

突出思维过程的教学 促进核心素养的提升

孙 磊 (江苏省无锡市第三高级中学 214000)
钱 铭 (江苏省无锡市第一中学214031)

摘 要:数学的眼光、数学的思维、数学的语言是构成数学核心素养的三大支柱.在数学教学中,要突出数学思维活动的教学,注意追溯专家的思维过程,展示教师的思维过程,暴露学生的思维过程,引导学生学会理性思维,实现在思维层面上的深度学习,从而优化学生的思维品质,培养和发展学生的数学学科核心素养,为学生的长效发展和可持续发展奠基和助力.

关键词:课程改革;数学教学;核心素养;思维过程

文章编号:1004-1176(2022)05-0015-04

关注学生的长效发展和可持续发展,使学生形成终身受益的数学学科核心素养,受到了人们的高度重视,成为当前数学教学改革的重要导向和热门话题.《普通高中数学课程标准(2017 年版)》指出:“数学核心素养是数学课程目标的集中体现,是具有数学基本特征的思维品质、关键能力以及情感、态度与价值观的综合体现,是在数学学习和应用的过程中逐步形成和发展的.”要求通过数学教学,引导学生学会用数学的眼光观察世界、会用数学的思维思考世界、会用数学的语言表达世界^[1].在这里,把数学的眼光、数学的思维、数学的语言看成是构成数学核心素养的三大支柱.数学核心素养既是高度抽象的思维产物,又是高于数学知识的思维方法.数学思维是数学核心素养最重要的部分,也是发展学生数学素养的根基所在.数学学习的本质,是数学思维活动的过程.因此,突出数学思维活动的教学,优化学生的思维品质,使学生学会理性思维,实现学生在思维层面上的“深度学习”,是培养和发展学生数学核心素养、促进学生数学核心素养养成的有效途径和重要抓手.

1 追溯专家的思维过程,培养数学思维的意识

人们对数学知识、数学思想和数学方法的认识,一般都是先在实践中获得了大量的数学事实和活动经验,然后再根据这些事实和体验来总结、归纳和提炼出相应的数学命题和数学规律、数学思想和数学方法,再通过逻辑推理来加以证明、予以验证.在这个程中,数学的思维起着关键性的作用.^[2]数学教学要根据课标、教材和学情,充分利用现有的教学资源精心设计,引领学生追溯当年数学家探究数学知识、发现数学规律、提炼数学思想方法的心路历程,体验数学家在建构数学概念和用已有的知识去探索未知

世界的思维活动,使学生从专家们探究、发现数学的知识、思想和方法的思维活动过程中感悟数学思维的魅力,增强数学思维的意识.

案例 1 “弧度制”一课的教学片断.

师:前面一节课,我们将角的概念进行了推广,建立了任意角的概念,对“角”有了新的、进一步的认识.

问题 1 角的大小是如何进行度量的?

生:规定周角的 $\frac{1}{360}$ 为 1 度的角.这种用度作为单位来度量角的单位制叫作角度制.

师:角度制是古巴比伦人对天文学和数学所作出的一个重大贡献!古巴比伦人受“黄道 12 星座”和“春秋分日,太阳划过半个周天的轨迹恰好等于 180 个太阳直径”的启发,把圆周等分为 360 份,将每一份所对的圆周角叫做 1 度的角,由此产生度量角的一种制度——角度制.

问题 2 用度作为度量角的单位是唯一的吗?你觉得度量角的大小还能有其他方法吗?

生:应该有.例如长度的度量,既可以用“尺”,也可以用“米”,度量重量可以用千克、磅等不同单位.

师:很好!角度制是 60 进制,1 度等于 60 分,1 分等于 60 秒.但我们在进行计算时,很多时候运用的都是 10 进制,这就产生了进位制不统一的问题.

问题 3 你觉得还可以选择怎样的单位来度量一个角的大小呢?

