



单元起始课应紧扣“知识从何而来”

——以“随机变量及其概率分布”为例

南京市第 27 高级中学 210001 孙秉正

【摘要】 问题情境是否合适的关键在于其设置是否有利于学生的学,以及如何让学生会学,它既要能引领整个单元的学习,还要让学生知道新知识的必要性,发生、发展的方向,探究方法等,教师在设置问题情境时,应关注其能否在大单元教学中起到一以贯之的引领作用,能否揭示数学概念的本质,特别是概念的内在逻辑结构,并关注在探究的过程中提升学生的数学能力,发展学生的学科素养。

【关键词】 单元起始课;新知识;来龙去脉

单元教学对发展学生核心素养有着重要的积极作用,我们在关注如何全局把握、整体规划单元教学时,更应该关注如何上好单元起始课,关注单元起始课应紧扣“知识从何而来”这一中心问题。《普通高中数学课程标准(2017 版 2020 年修订)》^[1]指出:在教学实践中,要不断探索和创新教学方式,不仅要重视如何教,更要重视如何学,引导学生会学数学,养成良好的学习习惯。因此从落实如何学和如何会学这一目标的角度,教师在教学实践中更应强调学习的必要性和紧要性,让学生充分了解知识的发生、发展过程,厘清数学概念的逻辑结构,从而激发学生学习的动力,并促进学生有条理的自主学习与探究。

那么,如何紧扣“知识从何而来”这一中心问题呢?知识当然是从问题情境中来,更是从一个“合适”的问题情境中来。《课标》^[1]明确指出:基于学科素养的教学活动应该把握数学的本质,创设合适的教学情境,提出合适的数学问题,引发学生的思考与交流,形成和发展数学学科素养。何谓“合适”?本文以“随机变量及其概率分布”(苏教版选修 2-3)的教学设计和实录为例谈谈自己的认识。

1 教材分析与学情分析

1.1 单元教学目标

在必修课程已经学习概率的基础上,本单元将学习某些离散型随机变量的分布列及其均值、方差等内容,使学生初步学会利用离散型随机变量思想描述和分析某些随机现象的方法,并能用所学知识解决一些简单的实际问题,进一步体会概率模型的作用及运用概率思考问题的特点,使学生初步形成用随机观念观察、分析问题的意识。

1.2 目标分析解读

通过本单元的学习,让学生学会从定量的角度
万方数据

来刻画离散型随机变量,这是随机观念从定性到定量的一次提升,有助于学生思维的发展。在教学实践中,通过对具体问题的分析,理解离散型随机变量及其概率分布的概念,认识分布列对于刻画随机现象的重要性,通过实例理解超几何分布及其推导过程,了解条件概率和两个事件相互独立的概念,理解 n 次独立重复试验的模型及二项分布,理解取有限值的离散型随机变量的均值、方差的概念等。

1.3 单元设计意图

本单元以学生熟悉的实例为背景,按照“问题情境—数学活动—意义建构—数学理论—数学应用—回顾反思”的顺序结构来展开。通过对实际问题的分析、归纳,激发学生开展活动,促使学生对现实世界中蕴涵的数学模型进行思考,进而作出理性判断,使学生能够更注重应用数学的观念、方法和语言去提炼、分析和解决问题,从而达到培养学生的创新意识和理性思维的目的,同时拉近新知识与学生的距离,提高学生的兴趣,降低学生的难度。

1.4 学情分析

学生已经掌握了古典概型的相关知识,会求简单的概率问题,在上一单元里又系统学习了排列、组合、二项式定理的相关知识,从知识层面,如何将两者融合对学生来说是陌生的;给出较为复杂的概率问题,学生受限于阅读能力和分析问题能力,很难构建新的数学模型解决问题;将问题数学化,并用数学观点进行抽象,特别是上升到变量描述问题,更是学生欠缺的能力。从能力层面,学生需要经历一个从抽象概括到数学建模以及数学应用的过程。

2 教学设计与实录

2.1 教学目标^[2]

1) 在对具体问题的分析中,了解随机变量、离



散型随机变量的意义;

2) 理解取有限值的离散型随机变量及其概率分布的概念与性质;

3) 理解取离散型随机变量服从两点分布的概念;

4) 认识概率分布对于刻画随机现象的重要性.

