



导数及其应用、三角函数、平面向量、数列、不等式、空间向量与立体几何、圆锥曲线、统计和概率、随机变量及其分布列等. 复习时所有基本知识都要尽量有所涉及, 尤其重视平时比较少考核的复数、直线与圆、特殊的条件概率或排列组合等知识. 第二要提高数学思想方法的培养. 多选题是多角度的考查学生研究数学问题的意识和方法, 考查通性通法, 考查函数与方程、数形结合、划归转化、分类讨论等数学思想方法. 这些十分利于多选题中创新题的考核. 对于最后一题多选题, 题目往往比较难, 需要学生透过表面现象, 从本质上去认识问题、分析问题、解决问题. 这实际上是对思维穿透力及深刻性的考查, 这些需

要在备考复习中有意识去培养和训练学生, 提高学生的反思和迁移能力.

参考文献

[1] 任子朝, 陈昂, 黄熙彤, 赵轩. 新高考多选题考查功能研究[J]. 中国数学教育, 2019:3-19.  
 [2] 王文雅, 李玉长. 高考数学中“多选题”的类型分析[J]. 新课程学习(下), 2015(5):97-98.

作者简介 叶巧卡(1971—), 女, 广东广州人, 高中数学高级教师, 主要研究教法和学法, 参加过“国培计划(2015)”一线优秀教师培训技能提升研修项目(高中数学), 2018 年被评为南粤优秀教师, 多次获得广州市高考突出贡献奖称号.

# 基于核心素养的高考试题评析与备考建议

——以 2021 年 6 套全国卷三角函数试题为例

广东省高州市高州中学 525200 陈应全

**【摘要】** 基于核心素养的高考试题评析, 对研究高考动向与提升备考效益均具有重要意义. 文章以 2021 年 6 套全国卷三角函数试题为例, 从三角函数自身的三种特殊属性分为三种考向并深入评析, 最后给出四个高考备考建议.

**【关键词】** 核心素养; 备考建议; 考向分析; 三角函数

中国高考评价体系是深化新时代高考内容改革的基础工程, 创造性地提出了高考评价理念从传统的“知识立意”“能力立意”向“价值引领、素养导向、能力为重、知识为基”转变的综合评价理念<sup>[1]</sup>. 2021 年作为新高考第一年, 今年教育部命制的 6 套高考试卷包括新高考 I 卷、新高考 II 卷、全国甲卷(理)、全国甲卷(文)、全国乙卷(理)与全国乙卷(文), 这 6 套试题的题型、试卷结构和难度总体与 2020 年基本保持一致, 可谓平稳过渡. 这 6 套试卷也合力交代新高考评价体系落地. 因此, 基于核心素养的高考试题评析与备考建议对于把握高考脉搏、提升备考效率具有非凡意义. 三角函数是高中数学的核心内容之一, 也是历年高考考查的热点和重点内容. 下面笔者以 2021 年教育部命制的 6 套试卷中的三角函数试题为例进行评析, 便于广大师生进一步了解新高考命题规律, 为高三复习提供方向指引和备考建议.

## 1 2021 年 6 套全国卷三角函数试题考点与分析

### 1.1 考向分析

在高中数学课程中, 三角函数、解三角形与三角恒等变换是相互独立的三部分, 从三角函数研究角度而言, 三角首先是几何的, 其次是函数和运算的. 因此笔者对考查方向也从这三个角度分类, 为了更清晰地分析 2021 年全国卷三角函数

国卷 6 套试卷对三角函数的这一重要而必考知识模块的命题规律, 笔者整理得到了以下表格:

试卷	题号	分值	考查问题
全国甲卷	文 8, 11, 15	15	几何中的三角问题、三角中的运算问题、三角中的函数问题
	理 8, 9, 16	15	几何中的三角问题、三角中的运算问题、三角中的函数问题
全国乙卷	文 4, 6, 15	15	三角中的函数问题、三角中的运算问题、几何中的三角问题
	理 7, 9, 15	15	三角中的函数问题、几何中的三角问题
新高考 I 卷	4, 6, 10, 19	27	三角中的函数问题、三角中的运算问题、几何中的三角问题
新高考 II 卷	18	12	几何中的三角问题

### 1.2 题型与分值

从上表可看出, 2021 年 6 套全国卷大多都是以小题为主, 只有新高考 I 卷与 II 卷出现解答题, 在小题中主要考



查三角中的函数问题(函数图象与性质)、几何中的三角问题(解三角形)与三角中的运算问题(三角恒等变换),难度属于中、低档,试题分值在12~27分,其中全国甲乙卷的文理科均考查了三个小题,新高考II卷只考了一个解答题,值得注意的是新高考I卷考查了三个小题和一个解答题分值为27分,而该解答题位于第19题,这与往年全国卷的三角解答题的位置大多前两道题有所不同,也造成三角试题难度突增,这也体现新高考在试题顺序上存在不确定因素.