师:面对这一问题,许多数学家进行了不懈的探索.公元 6 世纪,印度著名数学家阿利耶毗陀尝试将一个圆的周长分成 21 600 等份,相应地将该圆的直径分成 3 438 等分(即取圆周率 $\pi=3.141\ 2$),产生了从圆周长与半径的关系上着手研究角,孕育了最早的弧度制的概念.18 世纪初,Roger Cotes 肯定了这种度量角的方式的自然性和便利性.在 1748 年,大数学家欧拉在他的一部划时代著作《无穷小分析概论》中,运用类比角度制的方法,提出了

弧度制的概念,确立了弧度制的思想.他认为,可以把圆的半径作为弧长的度量单位,使一个周角等于 2π 弧度,1 弧度等于周角的 $\frac{1}{2\pi}$.这一发现将线段与弧的度量统一起来,大大地简化了三角公式及计算.下面,我们不妨沿着欧拉的足迹,从它的研究成果出发,对弧度制的有关知识展开探究.

问题4 如图1,射线 OA 绕端点 O 旋转到 OB 形成角 α .在旋转过程中,射线 OA 上一点 P (不同于点 O) 的轨迹是一条圆弧,这条圆弧对应于圆心角 α .记圆弧 PP_1 的长为 l ,圆弧的半径 $OP=r$,则 l, r, α 之间存在着怎样的关系?

生:设 $\alpha = n^\circ$,由初中学过的知识,有 $l = \frac{n\pi r}{180}$.

师:很好!变形一下,可得 $\frac{l}{r} = n \times \frac{\pi}{180}$.

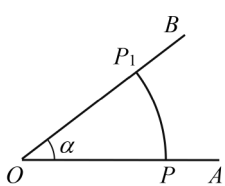


图1

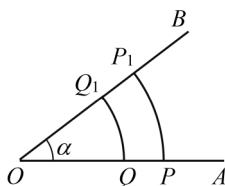


图2

问题5 如图2,在射线 OA 上任取一点 Q (不同于点 O), $OQ=r_1$,在旋转过程中,点 Q 所形成的圆弧 QQ_1 的长为 l_1 ,则 $\frac{l_1}{r_1}$ 是多少?由此,你能得出什么结论?

生:类似于问题4,可得 $\frac{l_1}{r_1} = n \times \frac{\pi}{180}$,没有改变,即圆心角 α 所对的弧长与半径的比值,只与 α 的大小有关.

师:这就是说,圆心角 α 所对的弧长与半径的比值,随圆心角 α 的确定而唯一确定.从而启发我们,可以利用圆的弧长与半径的比值来度量角的大小.

问题6 你能类比角度制,给出弧度制的有关概念吗?

在学习弧度制之前,学生对角度制已经有了一定的了解,如果在此基础上直接给出弧度制的定义,建立起弧度制与角度制之间的联系,学生也能接受,并能运用弧度制的知识来解决一些相应的问题.但是,度量角的大小既然有了角度制,为什么还要研究弧度制?怎么想到用弧度来表示角的?弧度制的优越性何在?对这些问题,学生会十分困惑,有一种强行灌输的感觉,无法激起学习的热情和兴趣.本案例中,针对学生的问题,适时地融入数学史,介绍弧度制产生的背景,引领学生追溯数学家的思维轨迹,像数学家那样围绕着面对的问题与困惑,运用类比角度制的研究方法展开探究活动,经历“1 弧度角”和

“弧度制”概念的发生和发展的过程,达成“将弧长与角的度量单位统一起来”的共识,不但自然而然地得出“1 弧度角”和“弧度制”概念,揭示出弧度制与角度制之间的联系,破解了学习的障碍,而且充分地体验了数学家在进行科学探究、解决疑难问题、建立数学理论时的思维方法,使学生感受了类比推理和演绎推理的价值,学会了用数学的思维去分析和解决问题,提升了学生的数学核心素养,匡扶了学生的数学学习行为.

