思想引领　感悟方法　学会思考

——以 2022 年新高考 I 卷第 18 题为例

张文海　（江苏省苏州实验中学　215151）

摘　要：解题是高中数学学习中不可或缺的一个重要环节，要想在限定的时间内快速寻找到解题路径，需要我们在平时的解题过程中注重以数学思想为指引，整体把握问题的结构，分析条件和结论之间的关联，充分发挥数学思想对发现解题路径的定向、联想和转化功能.

关键词：新高考 I 卷；数学思想；解题方法；数学素养

文章编号：1004-1176(2022)07-0010-04

2022 年全国高考的大幕已经落下，但它给我们留下了很多的思考，也给我们今后的教学指引了方向.从学生考后的反应来看，普遍觉得新高考数学 I 卷整体难度较大，主要体现在思维能力要求高、运算能力要求强.哪怕在一些常规知识版块，如第 18 题三角题，一些学生由于在平时复习中只是一味地刷题，而不注重从思想上感悟解题方法，导致在考场上无从下手，或者未能快速准确地解答，给学生的考试心理造成了很大的困扰，影响了整场考试水平的发挥.

能够在限定的时间内快速地找到解题突破口，需要我们在平时的复习中注意分析条件和结论之间的联系，在思想的引领下整体把握问题，理解问题的本质，在一般思维方法引导下寻找解题思路，才能提升自己分析问题、解决问题的能力，真正提高自己的数学素养.[1]

题目　(2022 年全国 I 卷 18 题)记$\triangle ABC$的内角 A，B，C 的对边分别是 a，b，c，已知$\dfrac{\cos A}{1+\sin A}=\dfrac{\sin 2B}{1+\cos 2B}$(＊).(1)若 $C=\dfrac{2\pi}{3}$，求 B；(2)求$\dfrac{a^2+b^2}{c^2}$的最小值.

分析　此题是解三角形的综合题，虽然条件简洁、问题明确，但涉及的知识点较多，有正弦定理、余弦定理、两角和差公式、倍角公式、基本不等式的应用等，主要考查学生对条件的分析转化能力、合理选用公式的能力、推理论证的能力.

1　方程思想

方程思想是指从分析问题的数量关系入手，将问题中的已知量和未知量之间的数量关系通过适当设元建立起方程(组)，然后通过解方程(组)使问题得到解决的思维方式.

本题题干部分给出了角 A 与 B 的关系式(＊)，第(1)题的条件又给出了 $C=\dfrac{2\pi}{3}$，这样出现三个未知数、两个方程.从方程思想的角度，需要再找到一个等式才可以求解，而三角形中隐含了关系式 $A+B+C=\pi$，这样在方程思想的指导下，通过消元法，可以求出角 B 的大小.

(1)方法1　因为$C=\dfrac{2\pi}{3}$且$A+B+C=\pi$，所以$A+B=\dfrac{\pi}{3}$.由条件(＊)得$\dfrac{\cos\left(\dfrac{\pi}{3}-B\right)}{1+\sin\left(\dfrac{\pi}{3}-B\right)}=\dfrac{\sin 2B}{1+\cos 2B}$，即$\dfrac{\dfrac{1}{2}\cos B+\dfrac{\sqrt{3}}{2}\sin B}{1+\dfrac{\sqrt{3}}{2}\cos B-\dfrac{1}{2}\sin B}=\dfrac{\sin B}{\cos B}$，化简得 $\sin B=\dfrac{1}{2}$.又 $0<B<\dfrac{\pi}{3}$，故 $B=\dfrac{\pi}{6}$.

2　转化化归思想

转化化归思想就是将数学命题由一种形式向另一种形式变换，把待解决的问题通过某种转化过程归结为一类已经解决或比较容易解决的问题.转化与化归的思想是中学数学最基本的思想方法，堪称数学思想的精髓所在，常包括抽象转化为具体、复杂转化为简单、未知转化为已知，通过变换迅速而合理地寻找和选择问题解决的途径和方法.

2.1　“角”间转化

本题题干条件(＊)中出现的是 $2B$，而第(1)题要求的是 B 的大小.从转化思想的角度，我们就应该想到利用二倍角公式将 $2B$ 转为 B，再根据

式子的结构逆用两角差的余弦公式进行化简即可.

