

# 顺“思”而为 借“思”而上

## ——三个数学案例的实录、评析和思考\*

章祥俊 (江苏省苏州吴县中学 215129)

**摘要:**课堂教学中应更多地关注学生的自主学习空间,凸显学生的主体地位,实现学生的自我价值.通过三个案例分析学生学习方式的变化,引导学生学会思考,促进他们学会学习.

**关键词:**案例评析;教学思考;自主学习

**文章编号:**1004-1176(2022)06-0040-02

近年来,数学课堂的变化是巨大的,课堂教学过程中的问题驱动、活动引领、任务驱动、项目学习、单元设计等已经成为趋势.课堂教学中,以学生为中心,关注学生动手实践、自主探究、合作交流、问题解决等已经成为常态.<sup>[1]</sup>课堂教学中,我们应更多地关注学生的自主空间,关注学生的自主学习,关注学生的主体意识,实现学生的自我价值,激发学生的学习动力,顺势而为,借思而上,引导学生深度思考,促进学生学会学习.本文拟结合三个案例具体谈一谈.

### 1 顺“思”而为,引发自主探究,促进学生自主学习

**案例1** 求函数  $f(x)=x^2-2x-3, x \in \mathbf{R}$  的最小值.

生:因为  $f(x)=x^2-2x-3=(x-1)^2-4$ ,所以函数  $f(x)$  的最小值为  $f(1)=-4$ .

**设计问题** 以二次函数为背景,请你命制一道求函数最值的题目.

生1:求函数  $f(x)=x^2-2x-3, x \in [2,3]$  的最小值.

生2:求函数  $f(x)=x^2-2x-3, x \in (2,3)$  的最小值.

生3:求函数  $f(x)=x^2-2x-a, x \in [2,3], a \in \mathbf{R}$  的最小值.

生4:求函数  $f(x)=x^2-ax-3, x \in [2,3], a \in \mathbf{R}$  的最小值.

生5:求函数  $f(x)=ax^2-2x-3, x \in [2,3], a \in \mathbf{R}$  的最小值.

生6:求函数  $f(x)=x^2-2x-3, x \in [a-1, a+1], a \in \mathbf{R}$  的最小值.

生7:求函数  $f(x)=ax^2-2ax-3, x \in [2,3], a \in \mathbf{R}$  的最小值.

生8:求函数  $f(x)=ax^2-bx+c, x \in [m, n], a, b, c, m, n \in \mathbf{R}$  的最小值.

**评析和思考** 以二次函数为背景的函数最值

问题是高一数学学习中一个重点内容.教师在进行教学设计时,将预设的题目变为引导学生自行研究、小组讨论、解题和归纳的开放题,让学生自己命制求函数最值的题目,顺着第一个学生的思维,组织学生进行自编活动,共编制出8个变式题.通过这样顺“思”而为的活动引导学生主动思考与探究,思维层层递进,将二次函数从“定轴定区间”的研究自然深入到“动轴定区间”“定轴动区间”“动轴动区间”的研究.在这样的过程中,学生的思维因问题的开放性和探究性而激活,教学效果必然好很多,同时,这样处理极大地调动了学生的积极性和主动性.从培养学生数学观念的角度看,这样的过程可以培养学生有一定的数学情境中抽象出数学概念、命题、方法和体系,积累从特殊到一般的活动经验、从静止到变化的函数思想方法,养成在日常学习和实践中从一般性角度思考问题的习惯,把握事物的本质,以简驭繁,运用数学思维思考并解决问题.顺“思”而为激发了学生的自主学习,实现了学生的思维升华,提升了学生核心素养发展,促进了学生的自主学习.

### 2 借“思”而上,探究知识本质,促进学生乐于学习

**案例2** 等比数列前  $n$  项和  $S_n = a_1 + a_1 q + a_1 q^2 + \dots + a_1 q^{n-1}$  公式的推导.

生1:提取公因数  $a_1$ .

生2:倒序加? 倒序乘?

生3:特殊化,令  $S_n = 1 + 2 + 2^2 + \dots + 2^{n-1}$ ,猜想  $S_n = q^n - 1$ .

生4:令  $S_n = 1 + 3 + 3^2 + \dots + 3^{n-1}$ ,那么刚才的猜想不成立,应猜想  $S_n = \frac{q^n - 1}{2}$ .

生5:令  $S_n = 1 + 4 + 4^2 + \dots + 4^{n-1}$ ,那么刚才的猜想也不成立,应猜想  $S_n = \frac{q^n - 1}{3}$ .

\* 本文系江苏省教育科学“十三五”规划2019年度立项课题“深度学习视域下高中数学单元教学设计与实践研究”(编号:JS/2019/ZX0211-02125)的阶段性成果.

生6:当公比为 $q$ 时,应该是 $S_n = \frac{q^n - 1}{q - 1}$ .此时公比应该不能是1.

生7:要证 $S_n = \frac{q^n - 1}{q - 1}$ ,即证 $S_n(q-1) = q^n - 1$ ,也就是证 $qS_n - S_n = q^n - 1$ .此时因为 $qS_n = q + q^2 + q^3 + \dots + q^n$ , $S_n = 1 + q + q^2 + \dots + q^{n-1}$ ,两式相减即可证得.又因为首项为 $a$ ,所以 $S_n = \frac{a(q^n - 1)}{q - 1}$ .