2.2 教学重难点

1) 理解离散型随机变量的意义;

2) 理解离散型随机变量及其概率分布的概念与性质.

2.3 教学过程

1) 问题情境

问题 1: 在现实生活中, 我们会遇到许多较为复杂的概率问题.

(1) 某工厂生产的一批产品共 N 件, 其中有 M 件不合格产品, 在随机取出的 n 件产品中, 尝试研究“取到不合格品数”的概率问题.

(2) 语文老师要从 10 篇古文中随机抽 3 篇不同的古文让学生背诵, 规定至少背出其中两篇才能过关, 某位同学只能背诵出其中的 6 篇, 他能过关的概率是多少? 某同学想知道要会背诵几篇“性价比”最高?

我们可以用怎样的数学模型来刻画这些复杂的概率问题? 如何运用这些数学模型解决问题?

设计意图 提出较为复杂的概率问题, 让学生观察、分析, 在尝试解决问题的过程中感到困难和知识的匮乏, 激发新的求知欲望, 提高学习动力. 问题设置具有单元引领作用, 又有一定的梯度, 让学生在探究中获得新知识, 并有目的、有方向地进行.

2) 学生活动

师: 情境 2 虽然发生在我们身边, 但面对我们陌生的问题, 很多同学甚至无法理解题意, 情境 1 却让我们感到熟悉, 因为在组合的学习中, 我们见过类似的例子, 但是为什么大家还倍感困难呢?

生 1: 因为 N, M, n 这些字母的值不能确定, 甚至不合格品 M 与抽取产品件数 n 之间的大小关系也不知道, 要分类讨论吧? 我没有想清楚.

生 2: 可以特殊化, 先解决简单的问题, 如 $N = 100, M = 3, n = 10$, 即:

某工厂生产的一批产品共 100 件, 其中有 3 件不合格产品, 在随机取出的 10 件产品中, 尝试研究“取到不合格品数”的概率问题.

设计意图 特殊化思想是高中数学学习中的一种重要的基本思想和方法, 对于分析问题、解决问

题等都有着很重要的作用. 从一般到特殊, 降低思维要求, 寻求规律方法, 再从特殊到一般, 将所寻规律方法升华.

师: 你认为解决这个问题最应该关注什么? 怎么处理?

生 3: 取到不合格品数会有变化, 可能是 0 个、1 个、2 个、3 个, 所以要分四种情况分别计算.

记

“抽取产品, 取到 0 个不合格品”的事件为 A ;

“抽取产品, 取到 1 个不合格品”的事件为 B ;

“抽取产品, 取到 2 个不合格品”的事件为 C ;

“抽取产品, 取到 3 个不合格品”的事件为 D , 再分别计算概率.

师: 很好, 计算我们暂时放后处理, 先来反思以上的处理过程, 通过特殊化, 令 $N = 100, M = 3, n = 10$, 当然它还可以取其它值, 如 $M = 15$ 怎么办?

生 4: 需要记 16 个事件, 记到字母 P 后再计算概率.

师: 有危机感吧? 26 个字母用完了怎么办?

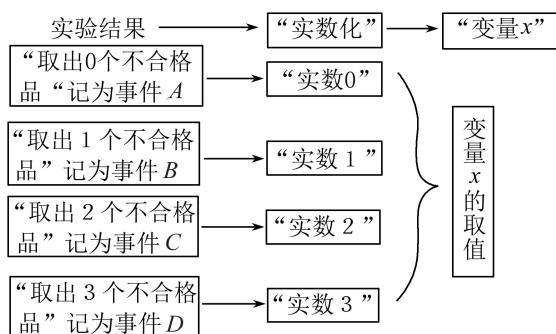
生 5: 可以接着用希腊字母. (学生们在开心的大笑后陷入思考)

生 6: 我发现, 列出的事件只有不合格品数在改变, 可以用数字 0、1、2、3 来表示事件. 这样即使事件再多也够用了. (学生们表示赞许, 有了成功的喜悦)

师: 将随机事件的结果与实数一一对应的做法非常有效的简化了事件的记法, 同学们能否再进一步, 又可以用什么刻画数的变化呢?