(1)方法 2　由条件(*)得 $\frac{\cos A}{1+\sin A}=\frac{2\sin B\cos B}{1+(2\cos^2 B-1)}$,即 $\frac{\cos A}{1+\sin A}=\frac{\sin B}{\cos B}$,故 $\cos A\cos B=\sin B(1+\sin A)$,得 $\cos(A+B)=\sin B$.因为 $A+B=\pi-C$,所以 $-\cos C=\sin B$.因为 $C=\frac{2\pi}{3}$,所以 $\sin B=\frac{1}{2}$.又 $0<B<\frac{\pi}{3}$,故 $B=\frac{\pi}{6}$.

2.2 "名"间转化

在 $2B$ 转为 B 之后,得到 $\frac{\cos A}{1+\sin A}=\frac{\sin B}{\cos B}$,发现右边就是 $\tan B$,想到左边是否也可以化为正切?利用二倍角公式或者万能公式,可将"弦"化为"切",这样函数名就统一为正切,等式就转化为角正切之间的关系,再利用正切函数的单调性得到角之间的关系.

(1)方法 3　由上知 $\frac{\cos A}{1+\sin A}=\frac{\sin B}{\cos B}=\tan B$,即 $\tan B=\frac{\cos^2\frac{A}{2}-\sin^2\frac{A}{2}}{\left(\cos\frac{A}{2}+\sin\frac{A}{2}\right)^2}=\frac{\cos\frac{A}{2}-\sin\frac{A}{2}}{\cos\frac{A}{2}+\sin\frac{A}{2}}=\frac{1-\tan\frac{A}{2}}{1+\tan\frac{A}{2}}=\tan\left(\frac{\pi}{4}-\frac{A}{2}\right)$.因为 $\frac{\pi}{12}<\frac{\pi}{4}-\frac{A}{2}<\frac{\pi}{4}$,$0<B<\frac{\pi}{3}$,$y=\tan x$ 在 $\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$ 上单调递增,所以 $\frac{\pi}{4}-\frac{A}{2}=B$.因为 $C=\frac{2\pi}{3}$,所以 $A+B=\frac{\pi}{3}$,解得 $B=\frac{\pi}{6}$.

2.3 "边角"间转化

第(2)题研究的是"边"比值的最值问题,而题目所给的是"角"之间的关系式,从而联想到正弦定理将"边"化为"角",得到 $\frac{a^2+b^2}{c^2}=\frac{\sin^2 A+\sin^2 B}{\sin^2 C}$,将问题转为以角为变量的函数来研究.

(2)方法 1　由第(1)题的方法 2 可知,$-\cos C=\sin B$.因为 $0<B<\pi$,所以 $\sin B>0$,$\cos C<0$,故 $\frac{\pi}{2}<C<\pi$,$0<B<\frac{\pi}{2}$.因为 $-\cos C=\sin B$,所以 $\sin\left(C-\frac{\pi}{2}\right)=\sin B$.因为 $0<C-\frac{\pi}{2}$,$B<\frac{\pi}{2}$,$y=\sin x$ 在 $\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$ 上单调递增,所以 $C-\frac{\pi}{2}=B$.因为 $\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}$,故 $\frac{a^2+b^2}{c^2}=\frac{\sin^2 A+\sin^2 B}{\sin^2 C}$(之后的解题过程见下).

3　减元思想

减元思想是指减少问题中变量的个数,将多元变量问题转化为一元变量问题,其实质是转化与化归思想.最值问题常见的处理方法有几何法和代数法,解答题常用代数法,包括函数法和不等式法.第(2)题通过边角转化后,化为关于角的函数最值问题,目标函数包含三个变量 A,B,C,变量个数偏多,从减元思想的角度出发,只要找到几个变量间的关系,将三元函数减为一元函数,就可以解决问题.

