

# 高三数学二轮复习微专题教学探讨

——以《求圆锥曲线的离心率范围问题》一课为例

张启兆,陈之领

(江苏省无锡市青山高级中学,214000)

**摘 要:**近年来,微专题教学已经成为大家广泛认同的高三数学二轮复习的一种有效课型。以高三数学二轮复习课《求圆锥曲线的离心率范围问题》的设计为例,说明微专题教学应该注意选题的针对性,选取高考热点、难点;注意认知的基础性,梳理知识和方法;注意方法的明确性,构建解决一类问题的“路线图”;注意思维的灵活性,拓展问题类型,克服思维定式。

**关键词:**高三数学二轮复习 微专题教学 《求圆锥曲线的离心率范围问题》

所谓“微专题教学”,是指立足于具体的学情、考情,选择一些角度新、切入点小、针对性强的复习专题,力求解决学生复习中的真实问题,加深学生对数学知识与方法的理解,提升学生思维能力的一种教学方式。近年来,微专题教学已经成为大家广泛认同的高三数学二轮复习的一种有效课型。本文结合高三数学二轮复习课《求圆锥曲线的离心率

范围问题》的设计,谈谈对微专题教学的一些实践与思考。

## 一、选题的针对性——选取高考热点、难点

求圆锥曲线的离心率范围问题综合性较强,灵活多变,能有效地考查学生的数学素养,是近几年高考的一个热点。这类试题往往条件隐晦,涉及面广泛,需要同时关注图形

的几何特征和函数的取值范围,使得不少学生感到困难,不知从何入手。因此,选择“求圆锥曲线的离心率范围问题”为复习主题(研究对象),以帮助学生应对热点,突破难点。

## 二、认知的基础性——梳理知识和方法

微专题教学要帮助学生梳理本专题所涉及的知识与方法,从而让学生充分感悟不同问题之间的联系,进而形成对一类问题更为系统、全面的认识,为学生在新的情境问题的解决过程中形成结构化的能够举一反三、触类旁通的图式做好准备。

本节课中,为帮助学生梳理认知结构中已有但是相对零散的求解圆锥曲线的离心率范围问题的知识和方法,笔者出示了以下教材改编题:

(1)(苏教版高中数学选修1-1第35页习题第9题改编)已知椭圆 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的两个焦点分别为 $F_1, F_2$ ,短轴的一个端点为 $P$ 。若 $\angle F_1PF_2$ 为钝角,求椭圆离心率的取值范围;

(2)(苏教版高中数学选修1-1第39页练习第5题改编)求双曲线 $\frac{x^2}{k} - \frac{y^2}{2-k} = 1$ 的离心率的取值范围。

这两道题目引导学生回顾求圆锥曲线离心率范围问题的关键是寻找 $a, b, c$ 之间的不等关系,基本方法是从几何特征或代数特征出发寻找不等关系;同时,让学生体会数形结合思想在解决这类问题中的作用。

然后,笔者提出了以下反思性问题:

(1)圆锥曲线离心率怎样计算?(预设:椭圆的离心率 $e = \frac{c}{a}, e^2 = \frac{c^2}{a^2} = \frac{a^2 - b^2}{a^2} = 1 -$

$$\frac{b^2}{a^2}, 0 < e < 1; \text{双曲线的离心率 } e = \frac{c}{a}, e^2 = \frac{c^2}{a^2} = \frac{a^2 + b^2}{a^2} = 1 + \frac{b^2}{a^2}, e > 1.)$$

(2)通过对圆锥曲线离心率计算公式的研究,发现求解圆锥曲线离心率的范围问题的关键是什么?(预设:寻找 $a, b, c$ 之间的不等关系。)

(3)解析几何问题用得最多的转化是几何问题代数描述、代数问题几何表示。几何条件“ $\angle F_1PF_2$ 为钝角”怎样用代数方式描述?(预设:①点 $P$ 在以 $F_1F_2$ 为直径的圆内,即 $OP < \frac{1}{2}F_1F_2$ ,即 $b < c$ ;② $\overrightarrow{PF_1} \cdot \overrightarrow{PF_2} = (-c, -b) \cdot (c, -b) = b^2 - c^2 < 0$ ;③ $\cos \angle F_1PF_2 = \frac{2a^2 - 4c^2}{2a^2} < 0$ ;④ $\tan \angle OPF_1 = \tan \angle OPF_2 = \frac{c}{b} > 1$ 。)