### 1.3 命题特点

2021年6套全国卷对“三角函数”内容考查比较全面,题型多样,结构灵活,难度适中.这些试题都是以三角函数的图象与性质,三角恒等变换,解三角形等基础知识为载体,通过设置适当的试题情景,立足通性通法,淡化特殊技巧,考查了必备知识、关键能力、数学思想方法以及数学核心素养.

在客观题方面,除了新高考II卷之外其他5套试题都出现了,而且都分别从几何中的三角问题、三角中的运算问题、三角中的函数问题进行考查,其中在考查几何中的三角问题时注重对真实的问题情景的设置,考查学生的应用三角知识解决实际问题的能力,这与高考评价体系中的“四层”考查内容和“四翼”考查要求让学生在情景下发挥核心价值的引领作用,运用必备知识和关键能力去解决实际问题,全面综合展现学科核心素养水平相吻合<sup>[1]</sup>,如全国甲卷(理)第8题、全国乙卷(理)第9题;在考查三角中的运算问题时,这类题考查方式灵活,解题思路多样,有助于激发学生的创新能力,旨在考查学生化归与方程等数学思想以及数学运算等核心素养,如全国乙卷(文)第6题、新高考I卷第6题、新高考I卷第10题;在考查三角中的函数问题时注重由图象求解析式、图象变换以及函数单调性等,如全国乙卷(理)第7题、全国甲卷文第15题等.这类问题大多以图象为载体,考查学生读图、用图能力和直观想象素养,渗透数形结合思想.

在主观题方面只考查了几何中的三角问题,其中新高考II卷第18题难度较低,主要考查了正余弦定理的应用和三角形面积的计算,属常规题,但是新高考I卷第19题则令考生有点措手不及,该题首先是针对学生的痛点——符号化运算进行命题,使不少学生觉得不适应;其次以正余弦定理为载体,着重考查运算求解能力等关键能力和直观想象、数学运算素养,渗透了方程、分类讨论以及数形结合等数学思想,因此本题考查要求较高,预示着未来高考对三角函数的考查方式会更加多样化,这与中国考试评价体系中指出新高考防止学生“机械刷题,题海战术”相呼应.

## 2 高考命题动向透析

研究新高考第一年的全国卷高考真题,可有助于领悟高考命题专家对中国考试评价体系的理 解以及高考命题思路,力求以真题引领教学方向,通过对这6套真题的“三角函数”命题规律分析,三角函数高考试题主要考查

以下三种动向的问题.

### 2.1 几何中的三角问题

几何中的三角问题是三角函数中的核心考点,2021年全国卷的6套试卷都作了考查,成为了考查的热点和重点,这个动向主要考查正余弦定理以及三角形面积的计算,往往还综合三角恒等变换以及平面几何等知识一起考查,渗透化归与转化思想、方程思想,考查直观想象、逻辑推理与数学运算等数学核心素养.

例1 (2021年全国甲卷理8)2020年12月8日,中国和尼泊尔联合公布珠穆朗玛峰最新高程为8848.86(单位:m),三角高程测量法是珠峰高程测量方法之一.如图1是三角高程测量法的一个示意图,现有A,B,C三点,且A,B,C在同一水平面上的投影A',B',C'满足 $\angle A'C'B' = 45^\circ$ , $\angle A'B'C' = 60^\circ$ .由C点测得B点的仰角为 $15^\circ$ , $BB'$ 与 $CC'$ 的差为100;由B点测得A点的仰角为 $45^\circ$ ,则A,C两点到水平面A'B'C'的高度差 $AA' - CC'$ 约为 $(\sqrt{3} \approx 1.732)$ ( ).