3.1 根据"角"之间的关系减元

关系式 $-\cos C=\sin B$ 可以转化为 $\sin\left(C-\frac{\pi}{2}\right)=\sin B$.因为 $0<C-\frac{\pi}{2}$,$B<\frac{\pi}{2}$,结合正弦函数在 $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ 上单调递增的性质,所以 $C-\frac{\pi}{2}=B$,又 $A+B+C=\pi$,这样可以将三个变量减为一个变量.

$$\frac{a^2+b^2}{c^2}=\frac{\sin^2 A+\sin^2 B}{\sin^2 C}=\frac{\sin^2(B+C)+\sin^2 B}{\sin^2 C}=\frac{\sin^2\left(2C-\frac{\pi}{2}\right)+\sin^2\left(C-\frac{\pi}{2}\right)}{\sin^2 C}=\frac{\cos^2 2C+\cos^2 C}{\sin^2 C}=\frac{(1-2\sin^2 C)^2+(1-\sin^2 C)}{\sin^2 C}=\frac{4\sin^4 C-5\sin^2 C+2}{\sin^2 C}=4\sin^2 C+\frac{2}{\sin^2 C}-5\geqslant 2\sqrt{4\sin^2 C\cdot\frac{2}{\sin^2 C}}-5=4\sqrt{2}-5$$

(当且仅当 $4\sin^2 C=\frac{2}{\sin^2 C}$,即 $\sin C=\frac{1}{\sqrt[4]{2}}$ 时取等号),故 $\frac{a^2+b^2}{c^2}$ 的最小值为 $4\sqrt{2}-5$.本小问也可以根据第(1)题方法 3 得到的"角"之间的关系进行减元处理.

3.2 根据“函数值”之间的关系减元

目标式中涉及三个变量 $\sin A$，$\sin B$，$\sin C$，要想将它们减元到一个变量，除了寻找三个角 A，B，C 之间的关系外，也可以直接寻找 $\sin A$，$\sin B$，$\sin C$ 之间的关系式，然后进行减元处理．

（2）*方法 2* 由第（1）题的方法 2 可知 $-\cos C=\sin B$，结合 $0<B,C<\pi$ 得 $\sin C=\cos B$，所以 $\sin A=\sin(B+C)=\sin B\cos C+\cos B\sin C=-\sin^2 B+\cos^2 B$．故 $\frac{a^2+b^2}{c^2}=\frac{(\cos^2 B-\sin^2 B)^2+\sin^2 B}{\cos^2 B}=\frac{(2\cos^2 B-1)^2+(1-\cos^2 B)}{\cos^2 B}=\frac{4\cos^4 B-5\cos^2 B+2}{\cos^2 B}=4\cos^2 B+\frac{2}{\cos^2 B}-5$（下面利用基本不等式，解法同上）．

方法 3 由第(1)题的方法 2 可知 $\frac{\cos A}{1+\sin A}=\frac{\sin B}{\cos B}$，两边平方，得 $\frac{\cos^2 A}{(1+\sin A)^2}=\frac{\sin^2 B}{\cos^2 B}$，即 $\frac{(1+\sin A)^2}{\cos^2 A}=\frac{1-\sin^2 B}{\sin^2 B}$，解得 $\sin^2 B=\frac{\cos^2 A}{2+2\sin A}=\frac{1}{2}(1-\sin A)$．由(1)方法 2 可知 $-\cos C=\sin B$，所以 $\sin^2 C=1-\cos^2 C=1-\sin^2 B$．故 $\frac{a^2+b^2}{c^2}=\frac{\sin^2 A+\sin^2 B}{\sin^2 C}=\frac{(1-2\sin^2 B)^2+\sin^2 B}{1-\sin^2 B}=\frac{4\sin^4 B-3\sin^2 B+1}{1-\sin^2 B}$．记 $t=1-\sin^2 B$，则 $0<t<1$，从而 $\frac{a^2+b^2}{c^2}=\frac{4(1-t)^2-3(1-t)+1}{t}=\frac{4t^2-5t+2}{t}$（下面解法同上）．

4 数形结合思想

数形结合思想注重“数”与“形”结合，相互渗透，把代数式的精确刻划与几何图形的直观描述相结合，使代数问题与几何问题相互转化，使抽象思维与形象思维有机结合．应用数形结合思想，就是充分考查数学问题的条件与结论之间的内在联系，既分析其代数意义又提示其几何意义，将数量关系和空间形式巧妙结合，寻求解题思路，使问题得到快速解决．

4.1 构造直角三角形，寻找边角关系

高中学习了正余弦定理之后，我们运用定理可以处理斜三角形的问题，但如果在其中特殊的三角形——直角三角形中，寻找边角之间的关系会更为简便，故从数形结合思想的角度联想可以构造直角三角形，帮助我们快速寻找边角间的关系式．