2 展示教师的思维过程,学会数学思维的方法

一般来讲,学生的思维往往是在教师思维的引领之下,通过模仿教师的思维而逐渐形成的,所以教师在组织教学活动时必须高度地关注思维形式的“显化”.现行的数学教材,因为篇幅的关系和章节结构的因素,许多内容都省略了知识的发展、探索和思路的发现、形成的过程,一些定理和性质是如何发现的,解决问题的方法是如何构想的和研究的,学生对它们存在着一种必然的神秘感和疑惑感.因此,在课堂教学中,对于每一个数学概念的建构,数学定理、性质和公式的发现,例题与习题的求解,都应将教师自己真实的思维活动过程完完全全地呈现在学生的面前,让学生不仅能看到教师获得成功的思维过程,还要能看到教师受困、碰壁、试误、失败和挣脱困境的思维过程.要设法使学生看到,面对一个新问题时教师自己是怎样寻求解决思路的、其依据是什么、特别是在思路受阻后如何调整思路、为什么这样调整等等^[3].这样,学生看到了教师探求数学知识、解决数学问题的完整的思维过程,并从这个思维过程中感悟研究数学现象、解决数学问题的思维方法,学会数学地思考问题,从而有效地训练数学思维的品质,提升数学学科的核心素养.

案例2 “函数性质的应用”一课的教学片断

师:前面,我们研究过函数的奇偶性和单调性,这是函数的两个重要性质,在解决函数的有关问题时,有着广泛的应用.今天这节课,我们通过一些具体的问题,进一步地来感受一下.请大家先看下面的问题(投影显示).

问题 已知函数 $f(x) = 2^x + \ln(\sqrt{x^2 + 1} + x) - 2^{-x} + 1$, 则不等式 $f(2x-1) + f(2x) > 2$ (*) 的解集为 _____.

师:怎样求出不等式(*)的解集呢?

生:先将不等式用 x 具体地表示出来.

师:很好!我也是这样思考的.要解不等式(*),首先能够想到的,就是根据 $f(x)$ 的表达式,将 $f(2x-1)$ 和 $f(2x)$ 用 x 表示出来,脱去 f 的符号,得到不等式 $[2^{2x-1} +$

$\ln(\sqrt{(2x-1)^2+1}+2x-1)-2^{-(2x-1)}+1]+[2^{2x}+\ln(\sqrt{(2x)^2+1}+2x)-2^{-2x}+1]>2$, 即 $2^{2x-1}+\ln(\sqrt{(2x-1)^2+1}+2x-1)-2^{-(2x-1)}+2^{2x}+\ln(\sqrt{(2x)^2+1}+2x)-2^{-2x}>0$ ①. 这实现了化抽象为具体的目标. 下面怎么办? 如此复杂的不等式, 仍然难解! 大家的想法是什么?

生: ?

师: 要解这个不等式, 脱去 f 的符号是关键, 除了上面的方法外, 有其他脱去 f 的方法吗?

生: 容易发现, $f(x)$ 是定义在 $\mathbf{R}$ 上的增函数, 如果能将不等式转化为 $f(a)>f(b)$ 的形式, 就可以利用 $f(x)$ 的单调性脱去 f 的符号了.

师: 非常好! 这是想到了一种已有的解题经验, 前面曾经解过类似的问题. 问题是, 怎样才能将不等式化为 $f(a)>f(b)$ 的形式呢?

生: 由 $f(x)=2^x+\ln(\sqrt{x^2+1}+x)-2^{-x}+1$, 可得 $f(0)=1$, 不等式的右边是 $2f(0)$, 如果能将不等式的左边变形为 $2f(?)$ 就好了!

师: 不错的想法, 不妨沿着这个思路试试看.

师生一起尝试, 发现此路不通, 思路受阻.

师: 这个思路行不通了, 还有其它方法吗?

生: ?