(4)若方程 $\frac{x^2}{k} - \frac{y^2}{2-k} = 1$ 表示双曲线,则隐含什么条件?(预设: $k$ 和 $2-k$ 非零、同号。)

(5)可从哪些方面寻找 $a, b, c$ 之间的不等关系?(预设:从题意出发,从圆锥曲线自身性质出发,从几何特征出发,从代数特征出发。)

这五个问题旨在引导学生利用数形结合思想,重新审视求圆锥曲线离心率范围问题的过程,为学生自主生成求圆锥曲线离心率范围问题的方法做准备。

## 三、方法的明确性——构建解决一类问题的“路线图”

微专题教学要帮助学生建立良好的解题认知结构,实现“为迁移而教”,应将重点放在构建解决本专题问题较为清晰的“路线图”以

及渗透解决本专题问题的一般数学思想方法上,而不是只关注单个题目的具体解法。要防止复习的“碎片化”,避免“就题论题”,不能将专题教学异化为同类题的综合训练。

求解圆锥曲线的离心率范围问题中,很多问题的条件与椭圆或双曲线的焦点三角形(以曲线的两焦点和曲线上一点为顶点的三角形,故其三边分别为两个焦半径和焦距)有关。因此,笔者选择其中的两类典型——已知两个焦半径的夹角大小、已知两个焦半径的长度关系,帮助学生梳理解题的基本思路:在焦点三角形中,利用圆锥曲线的第一定义、余弦定理以及其他已知条件等,将有关的量用 $a$ 、 $b$ 、 $c$ 表示出来;再利用基本不等式、三角形的三边关系、焦半径的取值范围等,建立 $a$ 、 $b$ 、 $c$ 之间的不等关系。具体设计如下:

**例 1** (2018 年高考全国 II 理科卷第 12 题改编) 已知  $F_1$ 、 $F_2$  是椭圆  $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$  的两个焦点,若椭圆  $C$  上存在点  $P$ ,使得  $\angle F_1 P F_2 = 120^\circ$ ,则椭圆  $C$  的离心率的取值范围是\_\_\_\_\_。

**例 2** (2018 年高考全国 I 理科卷第 11 题改编) 设双曲线  $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > 0, b > 0)$  的左、右焦点分别为  $F_1$ 、 $F_2$ ,若点  $P$  在双曲线的右支上,且  $PF_1 = 4PF_2$ ,则此双曲线离心率的最大值为\_\_\_\_\_。

**例 3** (2018 年高考全国 II 文科卷第 11 题改编) 已知椭圆  $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$  的左、右焦点分别为  $F_1(-c, 0)$ 、 $F_2(c, 0)$ ,若椭圆  $C$  上存在点  $P$ ,使得  $\frac{a}{\sin \angle P F_1 F_2} = \frac{c}{\sin \angle P F_2 F_1}$ ,则椭圆  $C$  的离心率的取值范围

是\_\_\_\_\_。

例 1 属于“已知两个焦半径的夹角大小”问题,可以看作之前的教材改编题(1)的变式:椭圆上确定的点变为不确定的点,椭圆上点对椭圆焦点不确定的张角变为确定的张角。解题时,可以在焦点三角形中运用椭圆的第一定义和余弦定理,结合基本不等式寻找基本量的不等关系:由椭圆的第一定义知  $PF_1 + PF_2 = 2a$ ,  $F_1 F_2 = 2c$ ,由余弦定理得  $F_1 F_2^2 = PF_1^2 + PF_2^2 - 2PF_1 \cdot PF_2 \cdot \cos \angle F_1 P F_2 = (PF_1 + PF_2)^2 - 2PF_1 \cdot PF_2 - 2PF_1 \cdot PF_2 \cdot \cos 120^\circ$ ,得  $4c^2 = 4a^2 - PF_1 \cdot PF_2$ ,由基本不等式得  $PF_1 \cdot PF_2 \leq \left(\frac{PF_1 + PF_2}{2}\right)^2$  (当且仅当  $PF_1 = PF_2$  时取等号),得  $4a^2 - 4c^2 \leq a^2$ ,  $3a^2 \leq 4c^2$ ,即  $e^2 \geq \frac{3}{4}$ ,又  $0 < e < 1$ ,所