（2）*方法 4* 过点 A 作边 BC 的垂线，交 BC 的延长线于点 D(图 1)．由第(2)题的方法 1 可知，$C-\frac{\pi}{2}=B$，故 $\angle CAD=\angle B$，记为 θ．易知

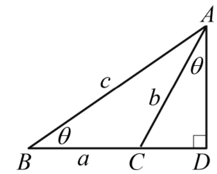

图 1

$c\sin\theta=b\cos\theta$，$c\cos\theta=a+b\sin\theta$．解得 $b=\frac{c\sin\theta}{\cos\theta}$，$a=c\cos\theta-b\sin\theta=c\cos\theta-\frac{c\sin^2\theta}{\cos\theta}$．故 $\frac{a^2+b^2}{c^2}=\left(\cos\theta-\frac{\sin^2\theta}{\cos\theta}\right)^2+\frac{\sin^2\theta}{\cos^2\theta}=\left(\frac{\cos^2\theta-\sin^2\theta}{\cos\theta}\right)^2+\frac{\sin^2\theta}{\cos^2\theta}=\frac{(2\cos^2\theta-1)^2+(1-\cos^2\theta)}{\cos^2\theta}=\frac{4\cos^4\theta-5\cos^2\theta+2}{\cos^2\theta}$（下面解法同上）．

4.2 利用相似三角形，寻找边间关系

由两个三角形相似可以得到边之间的比例关系，从而据此可以进行边之间的转化和化归，减少变量的个数，将复杂问题转化为简单问题处理．

（2）*方法 5* 由第(2)题的方法 1 可知，C 为钝角，B 为锐角．在边 AB 上取一点 D，使得 $\angle ACD=\angle B$(图 2)．因为 $\angle A$ 为

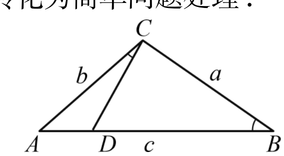

图 2

公共角，所以 $\triangle ACD\backsim\triangle ABC$，得到 $\frac{AD}{AC}=\frac{AC}{AB}=\frac{CD}{BC}$，即 $\frac{AD}{b}=\frac{b}{c}=\frac{CD}{a}$，故 $AD=\frac{b^2}{c}$，$CD=\frac{ab}{c}$．由方法 1 可知，$C-\frac{\pi}{2}=B$，即 $\angle BCD=90^\circ$．因为 $CD^2+CB^2=BD^2$，故 $a^2+\left(\frac{ab}{c}\right)^2=\left(c-\frac{b^2}{c}\right)^2$，即 $a^2(b^2+c^2)=(c^2-b^2)^2$，得 $a^2=\frac{(c^2-b^2)^2}{b^2+c^2}$．故 $\frac{a^2+b^2}{c^2}=\frac{\frac{(c^2-b^2)^2}{b^2+c^2}+b^2}{c^2}=\frac{c^4-b^2c^2+2b^4}{c^2(b^2+c^2)}=\frac{1-\frac{b^2}{c^2}+2\cdot\frac{b^4}{c^4}}{\frac{b^2}{c^2}+1}$．记 $t=\frac{b^2}{c^2}+1$，则 $1<t<2$，所以

$\frac{a^2+b^2}{c^2}=\frac{1-(t-1)+2(t-1)^2}{t}=\frac{2t^2-5t+4}{t}=2t+\frac{4}{t}-5$（下面解法同上）.

本题中的三角形可以构造子母三角形，此类模型在 2021 年全国 I 卷第 19 题曾经考查过.这就要求我们在高三数学复习教学中，对于经典高考试题要舍得花时间去研究，要抓住问题本质特征，提炼数学思想，感悟数学方法，方能触类旁通，举一反三.

（2021 年全国 I 卷 19 题）记$\triangle ABC$的内角A，B，C的对边分别为a，b，c.已知$b^2=ac$，点D在边AC上，$BD\sin\angle ABC=a\sin C$.（1）证明：$BD=b$；（2）若$AD=2DC$，求$\cos\angle ABC$.

