作体验,如图1,将直线 $y=-2x+6$ 进行平移,在平移直线的画图过程中很容易发现,只要沿着 y 轴向下平移一点就能得到符合要求的面积为6的三角形(向上平移得到的三角形面积都大于9).然后结合 A_1, B_1 的坐标 $(0,b)$ 和 $(\frac{b}{2},0)$ 计算出 $b=\pm 2\sqrt{6}$,其中 A_1 在 y 轴正半轴上、

B_1 在 x 轴正半轴上,能够很直观地获得 $b=2\sqrt{6}$ 的情况.实际上,对平移后的点 A_1 ,点 B_1 的感知是学生理解的盲区,特别是学生可能会对 $b=-2\sqrt{6}$ 的情况感到疑惑,不清楚这个结果从何而来.有学生通过继续平移直线 $y=-2x+6$ 的过程很快发现,当 A_2 在 y 轴负半轴上、 B_2 在 x 轴负半轴上的时候, $S_{\triangle A_2OB_2}=6$ 同样有可能成立,即平移直线 $y=-2x+6$ 的过程中,因为平移的距离不同产生两种不同情况(如图2所示).这就令用代数法解决问题的学生感受到,之前自己得到这两个解其实是只知其然而不知其所以然,如果不对数学问题的深切体验,就不可能真正理解一次函数面积问题的内涵.

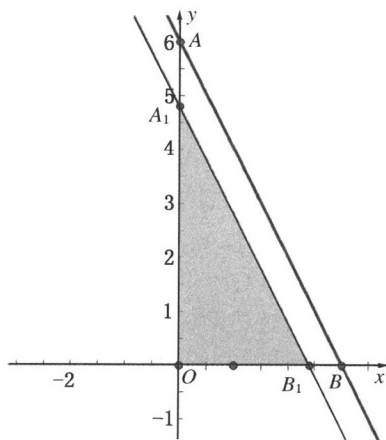


图1

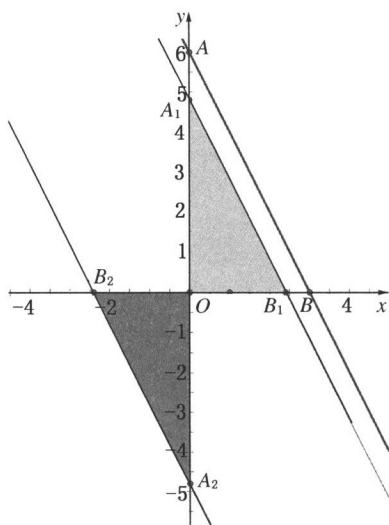


图 2

二、创设现实生活问题情境,促进学生的应用迁移性理解

初中学生经常会向教师发问:我们所学的数学知识和技能可以用在何处?应该如何使用?这实际上就涉及数学知识的应用迁移问题.当学生面对真实世界的问题,面对全新的问题时,往往需要在没有任何提示的帮助下运用知识,并通过自主合作,跨学科运用知识技能解决问题.

例如,笔者在“二次函数应用”的教学中感到,仅依靠课堂上学到的通过建立二次函数关系式解决实际问题以及二次函数最值问题,学生达到的理解状态总是比较肤浅的,缺少实践体验和切身体会.于是,笔者带领执教班级学生进入一个由学生家长承包的种畜场参观,并通过各种渠道了解种畜场的销售情况.

经过家长的介绍,学生了解到种畜场共有 120 头母猪,平均在一年内可以产下一千多头小猪;小猪在出售时按体重计算价格,每只小猪的平均体重在 10

千克左右,在出售给农户时单价不得低于 8 元/kg(成本价),也不得高于物价部门规定的 30 元/kg. 学生掌握了这些基本信息后,想办法主动帮助种畜场到附近几个村的养猪专业户处做市场调查.有的学生负责向养猪户提问题,在与养猪户进行深入交流后,学生对记录下来的数据进行整理.回到学校后,各小组进行数据汇总和分析,通过计算、绘图、统计得到了一些比较客观、有代表性的统计结果.最后,学生在课堂上交流展示各自的统计、分析结果,经过一定讨论后,形成了基本一致的认识.当小猪售价为 30 元/kg 时,月均销售量大约为 50 只,单价每降低 1 元,月均大约多售出 5 只.在此基础上,笔者提出问题:当小猪单价为多少时,种畜场的月均获利最多?

