

凸多面体外接球半径问题的探究^{*}

吴宣良 王先义 (四川省双流中学 610200)

摘要:凸多面体外接球问题是高考数学和高中数学联赛中立体几何部分考查的典型问题,而外接球半径是解决此类问题的核心.文章从凸多面体外接球模型出发,探究外接球半径求解的通性通法,获得多面体外接球半径的一般公式及其推论,并对相关公式和推论进行简单应用,实现一法解多题.

关键词:凸多面体;外接球半径;通性通法

文章编号:1004-1176(2022)06-0059-03

立体几何是高中数学学习的重要版块,是培养和考查学生数学建模、直观想象和数学运算等数学素养的重要载体.凸多面体外接球半径问题是立体几何中的典型问题,也常出现在高考选填压轴和高联试题中,这类问题对学生的直观想象和数学运算素养都有较高的要求.此前,许多研究者对此问题进行分类总结出诸多模型,但其模型种类复杂多样,学生理解和掌握都较为困难.本文先从已有的凸多面体外接球模型出发,提炼问题模型,寻找通性通法,再通过几何画板获得球体半径确定的关键要素,并根据要素探究凸多面体外接球半径的统一公式,最后对相关公式进行简单应用,现整理成文,以飨读者.

1 凸多面体外接球半径研究缘由

笔者查阅了近年来研讨外接球半径求法问题的各类文献,发现大多数文献以分类讨论为主,大体可以分为六种模型^[1-4].

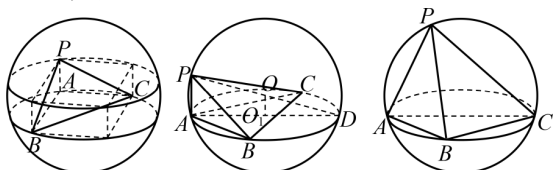


图 1

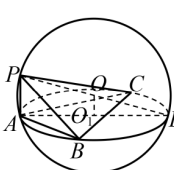


图 2

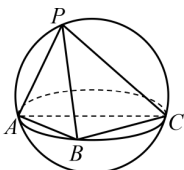


图 3

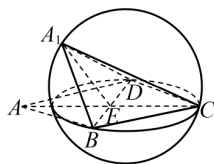


图 4

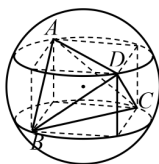


图 5

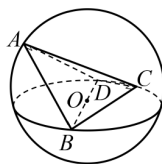


图 6

墙角模型:其特征是四面体某一顶点处的三条棱两两垂直,将四面体补为长方体求得外接球半径(图1).

垂面模型:其特征是四面体中存在一条直线

垂直于一个平面,根据外接球球心位置及其线面垂直关系求得外接球半径(图2).

切瓜模型:其特征是四面体中存在两个平面互相垂直,且其中一条棱为截面圆的直径,利用截面圆直径与外接球球心共面的特征求得外接球半径(图3).

折叠模型:其特征是由两个等腰三角形拼接在一起而成的四面体,利用两个三角形外接圆圆心确定球心,再利用勾股定理进行求解(图4).

对棱相等模型:其特征是四面体三组对棱长度相等,通过构造长方体模型求解外接球半径(图5).

两直角三角形拼接模型:其特征是由两个斜边相等的直角三角形相互拼接得到的四面体,根据几何特征直接确定球心在两直角三角斜边中点处(图6).

以上六种模型都是解决凸四面体的外接球半径的常用模型.根据六种模型的特征,大致可以分为三类:第一类是四面体内存在两个相互垂直的面,即前三种模型;第二类是四面体中有两个三角形的外接圆半径相等,即后三种模型.

此时,笔者产生了三个疑问:

问题1 对于任意的凸四面体外接球半径问题,是否存在通性通法进行求解?

问题2 如果存在通性通法,是否存在完整统一的凸四面体外接球半径公式呢?

问题3 如果一般的凸多面体存在外接球时,它的外接球半径又该如何求解呢?

2 凸多面体外接球半径统一公式

通过作图分析发现,任意球体的半径都与它球面上任意两个不重合的相交截面圆的半径和截面的二面角有关,这就是解决存在外接球的凸多

* 王先义系本文通信作者.