以  $\frac{\sqrt{3}}{2} \leq e < 1$ 。

例 2 属于“已知两个焦半径的长度关系”问题。解题时,可以在焦点三角形中运用双曲线的第一定义和已知的长度关系,结合三角形的三边关系寻找基本量的不等关系:由双曲线的第一定义得  $PF_1 - PF_2 = 2a$ ,结合  $PF_1 = 4PF_2$  可得  $PF_1 = \frac{8}{3}a$ ,  $PF_2 = \frac{2}{3}a$ ,由三角形的三边关系得  $PF_1 + PF_2 \geq F_1 F_2$  (当且仅当  $P$  为双曲线右顶点时取等号),得  $\frac{8}{3}a + \frac{2}{3}a \geq 2c$ ,  $\frac{10a}{3} \geq 2c$ ,即  $e \leq \frac{5}{3}$ ……或者结合焦半径的取值范围寻找基本量的不等关系:由焦半径的取值范围得  $PF_1 \geq c + a$  或  $PF_2 \geq c - a$  (当且仅当  $P$  为双曲线右顶点时取等号),得  $\frac{8}{3}a \geq c + a$  或  $\frac{2}{3}a \geq c - a$ ,则  $\frac{5}{3}a \geq c$ ,

即  $e \leq \frac{5}{3}$ .....

例3可以看作例2的变式:双曲线变为椭圆,  $PF_1 = 4PF_2$  (即  $\frac{1}{PF_2} = \frac{4}{PF_1}$ ) 变为  $PF_1 = ePF_2$  (即  $\frac{a}{PF_2} = \frac{c}{PF_1}$ , 即  $\frac{a}{\sin \angle PF_1 F_2} = \frac{c}{\sin \angle PF_2 F_1}$ )。解题时,同样可以利用三角形的三边关系:易得  $PF_1 = \frac{2ea}{1+e}$ ,  $PF_2 = \frac{2a}{1+e}$ , 由三角形的三边关系得  $PF_2 - PF_1 \leq F_1 F_2$ , 得  $\frac{1-e}{1+e} \cdot 2a \leq 2c$ , 即  $\frac{1-e}{1+e} \leq e$ , 解得  $\sqrt{2}-1 < e < 1$ 。或者利用焦半径的取值范围:由焦半径的取值范围得  $a-c < PF_1 < PF_2 < a+c$ , 得  $a-c < \frac{2ea}{1+e} < \frac{2a}{1+e} < a+c$ , 即  $1-e < \frac{2e}{1+e} < \frac{2}{1+e} < 1+e$ , 即  $e^2 + 2e - 1 > 0$ , 解得  $\sqrt{2}-1 < e < 1$ 。

这三道高考改编题及之前的教材改编题(1)之间联系密切,可以帮助学生建立良好的解题认知结构,实现“为迁移而教”。

#### 四、思维的灵活性——拓展问题类型,克服思维定式

数学问题千变万化,基本的题型总结不可避免有一定的局限性。微专题教学,在帮助学生提炼有明显类型特征的基本问题解题思路的基础上,要呈现一些没有明显类型特征的拓展问题,将学生的思维引向深处,帮助学生克服思维的定式,增强思维的灵活性。

求解圆锥曲线的离心率范围问题中,还有一些问题的条件与椭圆、双曲线的焦点三角形无关。对此,笔者引导学生跳出椭圆或双曲线焦点三角形的局限,将上述问题的条件看作更一般的“与椭圆、双曲线上不确定的点有关”,从而进一步得出:问题的条件还可

以是与椭圆、双曲线上不确定的点有关的其他条件,或与椭圆、双曲线的不确定的弦有关的条件。由此,笔者出示如下两个问题,引导学生感受求圆锥曲线的离心率范围问题的多变性以及解法的灵活性。

**例4** 已知椭圆  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$  和圆  $O: x^2 + y^2 = b^2$ , 若椭圆上存在点  $P$ , 使得过点  $P$  所引的圆  $O$  的两条切线互相垂直, 求该椭圆离心率的取值范围。

**例5** 已知椭圆  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ ,  $O$  为其中心,  $AB$  为其过中心的弦,  $F$  为其右焦点, 若  $AF \perp BF$ , 且  $\angle ABF \in \left[ \frac{\pi}{12}, \frac{\pi}{4} \right]$ , 则该椭圆离心率的取值范围是\_\_\_\_\_。

例4中,椭圆上不确定的点  $P$  所满足的条件与焦点三角形无关。对此,我们可以充分分析条件,探索问题本质:如图1,设过点  $P$  所引的圆  $O$  的两条切线分别切圆  $O$  于点  $A$ 、 $B$ , 连接  $OA$ 、 $OB$ , 根据  $PA \perp PB$ , 结合圆的切线的有关的知识,可知四边形  $OAPB$  是正方形,所以  $OP = \sqrt{2}OA = \sqrt{2}b$ , 即点  $P$  在以  $O$  为圆心、以  $\sqrt{2}b$  为半径的圆上。利用这一几何特征,便可得到  $2b^2 \leq a^2$  的不等关系,即有  $2a^2 - 2c^2 \leq a^2$ ,  $a^2 \leq 2c^2$ , 即  $e^2 \geq \frac{1}{2}$ ,  $\frac{\sqrt{2}}{2} \leq e < 1$ 。这一解法体现了充分利用几何特征求解的转化思想。