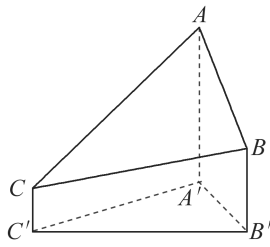


图1

- A.346      B.373      C.446      D.473

解析 本题以三角高程测量法测量珠峰高程为背景,考查正弦定理的应用.本题关键在于如何正确将 $AA'$ 与 $CC'$ 的差通过作辅助线的方式转化为 $A'B' + 100$ .这类问题关键是先将已知所求量转化到一个三角形中,借助解三角形知识求解.旨在考查学生转化与化归思想和运算求解能力,考查数学运算与直观想象等核心素养.

答案:B.

例2 (2021年新高考I卷19)记 $\triangle ABC$ 内角A,B,C的对边分别为a,b,c.已知 $b^2 = ac$ ,点D在边AC上, $BD \sin \angle ABC = a \sin C$ .

- (1) 证明: $BD = b$ ;
- (2) 若 $AD = 2DC$ ,求 $\cos \angle ABC$ .

解析 可以说本题是针对当前教学的痛点而命制的一道好题,特点是题中的边长和角度都不是具体的数值,都是符号运算并以正余弦定理为载体考查问题的一般化,需要考生具备寻找对应研究问题的基本方法的能力,同时也考查了转化与化归数学思想以及数学运算、逻辑推理等核心素养.求解此类问题的关键,一是画出图形正确分析已知条件中的边角关系,进而设计“边角互化”的合理运算路径,活用正余弦定理是关键,达到化简的“统一性”;二是求角的值时需注意三角形对其内角的自身限制,学生往往忽略这个隐含条件而导致出错;三是熟练掌握两角和、差的正余弦、正切公式以及诱导公式,这是脱掉条件“外衣”的有力工具.

答案:(1) 证明略;(2)  $\cos \angle ABC = \frac{7}{12}$ .

### 2.2 三角中的函数问题

三角函数本质仍然是函数,它有其他初等函数不一样的特征.三角中的函数问题主要考查三角函数,如求函数值、函数解析式和函数单调性等常见问题.此类问题以三角函数的图象与性质作为载体且秉承性质来源于图象的原则,两者往往结合考查,要求学生具备较高的直观想象和数学运算等核心素养.

**例3** (2021年全国甲卷文15) 已知函数  $f(x) = 2\cos(\omega x + \varphi)$  的部分图象如图2所示,则  $f\left(\frac{\pi}{2}\right) =$  \_\_\_\_\_.

**评析** 本题求解  $f\left(\frac{\pi}{2}\right)$  的值,关键是先确定函数的解析式.即由图象求得周期,进而求得  $\omega$ ,再从图象取特殊点求  $\varphi$ .根据图象确定函数解析式是三角函数的常考问题,着重考查学生读图、用图的能力,这类问题的解决关键在于特殊点的选取,如零点、极值点的利用.

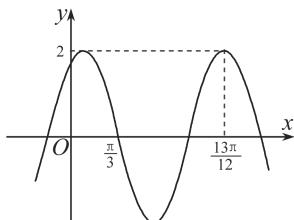


图2

答案:  $-\sqrt{3}$ .

**例4** (2021年新高考I卷4) 下列区间中,函数  $f(x) = 7\sin\left(x - \frac{\pi}{6}\right)$  单调递增的区间是( ).

- A.  $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$
- B.  $\left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$
- C.  $\left(\pi, \frac{3\pi}{2}\right)$
- D.  $\left(\frac{3\pi}{2}, 2\pi\right)$

**评析** 单调性是函数的核心问题之一,因此函数单调性问题也是三角中的函数问题的热点.对于求解三角函数的单调区间,首先化简成  $y = A\sin(\omega x + \varphi)$  形式,再把  $\omega x + \varphi$  看作一个整体代入  $y = \sin x$  的相应单调区间求得  $y = A\sin(\omega x + \varphi)$  的单调区间,此处要理解好复合函数“同增异减”的单调性规则.

答案:A.

### 2.3 三角中的运算问题

三角中的运算问题是历年高考的重点、热点.主要考查三角函数式的化简、求值与变形,设计合理的运算途径是难点,着重考查数学运算素养.从2021年全国卷6套试题来看,三角中的运算问题难度不大,熟练掌握一些恒等变换基本的变形技巧即可.这与高考评价体系指出“高考围绕学科主干内容,加强对基本概念、基本思想方法的考查,杜绝偏题怪题和繁难试题”是高度吻合的.