师: 我们不妨回过头来看看上面变形后得到的不等式 ①, 将其整理, 得 $[2^{2x-1}-2^{-(2x-1)}+\ln(\sqrt{(2x-1)^2+1}+2x-1)]+[2^{2x}-2^{-2x}+\ln(\sqrt{(2x)^2+1}+2x)]>0$. 如果令 $g(x)=2^x-2^{-x}+\ln(\sqrt{x^2+1}+x)$, 则上面的不等式即为 $g(2x-1)>-g(2x)$. 联想已有的解题经验, 使我们想到着手研究一下函数 $g(x)$ 的性质. 由函数奇偶性和单调性的定义, 容易证明函数 $g(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上既是奇函数, 又是增函数. 根据 $g(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上是奇函数, 可将不等式转化为 $g(2x-1)>g(-2x)$, 再由 $g(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上是增函数, 可得 $2x-1>-2x$, 即 $x>\frac{1}{4}$, 所以不等式的解集为 $\left\{x \mid x>\frac{1}{4}\right\}$.

在本案例中, 教师运用师生对话的形式, 引领学生对问题进行分析和探索, 寻求突破解题障碍的方法和策略, 将教师解决这一问题的思维活动完完整整地展示在学生的面前, 学生看到的不再单纯是教师顺利完成解题的神来之笔, 而是教师分析和解决这一问题的整个思考过程, 有对问题条件和结论的分析, 有对解题思路的探索, 也有在一种思路受阻时怎样借助已有的解题经验联想已经解决过的类似问题的处理方法, 通过对问题化归、转化、构造, 冲破解题困境的策略, 使学生不仅理解和掌握了一类问题的解题方法, 而且体验了数学思想, 学会了理性思

考, 优化了思维品质, 实现了在对比中求得简捷, 在运用中变得灵活, 在活动中获得经验, 在疏漏后学得缜密, 有效地提高了分析问题和解决问题的能力.

3 暴露学生的思维过程, 提升数学思维的能力

教育家斯托利亚尔指出: “数学教学是数学活动 (思维活动) 的教学, 而不仅是数学活动的结果——数学知识的教学.” 这就是说, 数学教学不仅要反映数学活动的结果, 而且还要善于暴露得到这些结果的思维活动的过程. 数学专家和数学教师解决数学问题的思维活动与学生的思维活动存在着明显的差异, 无法代替也不应该代替学生的思维过程. 只有让学生亲自经历探索的曲折情节, 使思维带有悬念色彩, 才能增添学习的情趣, 从而让学习变得更“有意义”.^[4] 课堂教学中, 教师应注意创设贴切的问题情境, 巧妙地设置悬念, 激发学生积极地参与到探索数学知识、发现解题方法的思维活动中来, 给学生提供广阔的思考空间和参与平台, 引导学生畅所欲言、各抒己见, 评判各种思路和方法的优劣, 要能耐心地倾听学生的意见, 让学生充分暴露自己的思维过程, 及时地对学生思维过程加以归纳、概括, 帮助学生发现思维的“闪光点”和存在的问题, 总结思维的规律、方法和技巧, 有意识地指出学生思维活动的优劣, 以此来激发学生的创造思维, 发展学生的思维能力.

案例3 “导数在研究函数中的应用”一课的教学片断.

在研究了导数与函数的单调性、极值与最值之间的关系后, 笔者给出了如下的一个问题给学生探究 (投影展示):

问题 已知函数 $f(x)=(x^2-ax+a)e^x-x^2$, 是否存在实数 a , 使得 $f(x)$ 在 $x=0$ 处取得极小值? 若存在, 求出 a 的取值范围; 若不存在, 说明理由.

师: 请思考, 如何解决这一问题, 说出你们的想法.