结合如表 1 所示的统计分析结果(人员工资未计算在内),学生通过计算得到一些关键数据.销售单价为 30 元时,月总利润为 $50 \times 10 \times 22 = 11000$ 元;销售单价为 29 元时,月总利润为 $(50 + 5 \times 1) \times 10 \times 21 = 11550$ 元;销售单价为 28 元时,月总利润为 $(50 + 5 \times 2) \times 10 \times 20 = 12000$ 元;销售单价为 27 元时,月总利润为 $(50 + 5 \times 3) \times 10 \times 19 = 12350$ 元……销售单价为 x 元时,月总利润为 $10[50 + 5(30 - x)](x - 8)$ 元.这样,学生完全结合自己的统计结果进行分析和思考,于是很容易得到月均获利 y 元与销售单价 x 元/kg 之间的函数关系式 $y = 10[50 + 5(30 - x)](x - 8)$. 由于每月还要扣除人员工资 3000 元,通过计算和整理,即可得到 $y = 10[50 + 5(30 - x)](x - 8) - 3000 = -50x^2 + 2400x - 19000$,最后又可通过计算得到 $y = -50x^2 + 2400x - 19000 = -50(x - 24)^2 + 9800$,从而得出当 $x = 24$ 时, y 有最大值,即当销售单价定为 24 元/kg 时,月均获利最多,为 9800 元.

掌握了构建二次函数模型解决问题的方法之后,学生能够灵活地将数学知识运用于新的情境,并运用创造性思维解决现实问题,这是对数学知识达到深入理解状态的关键.

表 1

成本价(元/kg)	销售单价(元/kg)	月销售量(只)	月销售总重量(kg)	每千克利润(元)	月总利润(元)
8	30	50	50×10	22	$50 \times 10 \times 22$
8	29	$50 + 5 \times 1$	$(50 + 5 \times 1) \times 10$	21	$(50 + 5 \times 1) \times 10 \times 21$
8	28	$50 + 5 \times 2$	$(50 + 5 \times 2) \times 10$	20	$(50 + 5 \times 2) \times 10 \times 20$
8	27	$50 + 5 \times 3$	$(50 + 5 \times 3) \times 10$	19	$(50 + 5 \times 3) \times 10 \times 19$
8					
8	x	$50 + 5(30 - x)$	$10[50 + 5(30 - x)]$	$x - 8$	$10[50 + 5(30 - x)](x - 8)$

三、创设探究价值的问题情境,促进学生的自我反思性理解

数学问题解决过程中的自我反思是一种不断反复的思考行为.学生只有对数学学习思维活动的过程进行回顾性思索,不断从中提炼经验、总结教训,才能逐步深化对问题的理解.

例如,教师提供了一个图形翻折教学中的生活情境问题.有人喜欢把传送的便条折成如图 3-4 所示形状,折叠过程按如图 3-1、图 3-2、图 3-3、图 3-4 所示的顺序进行(其中阴影部分表示纸条的反面),长方形纸条的长为 26 厘米,分别回答下列问题.