**评析和思考** 很多教师在推导等比数列前 $n$ 项和公式时将“错位相减法”硬塞给学生,学生表面上听懂了,但他们心中的“惑”由谁人来解?学生是在多次操练下似懂非懂地练“会”了,这是真的会了吗?他们理解为什么这样推导吗?学生对错位相减法的道理感觉云里雾里,整个学习处于被动的状态.

在讲授该内容时,笔者曾遇到这样的情景:先问学生如何进行推导,得到的回复是“我不会”,也有回答“错位相减法”的,再追问时得到的回答是“课本上就是这样”,然后顺着学生的回答讲授该方法,学生也就被动地听之.直到两年前,同样讲授该内容时,遇到一个“固执”的学生追问“为何如此推导”,且有不达目的不罢休之势,借着这位学生的“思”引导全班学生共同思考、探究,把顺势和借思的时间给足学生,终得上述案例2.

笔者曾做过多次调查,让高三的学生证明课本中一些定理、公式时,能证明或推导出的学生寥寥无几.课程改革致力于培养学生的核心素养、关键能力和终身学习的学习力,其出发点和根本目的是完全正确的,但是在教学实践中很多教师还是“新瓶装旧酒”,教学中仅仅关注“是什么”而忽视“为什么”,这不得不令人深思.实际教学中,我们完全可以把课堂真正让学生,把思考的时间和机会留给学生,让学生借“思”而上.通过自己的理解和与同伴的交流讨论,学生一定能理解“错位相减法”的本质,其学习的兴趣也就自然被激发出来了.

### 3 因“思”利导,提升思维品质,促进学生深度学习

**案例3** 已知正实数 $a, b$ 满足 $\frac{1}{a+b} + \frac{1}{a-b} = 1$ ,求 $3a+2b$ 的最小值.

生1:消元法, $b = \sqrt{a^2 - 2a}$ ,所以 $3a+2b = 3a+2\sqrt{a^2 - 2a}$ ,只是继续处理有难度,应该有更好的思路解决这道题目.我再想一想.

生2:换元法,令 $m = a+b > 0, n = a-b > 0$ ,题目转化为:已知 $\frac{1}{m} + \frac{1}{n} = 1$ ,求 $\frac{1}{2}(5m+n)$ 的最小值.而 $\frac{1}{2}(5m+n) = \frac{1}{2}(5m+n)\left(\frac{1}{m} + \frac{1}{n}\right)$ ,拆开后用基本不等式解决, $3a+2b$ 的最小值为 $3+\sqrt{5}$ .

生3:这个思路很好,但取不到等号,所以 $3a+2b$ 的最小值肯定不是 $3+\sqrt{5}$ .

生4:令 $\frac{m}{n} = x (x \geq 1)$ ,则由 $f(x) = \frac{1}{2}\left(6+5x+\frac{1}{x}\right)$ 在 $(1, +\infty)$ 上递增,解得 $f(x)_{\min} = f(1) = 6$ ,所以 $3a+2b$ 的最小值为6.

生5:也不对!因为当 $x=1$ 时, $m=n$ ,即 $a+b=a-b$ ,于是 $b=0$ ,与已知条件矛盾.

生6:可以借助图象解释原因. $\frac{1}{a+b} + \frac{1}{a-b} = 1$ 可以转化为 $(a-1)^2 - b^2 = 1 (a, b > 0)$ ,对应的图象为双曲线在第一象限的部分,所以 $a=1$ 不可能成立.我认为本题没有最小值.

生7:可以将题目改为求 $3a+2b$ 的取值范围.

生8:也可以改为:已知正实数 $a, b$ 满足 $\frac{1}{a+b} + \frac{1}{a-b} = 1$ ,求 $3a-2b$ 的最小值.利用线性规划,在直线与双曲线(第一象限)相切时取得最值.

**评析和思考** 在该案例中,从高考常考的多元最值问题出发,引导学生对问题进行多维的探究与反思,思维在交流碰撞中提升,真正理解了问题的处理方法.学生经历由通性通法研究到错误引发的思维过程,再到找到原因、变式研究,有效地巩固了数学知识、训练了解题方法、提升了解题技能、渗透了数学思想方法、提高了探究能力,这就是培养学生核心素养和关键能力的有效途径.高中数学知识方法千万条,但数学理解是第一条.课堂教学应立足于学生的“最近发展区”,以学生的眼光组织开展数学教学,最大限度地促使学生学会数学思考,提高数学思维的参与度.<sup>[2]</sup>

### 4 结语

在课堂教学中,我们不能只“授业”,而不“解惑”;不能只训练方法,而忽视能力的提升;不能只关注远方,而忽略了脚下行走的路;不能只关注“正确的”,还要多关注那些“错误的”;不能“硬塞给”学生,而应该吸引他们“过来拿”;不能将“台阶”都铺设好,而应该让学生自己搭建阶梯;不能只关注课前预设,更需要注重课堂生成,顺“思”而为,借“思”而上,因“思”利导,真正促进学生学会学习.

### 参考文献

- [1] 李善良.教科书:从“教”材到“学”材——苏教版高中数学教科书编写思考[J].中学数学月刊,2019(8):1-4.
- [2] 童先峰.理解概念就是理解数学,理解学生就是理解教学[J].中学数学月刊,2019(8):27-29.