

单元视角下数学抽象素养的培育

——以“图形的运动”为例

200011 上海市黄浦学校 顾涵明

摘 要:核心素养与关键能力是当前基础教育关注的热点,对于基层教师,除了需要在教育教学理念上获得认同和提升,更迫切需要在可操作性的指导上进行领悟和实践.教师应在数学课程标准的指导下,深刻理解数学抽象能力的核心内涵;基于教材并结合初中学生认知特点,梳理挖掘数学抽象能力与初中数学学科教学内容之间的内在关联;立足课堂教学,深入开展学生数学抽象能力培养的实践研究,以实践案例为基础,提炼归纳初中学生数学抽象能力培养的有效路径.

关键词:单元视角;数学抽象素养;图形;运动

数学是研究数量关系和空间形式的一门科学,抽象性、严谨性和广泛的应用性是其基本特征.数学抽象素养直接反映了数学学科抽象性的特征,它是形成理性思维的重要基础,贯穿在数学产生、发展、应用的过程之中.初中生思维处于由形象思维向抽象思维的过渡阶段,对于数学抽象素养的培养,需要学生积累从具体到抽象的活动经验,深入理解数学概念、命题、方法和体系,通过抽象概括把握事物的数学本质,逐渐养成思考问题的一般性习惯,并能在学习中主动运用数学抽象的思维方式解决问题.

数学学科核心素养的培养应贯穿于教学活动的全过程,无论是数学概念性质教学,还是问题探究教学都可以开展数学抽象素养培育.在课堂教学中,教师应以数学抽象素养培育为教学设计的隐性主线,树立以发展学生数学学科核心素养为导向的教学意识,立足单元视角,对每个单元进行思考、设计以及教学重点的确立,考虑到其与整个数学知识体系之间的关联性,依据教学内容的特征,结合学生现阶段的认知基础和发展需要,聚焦数学抽象素养的培育,以性质教学作为实践点开展实践研究.在教学实践中应关注探究,通过解决问题情境的问题,感受数学

抽象产生的过程;强调辨析,厘清知识的逻辑结构,体会数学抽象的严谨;注重运用,用数学语言和形式表示情境、问题中的数量关系和空间形式,理解数学抽象的内涵.在“图形的运动”的教学实践中,扎实依托课堂,创设和设计有利于发展数学抽象素养的情境和问题,整体把握教学内容,促进数学核心素养的连续性和阶段性发展,落实“四基”,培养“四能”,促进学生数学抽象核心素养的形成和发展.

一、单元视角下的性质教学中数学素养的培育点

“图形的运动”是沪教版七年级第一学期教材的第十一章,该单元内容包括了解图形的平移、旋转、旋转对称、翻折的意义,懂得中心对称、中心对称图形、轴对称、轴对称图形的意义;会在方格纸上画出平移后的图形、会画已知图形关于某一点中心对称的图形,会画已知图形关于某一直线成轴对称的图形,会画成轴对称图形的两个图形的对称轴;掌握图形的平移、翻折、旋转运动的基本特征和性质.

本单元中,主要性质是图形平移的性质、旋转的性质、翻折的性质、中心对称的基本性质、轴对称的性质,性质链示意图如图1所示.