解　（1）此题模型也是子母相似三角形，如图 3 所示. 因为$BD\sin\angle ABC=a\sin C$，所以$\frac{a}{\sin\angle ABC}=\frac{BD}{\sin C}$.而在$\triangle BDC$中，由正弦定理可得$\frac{a}{\sin\angle BDC}=\frac{BD}{\sin C}$，所以$\sin\angle ABC=\sin\angle BDC$.若$\angle ABC=\angle BDC$，则$\triangle CBD\backsim\triangle CAB$，所以$\frac{a}{b}=\frac{BD}{c}$，即$b\cdot BD=ac$.又$b^2=ac$，故$BD=b$；若$\angle ABC+\angle BDC=\pi$，则$\triangle ADB\backsim\triangle ABC$，所以$\frac{c}{b}=\frac{BD}{a}$，即$b\cdot BD=ac$.又$b^2=ac$，故$BD=b$.综上所述，$BD=b$.

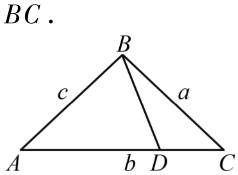

图 3

（2）在证明了$BD=b$这个结论之后，分别在$\triangle BCD$和$\triangle ABC$中通过算两次思想计算$\cos C$，或者根据$\cos\angle BDA+\cos\angle BDC=0$，可以得到$6a^2-11ac+3c^2=0$，即$a=\frac{1}{3}c$或$a=\frac{3}{2}c$.再结合$b^2=ac$，得到三边之间的关系后，利用余弦定理求解.或者利用向量等式$\overrightarrow{BD}=\frac{1}{3}\overrightarrow{BA}+\frac{2}{3}\overrightarrow{BC}$把边和角完美地融合在一起，两边平方可以把向量关系转化为数量关系.

5　反思与启示

本题蕴含了多种数学思想方法，从不同的思想视角出发，可以寻找到不同的处理方法，对学生来讲就是一种数学能力和内隐的数学素养.要想让学生在考场上站得高、看得远，就需要我们在平时的教学中紧紧围绕数学思想，引导学生根据问题的具体结构，全方位、多角度地观察和理解问题，通过数学思想来沟通知识间的联系，进行有效追问，揭示问题、方法的本质，追求一般的思维方法，挖掘方法背后的思想，发挥思想的统领作用，最终使学生能够从数学思想方法的视角出发，分析和解决问题，并使之成为学生思考和解决问题的一种自觉习惯.[2]

教育部考试中心主编的《高考数学测量理论与实践（2007 年版）》，针对高考对学生理解数学思想方法及应用能力的考查要求，对中学比较重要的思想和方法进行了层次划分和系统归类，将数学思想和方法分为三大类.第一类：数学思想方法，主要包括函数与方程的思想、数形结合的思想、分类与整合的思想、转化与化归的思想、特殊与一般的思想、有限与无限的思想、或然与必然的思想、算法的思想.这些都是高考必考的重要数学思想方法.第二类：数学思维方法，主要包括分析法、综合法、归纳法、演绎法、观察法、实验法、特殊化方法等.第三类：数学方法，主要指应用面较窄的具体方法，如配方法、换元法、待定系数法等具体的解题方法.[3] 这三类之间的关系可以用这样一句话概括，就是在问题解决过程中人们利用第二类数学思维方法，在第一类数学思想方法的指引下采用第三类具体的数学方法解决问题.简单来说，方法是“术”，思想是“道”！思想是方法的上位，具有指导意义.

在解题过程中要突出以数学思想方法为指导，分析和研究问题，充分发挥数学思想方法对发现解题途径的定向、联想和转化功能.[4] 在解题过程中或者解题结束后还要不断地总结、归纳解题方法，并加以提炼上升到数学思想的高度，这一过程学生很难自发实现，需要教师的引导和帮助.这也正好体现新课程标准所提出的教师是引导者、合作者的角色.

参考文献

［1］ 王弟成.2021 年全国 I 卷 19 题解法及教学启示［J］.中小学数学（高中版），2022（3）：15-18.
［2］ 张必华.重视通性通法，渗透数学思想［J］.中学数学月刊，2013（1）：37-39.
［3］ 教育部考试中心.高考数学测量理论与实践（2007 年版）［M］.北京：高等教育出版社，2006.
［4］ 胡永强.从一道习题谈数学思想和方法的教学［J］.上海中学数学，2014（5）：22-24.