经过一段思考后, 多位学生说出字母, 变量, 其他人表示认同.

教学过程如下图所示.



设计意图 学生利用已有知识解决较为复杂的问题, 会遇到无法克服的障碍, 教师作为教学的引导者通过问题的设疑, 激发学生的求知欲, 让学生经历两个重要的抽象过程, 一是从具体的问题情境抽象出数字, 将事件结果与实数一一对应, 二是将实数抽象为字母, 进行变量化, 从而构建随机变量模型.



3) 建构模型
定义:一般地,如果随机试验的结果可以用一个变量来表示,那么这样的变量叫做随机变量.随机变量通常用大写拉丁字母 X, Y, Z 表示.也通常用小写拉丁字母 ξ, η, ζ 表示.

师:你能再举出一些这样的例子吗?
生 7:掷骰子,出现的结果可以与数字 1,2,3,4,5,6 一一对应,也可以用随机变量 X 表示,变量 X 可能取值是 1,2,3,4,5,6.

生 8:打靶,出现的结果可以与数字 0,1,2,3,4,5,6, ..., 10 一一对应,也可以用随机变量 Y 表示,变量 Y 可能取值是 0,1,2, ..., 10.

问题 2:(1) 随机抽查新生婴儿的性别,抽查的结果可能是男,也可能是女,出现的结果能否用随机变量表示?若用随机变量 Z 表示,则变量 Z 可能取值是什么?

(2) 随机抽一副扑克牌中的一张,抽的结果可能是红桃,也可能是黑桃、方片、梅花,出现的结果若用随机变量 ξ 表示,则变量 ξ 可能取值是什么?

设计意图 虽然建构了随机变量的模型,但学生的理解是狭隘的,认为只有结果是数字才可以用随机变量刻画,教师及时利用两个问题拓宽学生对概念的认识,即使结果没有数字,也可以将样本点实数化,进而用随机变量刻画.

教学过程如图所示.
2. 随机抽一副扑克牌中的一张,抽的结果可能是红桃,也可能是黑桃、方片、梅花,出现的结果若用随机变量 ξ 表示,则变量 ξ 可能取值是什么?

结果(样本点)	随机变量取值	事件表示	事件概率
红桃	1	$\{\xi = 1\}$	$P(\{\xi = 1\})$
黑桃	2	$\{\xi = 2\}$	$P(\{\xi = 2\})$
方片	3	$\{\xi = 3\}$	$P(\{\xi = 3\})$
梅花	4	$\{\xi = 4\}$	$P(\{\xi = 4\})$

说明: $P(\{\xi = 1\})$ 可以简记为: $P(\xi = 1)$

4) 模型应用
问题 3:利用所学知识研究下列概率问题.
(1) 抛掷一枚质地均匀的硬币一次;
(2) 同时抛掷两枚质地均匀的硬币一次.
生 9:设“抛掷硬币一次出现正面向上”为事件 1,“抛掷硬币一次出现反面向上”为事件 2,则随机变量 X 可能取值是 1,2. $P(X = 1) = \frac{1}{2}, P(X = 2) = \frac{1}{2}$.

师:好的,在这个随机试验中,随机变量 X 是否有实际意义?能否赋予随机变量 X 确定的实际意义?

生 10:用随机变量 X 表示“抛掷硬币一次,出现正面向上的次数”,则随机变量 X 可能取值是 1,2.
 $P(X = 1) = \frac{1}{2}, P(X = 2) = \frac{1}{2}$.

第(2)问教学过程略.
设计意图 建构了随机变量的模型后,学生的理解依然还是狭隘的,会刻意将实验结果实数化,再刻意引入变量表示.实际上,随机变量有着重要的实际意义,而不是简单地用字母表示数,理解随机变量的实际意义有助于后续用数学工具研究概率问题的学习.

5) 形成概念
给出概率分布的概念和性质,并给出两点分布或 0-1 分布的概念.