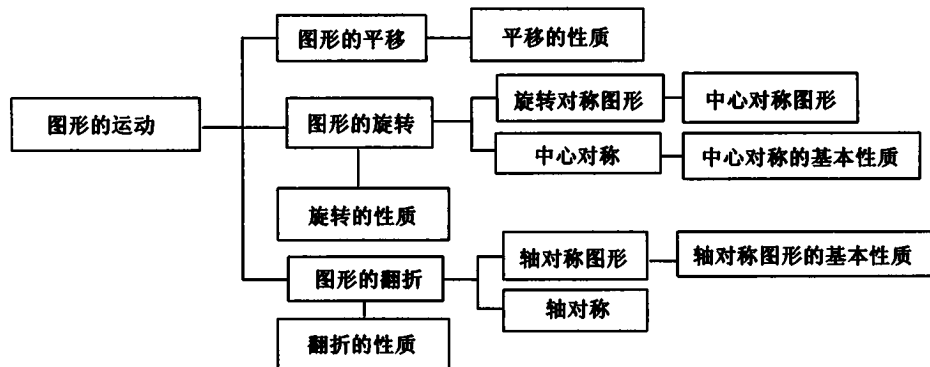


图1

性质教学中数学抽象素养培育点主要表现在“获得数学概念和规则”，即“能够在熟悉的情境中直接抽象出数学概念和规则，能够解释数学概念和规则的意义”和“能够在关联的情境中抽象出一般的数学概念和规则；能够用恰当的例子解释抽象的数学概念和规则”。

二、单元视角下的数学抽象素养培育的教学活动

(一) 关注性质的探究，感受数学抽象产生的过程

数学性质首要表现在性质的探究过程中，数学性质不是凭空产生的，而是人们在现实生活中的发现并抽象概括出来的。在形成数学性质的活动中，数学抽象素养表现在以下两个方面。一是用数学语言和形式表述情境问题中的数量关系和空间形式；二是厘清命题的逻辑结构，在命题的提出过程中蕴含着不同程度的抽象。

探索新知，归纳性质（“11.2 旋转”教学片段）

操作 1 如图 2-1，用 A4 纸裁出一个正方形 $ABCD$ ，联结 AC, BD 相交与点 O ，点 O 处用大头针钉住，旋转正方形纸片，最少旋转多少度可以使它与初始位置的正方形重合？每转多少度时重复上述现象？

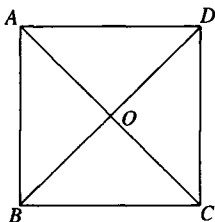


图 2-1

探究归纳：正方形最少旋转 90° 可以与初始位置的正方形重合，每旋转 90° 都会出现上述现象。旋转的三要素为旋转中心、旋转方向、旋转角。

操作 2

1. 在正方形的内部任意取一点 E （不与点 O 重合），点 E 处用大头针钉住，旋转正方形纸片，此时至少旋转多少度可以与初始位置的正方形重合？

2. 如果点 E 是正方形外一点，此时至少旋转多少度可以与旋转前的图形重合？

3. 如果点 E 是正方形边上一点，此时至少旋转多少度可以与旋转前的图形重合？

探究归纳：一个图形绕任意点旋转 360° ，与旋转前的图形重合。

操作 3 如图 2-2，将一张直角三角形纸片的较长直角边与正方形的边 AB 重合，且使另一条直角边与边 BC 重合，直角三角形纸片的斜边与边 BC 交于点 E ，如何旋转 $\triangle ABE$ 可以使旋转后三角形的 AB 边与正方形的 AD 边重合？

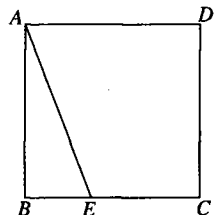


图 2-2

1. 画出旋转后 $\triangle ABE$ 的位置，点 A 的对应点记作点 A' ，点 B 的对应点记作点 B' ，点 E 的对应点记作点 E' ，请说出旋转中心、旋转方向和旋转角。

2. 写出 $\triangle ABE$ 的对应边和对应角，图形旋转后对应的线段长度、角的大小有变化吗？

3. 每一对对应点到旋转中心的距离有怎样的数量关系？每一对对应点与旋转中心所连线段的夹角是多少度？

4. 若点 F 是 $\text{Rt}\triangle ABE$ 内的任意一点，画出点 F 旋转后的对应点 F' 的位置，你如何确定点 F' 的位置？每一对对应点到旋转中心的距离是否依然相等？每一对对应点与旋转中心所连线段的夹角是否不变？

探究归纳：图形旋转后，每一对对应线段的长度相等，每一对对应角的大小相等，这个图形的大小、形状不变。图形旋转后，每一对对应点到旋转中心的距离相等，每一对对应点与旋转中心所连线段的夹角是一个定角，其大小等于旋转角（或周角与旋转角之差）。