面体外接球半径问题的通性通法.

鉴于此,下面通过建模研究凸多面体的外接球半径、外接球两个相交截面圆的半径、外接球两相交截面圆交线长以及这两个截面圆所在平面的二面角大小的代数关系,计算得到外接球半径的统一公式,也即解决上述三个疑问,得到一般的命题如下:

命题 设凸多面体外接球的两个相交截面圆的半径分别为 r_1, r_2 ($r_1 \geq r_2$), 这两个截面交线长度为 L , 两个截面所在平面构成的二面角大小为 θ , 则该凸多面体的外接球半径 R 可以表示为:

$$R^2 = r_3^2 + \left[\sqrt{r_1^2 - \frac{L^2}{4}} - \left(\sqrt{r_2^2 - \frac{L^2}{4}} + r_2 \right) \cos \theta \right]^2,$$

其中 $r_3 = \left(\sqrt{r_1^2 - \frac{L^2}{4}} - \cos \theta \sqrt{r_2^2 - \frac{L^2}{4}} \right) \cot \theta + r_2 \sin \theta$.

证明 如图7, 圆 O_1 与圆 O_2 的半径分别为 r_1, r_2 ($r_1 \geq r_2$), 两圆所在平面构成的二面角的平面角大小为 θ , 外接球半径为 R . 设 A, B 两点为圆 O_1 与圆 O_2 的两个交点, 连结 AB , 则 $AB = L$. 作半径为 r_3 的圆 O_3 , 使得圆 O_3 所在的平面垂直于圆 O_1 所在的平面, 且圆 O_2 与圆 O_3 同过球上一点 Q . 设圆 O_3 与圆 O_1 交于 C, D 两点, 弦 AB, CD 的中点分别为 M_1, M_2 , 直线 OO_1 与 M_1Q 的交点为 E .

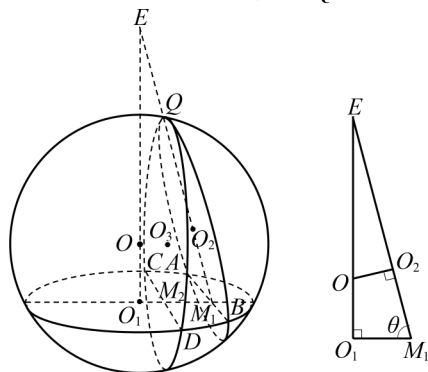


图7

$$r_3 = O_3Q = M_2Q - O_3M_2 = M_2Q - O_1O, \\ M_2Q = M_1Q \sin \theta = (r_2 + O_2M_1) \sin \theta.$$

$$\text{由勾股定理, } O_2M_1 = \sqrt{r_2^2 - \frac{L^2}{4}}, \text{ 故 } M_2Q = \\ \left(r_2 + \sqrt{r_2^2 - \frac{L^2}{4}} \right) \sin \theta, O_1M_1 = \sqrt{r_1^2 - \frac{L^2}{4}}.$$

$$\text{在 } \triangle EO_1M_1 \text{ 中, } EM_1 = \frac{O_1M_1}{\cos \theta}, EO_1 = \\ O_1M_1 \tan \theta = \sqrt{r_1^2 - \frac{L^2}{4}} \tan \theta, \text{ 所以 } EO = \frac{EO_2}{\sin \theta} =$$

$$\frac{EM_1 - O_2M_1}{\sin \theta} = \frac{\frac{\sqrt{r_1^2 - \frac{L^2}{4}}}{\cos \theta} - \sqrt{r_2^2 - \frac{L^2}{4}}}{\sin \theta}.$$

又 $O_1O = EO_1 - EO$, 故 $r_3 = M_2Q - O_1O =$

$$\left(r_2 + \sqrt{r_2^2 - \frac{L^2}{4}} \right) \sin \theta + \frac{\sqrt{r_1^2 - \frac{L^2}{4}}}{\cos \theta} - \sqrt{r_2^2 - \frac{L^2}{4}} - \\ \sqrt{r_1^2 - \frac{L^2}{4}} \tan \theta. \text{ 化简得到 } r_3 = \\ \left(\sqrt{r_1^2 - \frac{L^2}{4}} - \cos \theta \sqrt{r_2^2 - \frac{L^2}{4}} \right) \cot \theta + r_2 \sin \theta.$$