**例5** (2021年新高考I卷6) 若  $\tan\theta = -2$ , 则  $\frac{\sin\theta(1 + \sin 2\theta)}{\sin\theta + \cos\theta} =$  ( ).

- A.  $-\frac{6}{5}$
- B.  $-\frac{2}{5}$
- C.  $\frac{2}{5}$
- D.  $\frac{6}{5}$

**评析** 本题主要考查“1”的活用、二倍角公式以及同角三角函数基本关系,此类问题关键是掌握设计运算途径的原则——化简的统一性,即角度、三角函数名称与式子结构的统一.考查考生的运算求解能力与灵活应用所学知识分析问题、解决问题的能力以及数学运算核心素养.

答案:C.

**例6** (2021年新高考I卷10) 已知  $O$  为坐标原点,点  $P_1(\cos\alpha, \sin\alpha), P_2(\cos\beta, -\sin\beta), P_3(\cos(\alpha + \beta), \sin(\alpha + \beta)), A(1, 0)$ , 则( ).

- A.  $|\overrightarrow{OP_1}| = |\overrightarrow{OP_2}|$
- B.  $|\overrightarrow{AP_1}| = |\overrightarrow{AP_2}|$
- C.  $\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OP_3} = \overrightarrow{OP_1} \cdot \overrightarrow{OP_2}$
- D.  $\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OP_1} = \overrightarrow{OP_2} \cdot \overrightarrow{OP_3}$

**评析** 本题是三角函数与向量知识交汇的题目.作为一道多选题,从向量的模与数量积的计算两个角度设置选项,通过向量运算脱掉向量“外衣”,进而转化为三角中运算问题.主要考查平面向量的数量积、模、和差角的正余弦公式等知识以及数学运算核心素养.

答案:AC.

### 3 备考建议

#### 3.1 立足教材,夯实基础

中国高考评价体系指出:新高考的数学教学要重视教材,夯实学生学习基础,给学生提供深度学习和思考的空间<sup>[1]</sup>.从2021年全国卷6套试题来看,三角函数的部分试题大多都是源于教材但又高于教材.如新高考I卷第6题、新高考I卷第4题、全国甲卷(文)第15题等题目就是在教材习题上经过改头换面的常规三角函数题,这些试题设计平凡朴实,难度适中.因此,在高考复习备考中,教师不能一味跟着复习资料走而抛弃教材,相反要引导学生立足教材,注重把握核心概念,公式法则、例题练习等,切忌机械刷题,搞题海战术,以免形成定势思维.只有学生具备扎实的数学基础,才能更有效地促使他们核心素养的形成.

#### 3.2 明确方向,提升效率

从2021年开始,高考取消了考试大纲,考试的依据不是市面上的某本教辅资料,而是人教版教材、高中数学课程标准和中國高考评价体系.其中课程标准明确了教育目标与教育内容,中国高考评价体系里“一核”“四层”“四翼”分别明确了“为什么考”“考什么”“怎么考”.因此,我们在复习备考时候,要认真研读《普通高中课程标准(2017年版)》与中国高考评价体系等纲领性文件,以免复习方向有误.此外,我们还要及时纠正对于往年高考的冷点在新高考不作考查的错误观点,更不要迷信某些教育机构专家的预测,做到高考备考有据可依,明确方向,少走弯路,提升效率.

#### 3.3 强化意识,发展素养

《普通高中数学课程标准(2017年版)》提出全面落实立德树人要求,深入挖掘数学学科的育人价值,树立以发展



学生数学学科核心素养为导向的教学意识<sup>[2]</sup>.从 2021 年全国卷 6 套试题看到每一道三角函数题都以知识为载体,对学生的数学核心素养作了重要考查.因此,在日常教学中,教师作为教学的主导者,必须强化发展学生核心素养的意识,每一节课都应着重关注学生的思维能力是否得到了发展,学生的核心素养是否得到了提升,努力将发展核心素养贯穿教学活动的全过程并抛弃以往那种仅靠熟记解题模型、机械重复训练等低效手段提升应试成绩的落后观念.