概率分布的定义:
一般地,假定随机变量 X 有 n 个不同的取值,它们分别是 $x_1, x_2, \dots, x_n$ 且 $P(X = x_i) = p_i, (i = 1, 2, \dots, n)$ 则称之为随机变量 X 的分布列,简称为 X 的分布列,也可以用表格表示,

X	x_1	x_2	$\dots$	x_n
P	p_1	p_2	$\dots$	p_n

此表叫概率分布表,它和分布列都叫做随机变量 X 的概率分布.

性质:(1) $p_i \geq 0 (i = 1, 2, \dots, n)$;
(2) $p_1 + p_2 + \dots + p_n = 1$.

问题 4:下列变量中,哪些是随机变量,哪些不是随机变量?并说明理由.

- (1) 2021 年 4 月 6 日南京禄口机场候机室中的旅客数量;
- (2) 2021 年 4 月 6 日北京至南京的航班数(正常情况下);
- (3) 某乘客在机场游戏厅练习投篮,投中即停止,则他停止时已投篮的次数;
- (4) 2021 年 4 月 6 日北京至南京 CA1817 次航班到达时间.

设计意图 随机变量可分为离散型随机变量和连续型随机变量,而离散型随机变量又可以分为取有限值的和取无限值的两种情况,此处安排目的是让学生作出正确的辨析.

6) 课堂小结
(1) 本节课你学习了哪些知识?学会了什么?有哪些新的认识?谈谈你学习过程中的重要心得体会.
(2) 你认为后续还会学习哪些知识?你认为会怎样开展研究?



问题情境是否合适的关键在于其设置是否有利于学生的学,以及如何让学生会学,它既要能引领整个单元的学习,还要让学生知道新知识的必要性,发生、发展的方向,如何延伸、如何探究?教师在设置时,不能仅从难度、梯度上考虑,更为重要的是设置的问题情境能否揭示数学概念的本质,特别是概念的内在逻辑结构,要关注在探究的过程中怎样提升

[1] 中华人民共和国教育部.普通高中数学课程标准(2017年版2020年修订)[M].北京:人民教育出版社,2020:80-81.

[2] 石志群.高中数学教学参考书(选修2-3)配苏教版普通高中数学课程标准实验教科书[M].南京:江苏凤凰教育出版社,2012:53.

作者简介 孙秉正(1973—),男,安徽淮北人,中学高级教师,教育硕士.2005年荣获秦淮区数学学科带头人,2008年荣获南京市优秀青年教师,主要从事数学教育和教学研究,发表论文10余篇.

【摘 要】在当前课改背景下,单元整体教学的重要性日益凸显,而基于 PBL 大单元教学设计的方法、方式能引导我们以核心素养为纲,通过构建单元知识的问题链条与教学结构体系,找到与其适应的评价标准与方法,能有效发展素养并落实育人目标.

在当今教学技术的不断变革中,我们更应回归到数学的思维本质.不仅应该关注知识与技能的掌握,更应该关注思维方法的传授,而思维的起点就是教师的有效提问.教学中的问题设计需要我们放慢脚步,精心建构,而核心素养下,教师如何基于提升学生数学素养的角度针对性地进行设问、提问,变成亟需解决的问题.西方发达国家主流的教学模式之一——PBL,便值得我们思考和借鉴.

在大项目(大单元或跨学科)的问题情境下,直面挑战并解决问题,教师则充当顾问,并全程进行评估。PBL以问题为起点,以学生自主学习和合作讨论为前提,为学生提供自由表达、质疑、探究讨论问题的机会;让学生在同伴、教师、集体的知识交互中,将所学知识应用于问题解决的具体情境;营造师生积极参与、交往互动、共同发展的课堂教学氛围。

单元教学的优点在于“学习内容的广度与系统性”。基于 PBL 的数学大单元教学,抓住“问题驱动”这一核心,以 PBL 为先导,大单元教学为方式,对教学内容进行“结构化”重组,加进对于核心素养、模块与主题之间的联系,以问题为基础,以学生为主体,以教师为导向。从学生学习的基础与可达到的高度以及发展思维能力的角度出发,预先估计学习结果,整合单元,提炼大概念、核心问题,帮助教师更好地关注问题并设计教学,使教师知道如何促进学生对课程标准所规定的重要观点的理解,以促进学生

万方数据