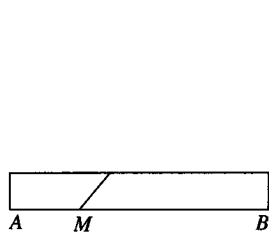


图 3-1

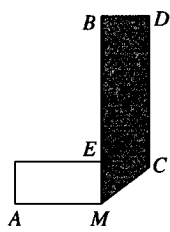


图 3-2

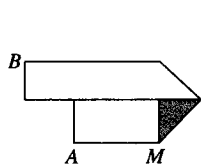


图 3-3

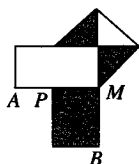


图 3-4

问题 1 如果长方形纸条的宽为 2 厘米,并且开始折叠时起点 M 与点 A 的距离 $AM=3$ 厘米,那么在图 3-2 中, $BE=$ _____ 厘米;在图 3-4 中, $BM=$ _____ 厘米.

问题 2 如果长方形纸条的宽为 x 厘米,现在不但要折成如图 3-4 所示的形状,而且为了美观,希望纸条两端超出点 P 的长度相等,即最终图形是轴对称图形,试求在开始折叠时起点 M 与点 A 的距离(即 AM 的长度,结果用含有 x 的代数式表示).

对于问题 1,有的学生直接根据示意图进行计算,很容易得到 $BM=26-3=23$,经过第一次翻折后,由 $BM=23$ 可以推算出 $BE=23-2=21$ (如图 4-1 所示).但是面对接下来再翻折得到如图 3-4 所示的状态,学生感到手足无措,不知道要减去几个 2 厘米宽度了.有些学生提出,只看示意图是不容易想象出来的,最好自己试着用长方形纸条折折看.通过动手折叠,学生发现由 $BE=21$,经过第二次翻折可得到 $BF=21-2=19$ (如图 4-2 所示);由 $BF=19$,经过第三次翻折后可得到 $BM=19-2\times 2=15$ (如

图 4-3 所示).

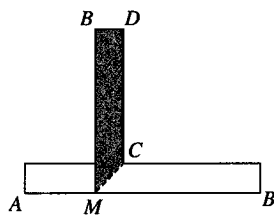


图 4-1

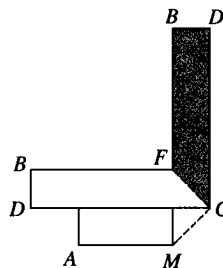


图 4-2

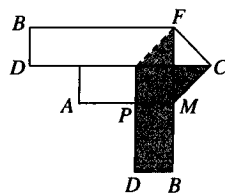


图 4-3

对于问题 2,纸条宽度由 2 变为 x , AM 的长度由 3 变为未知,通过折纸条求解的学生感到有些犯难.原先没有想到通过折纸条帮助思考的学生,反而因为吃亏在前,更积极地利用折叠纸条寻求问题解决方案,他们干脆在纸条的正反面将折痕都描了出来,还将字母标在了正反面的对应位置上.又有一些学生表示,将一些与宽度 BD 平行的线段都作为辅助线描出,同时将 AB 边上所有长度等于 BD 的线段都用 x 标注(如图 4-4 所示),这样就更容易观察了.此时,大部分学生都达成了这样的共识:要使纸条两端超出点 P 的长度相等,就意味着 $AP=PD$ (即 $AP=BM$),关键是列出等量关系式.由于 $AP=AM-x$,根据折叠的纸条展开后的字母标注情况,能够推算出 $BM=26-AM-4x$,就可以列出等量关系式 $26-AM-4x=AM-x$,从而得到 $AM=\frac{26-3x}{2}$.

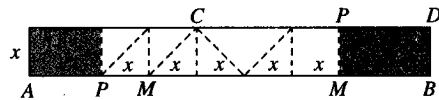


图 4-4

学生在尝试解决数学问题的过程中出现思维偏差在所难免,关键在于能够及时认识到自己思维的局限性,发现自己想法的不足之处,从而使认识不断得到深化,同时能够获得新的思考问题的起点,不断调整和完善数学认知结构,进一步洞察数学问题的本质,从而达到高层次的理解.

参考文献

- [1] 马复.试论数学理解的两种类型[J].数学教育学报,2001(3).
- [2] 刘良华.数学理解的六种维度观及其启示[J].教学与管理,2011(2).