设计意图：操作 1 让学生从了解相关概念入手，为用数学语言表述研究结果做铺垫，明确研究对象，为数学抽象表述进行知识储备。操作 2 意在让学生感知一个图形绕任意点旋转 360° 都与旋转前的图形重合，渗透分类的意识，在实验几何阶段引导学生了解数学性质的条件与结论。操作 3 引导学生迁移在平移学习中已经获得的平移的性质，思考图形旋转后，每一对对应线段的长度、对应角的大小是否依然不变，同时指导学生关注每一对对应点到旋转中心的距离，及每一对对应点与旋转中心所连线段的夹角，使学生能够在特例的基础上归纳并形成简单的数学规则，并在初步探究的基础上把问题一般化，思考此时探究所获得的性质是否依然适用。对于处于实验几何阶段，且几何研究经验尚不丰富的学生而言，问题情境的设计要有坡度，通过富有层次性的问题设计引发学生的深度思考，从而从实例中抽象出旋转的性质，即每一对对应点到旋转中心的距离相等，每一对对应点与旋转中心所连线段的夹角是一个定角，其大小等于旋转角（或周角与旋转角之差）。

在开展性质教学时，应在了解和分析学生认知规律的基础上，一步一步剖析，形成性质过程中抽象的层次性，循序渐进地帮助学生进行学习。在性质教学过程中，基本都是从特殊问题入手，接着从具体到抽象并上升到定量刻画，最后推理归纳出性质，并用

数学的语言准确描述.教师在性质教学中让学生经历观察、分析、抽象、提炼的过程,带领学生一起经历、感受性质的产生过程.

(二)强调性质的辨析,体会数学抽象的严谨性

性质的抽象需要环境,需要丰富的实例,教师通过复习和实验提供了大量的数据,引导学生从具体的数据中抽象出一般的结论,体验和经历数学抽象的过程,从“感性”上升到“理性”,由特殊到一般,抽象、推理、归纳出性质,让学生在数学的活动中体验和学会“再创造”.

探索新知,归纳性质(“11.1 平移”教学片段)

探索 1 如图 3-1,将 $\triangle ABC$ 平移后可得 $\triangle A_1B_1C_1$,图形平移后的形状和大小有怎样的关系?对应线段之间有怎样的数量关系?对应角之间有怎样的关系?

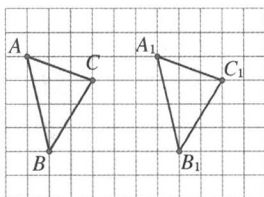


图 3-1

探究归纳:图形平移后,每一对对应线段的长度相等,每一对对应角的大小相等;这个图形的大小、形状不变.

探索 2 如图 3-2,将 $\triangle ABC$ 平移后可得 $\triangle DEF$.

1. 联结 AD, BE, CF ,对应点的联结线段的数量关系和位置关系是否和探索 1 的结论一样?
2. 画出边 AC 的中点 G 在平移后图形上的对应点 H ,说说你是怎样画的.
3. 在 $\triangle ABC$ 内任取一点 M ,画出图形平移后的对应点 N .
4. 如果直接将 $\triangle ABC$ 平移到 $\triangle DEF$,画出平移的方向,并量出平移的距离(精确到 0.1 单位长度).
5. 联结 GH, MN ,那么 GH 和 MN 有怎样的数量关系和位置关系?试着直接说出线段 GH 和 MN 的长度.

探究归纳:平移后,每一对对应点的联结线段互相平行并且相等,其长度等于平移的距离.

探索 3 如图 3-2,联结 BE, GH , BE 和 GH 的数量关系和位置关系是否和探索 2 的结论一样呢?

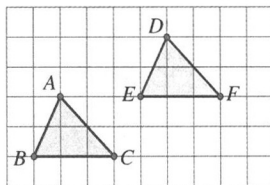


图 3-2

探究归纳:图形平移后,每一对对应点的联结线段互相平行(或在同一条直线上)并且相等,其长度等于平移的距离.