由勾股定理, 在 $\triangle OO_1M_2$ 中, $OM_2^2 = OO_1^2 + O_1M_2^2$, 其中 $OM_2^2 = R^2 - \frac{CD^2}{4}$, $OO_1^2 = R^2 - r_1^2$, $O_1M_2^2 = OO_3^2 = R^2 - r_3^2$. 代入整理得 $R^2 = r_1^2 + r_3^2 - \frac{CD^2}{4}$. 又因为 $\frac{CD}{2} = \sqrt{r_1^2 - O_1M_2^2} =$

$$\sqrt{r_1^2 - (O_1M_1 - M_1M_2)^2}, M_1M_2 = M_1Q \cos \theta = \\ \left(r_2 + \sqrt{r_2^2 - \frac{L^2}{4}} \right) \cos \theta, \text{ 所以 } \frac{CD}{2} =$$

$$\sqrt{r_1^2 - \left[\sqrt{r_1^2 - \frac{L^2}{4}} - \left(r_2 + \sqrt{r_2^2 - \frac{L^2}{4}} \right) \cos \theta \right]^2}, \\ \text{从而 } R^2 = r_1^2 + r_3^2 - \frac{CD^2}{4} = r_3^2 + \\ \left[\sqrt{r_1^2 - \frac{L^2}{4}} - \left(r_2 + \sqrt{r_2^2 - \frac{L^2}{4}} \right) \cos \theta \right]^2.$$

其中 $r_3 = \left(\sqrt{r_1^2 - \frac{L^2}{4}} - \cos \theta \sqrt{r_2^2 - \frac{L^2}{4}} \right) \cot \theta + r_2 \sin \theta$.

在命题的证明过程中, 通过构造与圆 O_1 所在的平面垂直的圆 O_3 , 再根据圆 O_1 和圆 O_3 的半径、公共弦长与其外接球半径的关系, 推导出外接球半径的统一公式, 此公式是求解凸多面体外接球半径的统一公式. 下面将多面体条件特殊化, 可得到更为简洁的多面体外接球半径公式.

3 两类特殊的凸多面体外接球半径公式

如果外接球的两个截面圆所在的平面互相垂直时, 也即 $\theta = \frac{\pi}{2}$, 可以得到如下推论:

推论1 若一个凸多面体有外接球, 设该凸多面体外接球的两个截面圆的半径分别为 r_1, r_2 ($r_1 \geq r_2$), 截面圆交线长度为 L , 且外接球的两个截面圆所在的平面互相垂直时, 则该凸多面体

的外接球半径 R 可以表示为 $R^2 = r_1^2 + r_2^2 - \frac{L^2}{4}$.

注:此公式即为文首中提到的前三种模型(墙角模型、垂面模型和切瓜模型)的外接球半径公式.

如果外接球的两个截面圆的半径相等时,可以得到如下推论:

推论 2 若一个凸多面体有外接球,该多面体的某两个相邻面的外接圆半径均为 r ,这两个相邻面交线长度为 L ,两个相邻面所在平面构成的二面角大小为 θ ,则该多面体的外接球半径 R 可以表示为 $R^2 = \frac{2}{1 + \cos \theta} \left(r^2 - \frac{L^2}{4} \right) + \frac{L^2}{4}$.

注:此公式即为文首中提到的后三种模型(折叠模型、对棱模型和拼接模型)的外接球半径公式.

4 凸多面体外接球半径统一公式简单应用

例 1 (2020 重庆高中数学联赛预赛)四面体 $ABCD$ 中, $AB \perp BC$, $CD \perp BC$, $BC=2$,且异面直线 AB 与 CD 所成的角为 60° .若四面体 $ABCD$ 的外接球半径为 $\sqrt{5}$,则四面体 $ABCD$ 的体积的最大值为 _____.