生1: 为使函数 $f(x)$ 在 $x=0$ 处取得极小值, 必须使得 $f'(0)=0$. 对 $f(x)$ 求导, 得 $f'(x)=(2x-a)e^x+(x^2-ax+a)e^x-2x=[x^2+(2-a)x]e^x-2x$. 可知 $f'(0)=0$ 恒成立, 故存在实数 a , 使得 $f(x)$ 在 $x=0$ 处取得极小值, a 的取值范围是 $\mathbf{R}$.

师: 生1的解法怎么样? 有没有什么问题?

生2: 上面的解法存在漏洞, 函数 $f(x)$ 在 $x=0$ 处取得极小值, 不仅需要 $f'(0)=0$, 还要满足条件: $x<0$ 时 $f'(x)<0$, 并且 $x>0$ 时 $f'(x)>0$.

师: 你上黑板来解解看.

生2: 对 $f(x)$ 求导, 得 $f'(x)=x[(x-a+2)e^x-2]$. 假设存在实数 a , 使得 $f(x)$ 在 $x=0$ 处取得极小值, 则必有 $f'(0)=0$, 并且当 $x\in(-\infty, 0)$ 时 $f'(x)<0$, 当

$x \in (0, +\infty)$ 时 $f'(x) > 0$. 显然 $f'(0) = 0$ 恒成立, 又 $f'(x) = x[(x-a+2)e^x - 2]$, 所以 $(x-a+2)e^x - 2 > 0$, 对任意 $x \in (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$ 恒成立, 即 $a < x + 2 - \frac{2}{e^x}$, $x \in (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$. 构造函数 $g(x) = x + 2 - \frac{2}{e^x}$, $x \in (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$, 则有 $a < g(x)_{\min}$. 对 $g(x)$ 求导, 得 $g'(x) = 1 + \frac{2}{e^x} = \frac{e^x + 2}{e^x}$, $x \in (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$, 则 $g'(x) > 0$ 对任意 $x \in (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$ 都成立, 所以函数 $g(x)$ 在 $(-\infty, 0)$ 和 $(0, +\infty)$ 上都是单调递增函数, 由此可知 $g(x)$ 不存在最小值. 所以不存在实数 a , 使得 $f(x)$ 在 $x = 0$ 处取得极小值.

师: 生2得出了与生1截然相反的结论. 根据极小值的定义, 生1的解法显然欠妥, 结论是不正确的. 那么生2的解法正确吗? 有没有什么值得推敲的地方? 请同学们再思考思考, 不妨相互讨论一下.

生3: 生2的解法也是错误的. 函数 $f(x)$ 在 $x = 0$ 处取得极小值, 除了必须具备 $f'(0) = 0$ 的条件外, 不一定还要使得 $x < 0$ 时 $f'(x) < 0$, 并且 $x > 0$ 时 $f'(x) > 0$. 根据极小值的定义, 函数 $f(x)$ 在 $x = 0$ 处取得极小值, 应该具备的条件是: $f'(0) = 0$, 并且在 $x = 0$ 的左右两侧的区间内, 左侧的导数 $f'(x) < 0$, 右侧的导数 $f'(x) > 0$, 即在 $x = 0$ 的左侧小区间内是减函数, 右侧小区间内是增函数.

师: 很好! 生3对函数极值概念的理解就到位了. 在解决已知函数的极值, 求参数的值或取值范围的一类问题时, 容易出现的就是生1和生2两位同学那样的解法, 大家必须引起高度的关注. 哪一位同学上黑板来完善一下这道题的解法?