设计意图:在探索 1 的探究中得了两个重要的

性质,即图形平移后,图形的大小、形状都不变;图形平移后,对应线段的长度、对应角的大小相等.那么探索 1 所获得的性质是否适用于特殊情况,又是否适用于经过两次平移后能够完全重合的两个图形?是否能够应用探索 1 获得的性质确定图形中其他点平移后的位置?如果需要经过两次平移才能完全重合的两个图形,是否还有其他描述平移的方式?探索 1 是探索 2 的基础,探索 2 是探索 1 的发展;通过探索 2 初步感知图形平移后,每一对对应点的联结线段互相平行并且相等,其长度等于平移的距离,那么探索 2 的结论是否依然适用探索 3?在探究的过程中再从一般到特殊,通过研究体会每一对对应点的联结线段互相平行(或在同一条直线上),并体会不同条件下可能会产生不同的结论,感受数学性质的严谨性.从一次平移背景过渡到两次平移背景的过程中,不断让学生思考线段的位置关系和数量关系,在问题背景中用规范的数学语言表述结论.由于学生刚开始接触图形的运动,几何语言的表述不规范,需要充分重视性质理解阶段的教学,通过严谨的数学表达培养学生的数学素养,这样在性质归纳阶段中学生的表述就能更规范、更准确.

基于数学抽象素养培养的性质教学呈现出感知辨别、寻找关系、归纳事例共性、概括到同类事物、归纳性质的过程.在这一学习过程中,由于不同的条件下会得到不同的结论,因此,一定要强调性质的辨析,即性质应用的条件.数学性质的学习应帮助学生理解数学性质,对不同的情况进行分析,体会性质的严谨性.

(三)注重性质的运用,理解数学抽象的内涵

对于数学性质的学习,最重要的是运用,因为只有学生能够灵活运用这些性质,才能体现出对性质的辨析已经非常清晰,对性质的内涵已经了然于心.教师在性质教学中应加强学生对性质的运用、对性质内涵的理解.

尝试应用,感悟性质(“11.2 旋转”教学片段)

1. 如图 4-1,五角星的顶点是一个正五边形的五个顶点.这个五角星可以由一个基本图形(图中的阴影部分)绕中心 O 至少经过_____次旋转而得到,每一次旋转_____度.

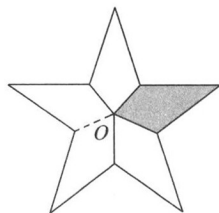


图 4-1

2. 如图 4-2,在 4×4 的正方形网格中, $\triangle MNP$ 绕某点旋转一定的角度,得到 $\triangle M_1N_1P_1$. 则其旋转中心可能是 A, B, C, D 四个点中的点_____,旋转角等于_____度.

3. 如图 4-3, $\triangle ABC$ 逆时针旋转后能与 $\triangle ADE$ 重合, 且 $\angle BAE = 60^\circ$, 则旋转中心是_____, 点 C 的对应点是_____, 线段 AB 的对应线段是_____, 旋转角的大小是_____度.

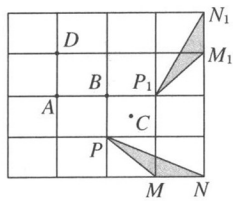


图 4-2

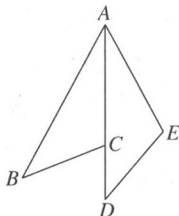


图 4-3

4. 如图 4-4, $\triangle ABC$ 是等腰直角三角形, $\angle BAC = 90^\circ$, $\triangle AEC$ 旋转后与 $\triangle AFB$ 重合, 那么点_____是旋转中心, $\angle CAE$ 的对应角是_____, 线段 AE 的对应线段是_____, 旋转角是_____, $\angle EAF =$ _____度. 若联结 EF , 则 $\triangle AEF$ 的形状为_____.

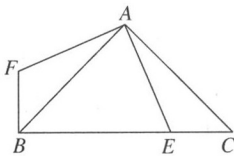


图 4-4

5. 如图 4-5, 一块等腰直角三角板 ABC , 在水平桌面上绕点 C 按顺时针方向旋转到 $A'B'C'$ 的位置, 且使 A, C, B' 三点共线, 那么旋转角度大小为_____度.