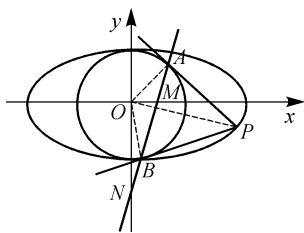


图1

例5的条件与椭圆不确定的中心弦有

关。对此,我们仍然充分分析条件,探索问题本质:如图2,根据 $AF \perp BF$ , $O$ 为 $AB$ 中点,可得 $AB = 2OF = 2c$ ;结合 $\angle ABF$ 的范围,可以将 $AF$ 、 $BF$ 用 $\angle ABF$ 表示出来,即 $AF = 2c \sin \angle ABF$ , $BF = 2c \cos \angle ABF$ ;取椭圆的左焦点 $F'$ ,连接 $AF'$ ,根据 $AB$ 为椭圆的中心弦,结合椭圆的对称性,可知 $AF' = BF$ ;结合椭圆的第一定义,即 $AF + AF' = 2a$ ,可得 $2c \sin \angle ABF + 2c \cos \angle ABF = 2a$ ,则 $e = \frac{c}{a} =$

$$\frac{1}{\sin \angle ABF + \cos \angle ABF} = \frac{1}{\sqrt{2} \sin \left( \angle ABF + \frac{\pi}{4} \right)}.$$

这样便将要求范围的量 $e$ 用已知范围的量 $\angle ABF$ 表示出来。于是,由 $\angle ABF \in \left[ \frac{\pi}{12}, \frac{\pi}{4} \right]$ ,得 $\angle ABF + \frac{\pi}{4} \in \left[ \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2} \right]$ , $\sin \left( \angle ABF + \frac{\pi}{4} \right) \in \left[ \frac{\sqrt{3}}{2}, 1 \right]$ ,则 $e \in \left[ \frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{6}}{3} \right]$ 。这一解法体现了建立目标函数求解取值范围的函数思想。

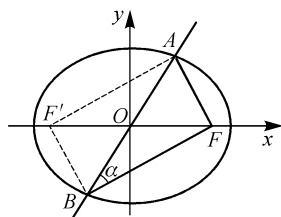


图2

最后,笔者出示如下一道条件与双曲线的不确定的弦有关的问题,作为课后作业,进一步拓展学生对求圆锥曲线离心率范围问题的认识,让学生体会分类讨论等数学思想的

运用:

**作业** (2018年高考北京理科卷第14题改编)设双曲线 $C$ 的中心为点 $O$ ,若有且只有一对相交于点 $O$ 、所成的角为 $60^\circ$ 的直线 $A_1B_1$ 和 $A_2B_2$ ,使 $|A_1B_1| = |A_2B_2|$ ,其中 $A_1$ 、 $B_1$ 和 $A_2$ 、 $B_2$ 分别是这对直线与双曲线 $C$ 的交点,则该双曲线离心率的取值范围是\_\_\_\_\_。

综合上述教学设计,从另一个角度看,微专题教学比较合适的策略是“小题引路,例题精讲,变式巩固”,即结合学生实际,精心设计“问题串”,以简单问题带动知识和方法的梳理,以典型例题阐述知识和方法的应用,辅之以变式串讲,巩固提升对知识和方法的理解。同时,单个问题比较合适的教学策略是引导学生经历问题提出、分析、比较、解决、提炼的过程,帮助学生形成“基本想法”,提升思维能力。

#### 参考文献:

- [1] 杨玉琴,倪娟.深度学习:指向核心素养的教学变革[J].当代教育科学,2017(8).
- [2] 吴新建.高三微专题复习课的实践与思考——以复合函数 $y = f(u(x))$ 的零点问题的教学为例[J].数学通报,2016(5).
- [3] 余建国.模式识别理论指导下的数学解题教学——以一道高考解析几何题为例[J].教育研究与评论(中学教育教学),2019(8).
- [4] 王弟成.高中数学“隐圆”问题的特点与解法——以一道高二学业质量调研试题为例[J].教育研究与评论(中学教育教学),2019(6).