生4: 同上, 得 $f'(x) = x[(x-a+2)e^x - 2]$. 假设存在实数 a , 使得 $f(x)$ 在 $x = 0$ 处取得极小值, 则必有 $f'(0) = 0$, 并且在 $x = 0$ 的左侧附近 $f'(x) < 0$, 在 $x = 0$ 的右侧附近 $f'(x) > 0$. 显然 $f'(0) = 0$ 恒成立, 令 $g(x) = (x-a+2)e^x - 2$, 则必须且只需 $g(x)$ 在 $x = 0$ 的左右两侧的附近, 均有 $g(x) > 0$. 由 $g'(x) = e^x + (x-a+2)e^x = 0$ 得 $x = a-3$. 而 $x \neq 0$, 所以 $a \neq 3$. 易得: 当 $x < a-3$ 时, $g'(x) < 0$, 当 $x > a-3$ 时, $g'(x) > 0$, 即 $g(x)$ 在 $(-\infty, a-3)$ 上是减函数, 在 $(a-3, +\infty)$ 上是增函数. 从而 $g(x)$ 在 $x = a-3$ 处取得极小值, 并且 $g(a-3) = -e^{a-3} - 2 < 0$. 为使 $g(x)$ 在 $x = 0$ 的左右两侧的附近均有 $g(x) > 0$, 必须且只须 $g(0) > 0$, 即 $-a > 0$, 亦即 $a < 0$. 故存在实数 a , 使得 $f(x)$ 在 $x = 0$ 处取得极小值, a 的取值范围是 $(-\infty, 0)$.

师: 非常好! 请同学们对这个问题的探究过程作一个反思, 看看有哪些收获!

在解决有关函数极值的问题时, 学生常常会出

现这样那样的错误. 怎样有的放矢地帮助学生纠正错误、深化理解, 这是我们必须下功夫去解决的问题. 本案例中, 教师没有滔滔不绝地讲授, 将解决问题的正确方法灌输给学生, 而是留给学生充足的时间和空间, 组织学生进行探索, 灵活地采取多种方法, 有意识地点拨、诱导和启发, 让学生思考, 让学生交流, 让学生板书, 在这个过程中将学生的思维活动过程完全地暴露了出来. 然后循着学生的思维轨迹, 针对学生解题中的思维缺陷, 组织学生进行对话、合作和交流, 及时捕捉学生思维的困惑点和障碍点, 引领学生多方面、多角度、多层次地开展探索活动, 帮助学生寻找错因, 纠正错误, 形成对问题的正确认识, 使思路越探越清, 问题越探越明, 知识越探越透, 在潜移默化中优化了学生的思维品质, 发展了学生的思维能力, 培养了学生的数学素养, 使课堂真正地成为激情荡漾场所和智慧飞扬的天地.

4 结语

数学教学教给学生的不应只是冰冷的数学知识, 更重要是要使学生学会用数学的眼光看待问题、用数学的思维去思考问题, 获得超越书本知识的数学学科核心素养. 数学是思维的体操, 教会学生用数学的方式去思维, 远远比数学知识本身的教学更有意义. 实施新课程教学, 要求学生从“学会”到“会学”, 即掌握知识, 发展思维, 形成能力, 提升素养. 要使学生“会学”最根本的一条就是要在传授数学知识的同时, 突出数学思维活动的过程, 使数学教学真正成为数学思维活动的教学, 在数学概念的建构、数学定理(公式和法则)的发现、解题思路探索活动中, 引领学生掌握数学思维的方法, 学会理性思考, 优化数学思维的品质, 形成分析问题和解决问题的数学技能, 使教材中的知识、思想和方法, 通过教师精心设计, 转化为学生的智慧, 使“培养学生的数学学科核心素养”的目标在课堂上落地生根.

参考文献

- [1] 中华人民共和国教育部. 普通高中数学课程标准(2017年版)[M]. 北京: 人民教育出版社, 2017: 5.
- [2] 张昆, 张乃达. 暴露数学思维过程的课堂教学研究——透过培养学生数学核心素养的视点[J]. 中学数学, 2018(4): 61-64.
- [3] 赵绪昌. 数学思维过程展示的教学策略[J]. 中国数学教育(高中版), 2014(1-2): 37-40.
- [4] 毛锡荣. 凸显数学的思维过程 促进学生的长效发展[J]. 数学通报, 2018(3): 18-22.