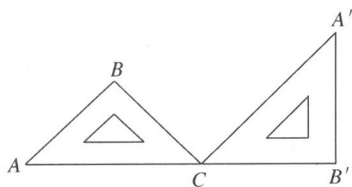


图 4-5

6. 如图 4-6, 在等边三角形 ABC 中, $AB = 6$, D 是 BC 上一点, 且 $BC = 3BD$, $\triangle ABD$ 绕点 A 旋转后得到 $\triangle ACE$, 则 CE 的长度为_____.

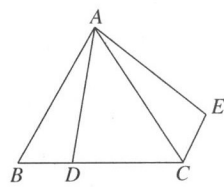


图 4-6

设计意图:第 1 题让学生在基本背景下明确旋转中心和旋转角. 第 2 题让学生在确定旋转中心的过程中体会图形旋转后, 每一对对应点到旋转中心的距离相等. 第 3 题是性质的基本应用. 第 4 题是探究性质阶段操作的一个变式, 将问题背景从正方形变为等腰直角三角形, 让学生在不同图形背景下体会旋转的性质. 第 5 题让学生体会每一对对应点与旋转中心所连线段的夹角是一个定角, 其大小等于旋转角(或周角与旋转角之差). 第 6 题的解答在应用性质的同时还需要运用线段的和差. 六道练习题让学生在具体问题背景下理解和应用旋转的性质,

加深对性质的理解. 在数学性质的应用过程中, 学生在具体的问题中解释数学性质的内容和含义, 进一步理解旋转的性质, 获得解决问题的能力, 从而实现自身的价值.

通过例题和练习, 学生进一步明晰性质、掌握性质, 在理解和应用性质的过程中举一反三, 将性质推广运用到具体问题中, 发展数学抽象.

三、单元视角下的数学抽象素养培育的教学实效

生活中图形运动无处不在, 学生对图形运动的现象并不陌生, 这些都为图形运动的学习提供了必要的知识经验. 学生在日常生活中积累了一定的生活经验和操作技能, 有一定的观察、归纳、探索能力, 但要求学生用数学的语言准确描述平移、旋转、中心对称、翻折、轴对称的过程和性质, 以及应用性质解决有关问题, 对于学生来说确实是难点. 基于学生的认知水平、年龄特征, 主要通过图形的观察和操作获得形象认知, 观察图形运动过程中的变量和不变量, 找出规律, 但是学生的探究能力、归纳概括能力仍相对薄弱, 所以在教学过程中创造条件和机会, 让学生发表见解, 发挥学习的主动性. 理解图形平移、旋转、中心对称、翻折、轴对称是每节课的难点, 但也是数学抽象素养培育的高阶载体, 在教学中让学生经历动手操作、观察的过程, 重视引导学生用数学语言表述观察结果, 逐步归纳图形性质, 达到落实抽象素养培育的目标.

在“图形的运动”的教学过程中, 以学生生活中的实例为背景, 以“表象—操作—抽象概念—思考—抽象性质—应用性质”为主线, 通过操作获得图形平移、旋转、中心对称、翻折、轴对称的性质, 让学生体会用运动的观点看待静止的几何图形, 感知几何变换的思想, 逐步归纳图形运动的性质. 教师设计适当的数学活动, 重视过程评价, 让学生独立思考或相互合作, 引导学生感悟数学抽象的价值, 提高学生的学习兴趣, 帮助学生认知自我理性思维的潜能, 增强信心, 以促进数学抽象素养的形成和发展.

“源于生活、易于理解”是对日常生活中一些规律的最为简朴的抽象, 性质教学从学生的学习经验和学习心理出发, 经历操作, 感知识别, 进而进行内化抽象概括, 通过数学语言和符号表达的过程获得性质. 通过培育数学抽象, 学生可以很好地理解数学性质, 清楚性质的来龙去脉, 真正明白其中的含义, 在更高的层面上理解数学知识的结构, 更好地把握数学知识的本质属性, 养成从更一般意义和方法上思考问题的习惯, 提升概括抽象能力, 促进理性思维的发展与提高.