### 3.4 联系实际,学以致用

新高考注重考查学生运用知识、能力和素养解决实际问题的能力,让学生充分感受到课堂所学内容中蕴含的应用价值<sup>[1]</sup>.因此,在日常教学中,教师要有意识地从大型联考试题中选取具有浓厚的时代气息和鲜明的中国特色的问题情境的题目,注重训练学生对所学知识的实际应用,全面综合展现学生核心素养水平.在三角函数中,教师可自行命制预测 2020 年东京奥运开幕式期间最大温差、测量广州“小蛮腰”高度等与实际生活相关的问题为情景的

题目作为训练素材,引导学生关注国家经济社会发展、科学技术进步、生产生活实际等紧密相关的内容,增强学生学以致用意识.这类题目在 2021 年全国甲卷(理)第 8 题以及 2021 年全国乙卷(理)第 9 题都出现了,因此值得我们重视.

### 参考文献

- [1] 中华人民共和国教育部考试中心.中国高考评价体系说明[M].北京:人民教育出版社,2019.8:1,16,34.
- [2] 中华人民共和国教育部.普通高中数学课程标准(2017 年版)[M].北京:人民教育出版社,2018:6.
- [3] 马云鹏.关于数学核心素养的几个问题[J].课程.教材.教法,2015(9):36-38.

**作者简介** 陈应全(1979—),男,广东高州人,高中数学高级教师,现任广东高州中学数学科组长;主要从事尖子生培养以及高考备考研究,在省级刊物发表教育教学论文多篇,现正主持广东省教育科学基金项目课题.

# 2021 年全国乙卷理数解析几何大题的深度探究

安徽省合肥市肥东城关中学 231600 王东海

**【摘要】** 笔者从不同角度,开拓思路,分析解答 2021 年全国乙卷理科数学 21 题,这道解析几何大题,充分挖掘高考题的教学指导功能,再现命题的能力立意,并给出推广及几点启示,以期提高教学实效性.

**【关键词】** 全国乙卷;解析几何;推广;启示

## 1 引言

2021 年全国乙卷理科数学第 21 题题干简洁,是一道圆锥曲线最值问题,和以往的解析几何大题比较,学生易想到使用设而不求的解题思路,因为它相对容易入题.但此题融入了众多数学思想与方法的考查,且计算量较大,体现了对学生数学核心素养应用水平的较高要求,因而完成正确的求解并非易事.也正因如此,本题的得分率较低.但就笔者所进行的调查结果而言,本题的区分度好,不失为一道比较成功的解析几何大题.以下谈谈对这道题目的解法赏析与拓展推广,力求呈现出问题的本质,希望对大家的备考有所启发.

## 2 试题呈现

(2021 年全国乙卷理科数学 21 题) 已知抛物线  $C: x^2 = 2py (p > 0)$  的焦点为  $F$ , 且  $F$  与圆  $M: x^2 + (y + 4)^2 = 1$  上点的距离的最小值为 4.

(1) 求  $p$ ;

(2) 若点  $P$  在  $M$  上,  $PA, PB$  是  $C$  的两条切线,  $A, B$  是切点, 求  $\triangle PAB$  面积的最大值.

## 3 解法赏析

**思路 1** 易知  $p = 2$ , 从而  $C$  的方程为  $x^2 = 4y$ ; (2) 题可通过设而不求求出  $\triangle PAB$  面积的函数表达式, 再求此函数的最值, 运算量比较大(如图 1).

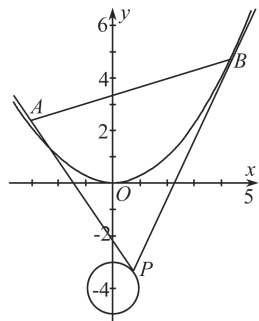


图 1

**解析 1** 因为  $y = \frac{1}{4}x^2$ .

设  $A(x_1, y_1), B(x_2, y_2), P(x_0, y_0)$ , 则由导数法得  $k_{PA} = \frac{x_1}{2}, k_{PB} = \frac{x_2}{2}, l_{PA}: y = \frac{1}{2}x_1(x - x_1) + y_1 = \frac{1}{2}x_1x - \frac{1}{4}x_1^2 = \frac{1}{2}x_1x - y_1, l_{PB}: y = \frac{1}{2}x_2x - y_2$ , 且  $x_0^2 = -y_0^2 - 8y_0 - 15$ .