解析 如图 8,设 $AB = x$, $CD = y$,则易得四面体 $ABCD$ 的体积 $V = \frac{\sqrt{3}}{6}xy$.由题意可知二面角 $A-BC-D$ 的大小为 60° , $\triangle ABC$ 与 $\triangle BCD$

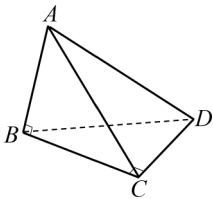


图 8

的外接圆半径分别为 $r_1 = \sqrt{\frac{x^2+4}{4}}$ 与 $r_2 = \sqrt{\frac{y^2+4}{4}}$.

由命题知 $R^2 = \left[\frac{x}{2} - \frac{1}{2} \left(\frac{y}{2} + \sqrt{\frac{y^2+4}{4}} \right) \right]^2 + \left[\frac{\sqrt{3}}{3} \left(\frac{x}{2} - \frac{y}{4} \right) + \frac{\sqrt{3}}{2} \sqrt{\frac{y^2+4}{4}} \right]^2 = 5$,化简得 $xy = x^2 + y^2 - 12$,所以 $xy \geq 2xy - 12$,即 $xy \leq 12$,当且仅当 $x = y = 2\sqrt{3}$ 时取等号,体积 V 的最大值为 $2\sqrt{3}$.

例 2 (2019 陕西高中数学联赛预赛)如图 9,在棱长为 1 的正四面体 $A-BCD$ 中, G 为 $\triangle BCD$ 的重心, M 是线段 AG 的中点,则三棱锥 $M-BCD$ 的外接球表面积为 _____.

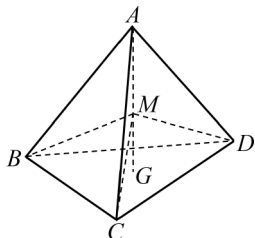


图 9

解析 由于 G 是 $\triangle BCD$ 的重心,可得 $DG = \frac{\sqrt{3}}{3}$, $AG = \frac{\sqrt{6}}{3}$.因为 M 是线段 AG 的中点,所以

$$MG = \frac{\sqrt{6}}{6}, MD = MB = MC = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

在 $\triangle MBC$ 中, $MC^2 + MB^2 = BC^2$,所以 $\angle BMC = 90^\circ$.同理可得 $\angle CMD = \angle BMD = 90^\circ$,所以平面 $BMC \perp$ 平面 CMD .

又 $\triangle MBC$ 与 $\triangle MCD$ 的外接圆半径均为 $\frac{1}{2}$,则由推论 1 可得 $R^2 = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} - \frac{MC^2}{4} = \frac{3}{8}$,外接球表面积为 $\frac{3}{2}\pi$.

例 3 (2018 山西高中数学联赛预赛)在四面体 $A-BCD$ 中,棱 $BC=3$,其余各棱长均为 2,则四面体 $A-BCD$ 外接球半径为 _____.

解析 如图 10,由题意得 $BC=3$, $AB=AC=AD=BD=CD=2$.

取 AD 的中点 F ,连结 BF, CF ,则 $BF=CF=\sqrt{3}$,从而 $\cos \angle BFC = \frac{CF^2 + BF^2 - CB^2}{2CF \cdot BF} = -\frac{1}{2}$.

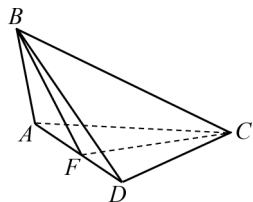


图 10

由对称性可知 $\angle BFC$ 为平面 ABD 和平面 ACD 的二面角的平面角,且 $\triangle ABD$ 与 $\triangle ACD$ 的外接圆半径均为 $\frac{2\sqrt{3}}{3}$.由推论 2 可得 $R^2 = \frac{2}{1 + \cos \angle BFC} \left(\frac{4}{3} - \frac{4}{4} \right) + \frac{4}{4} = \frac{7}{3}$,外接球半径 $R = \frac{\sqrt{21}}{3}$.

评注 例 1、例 2、例 3 均为高中数学联赛试题,这三题也可以利用几何法作出球心,再利用几何关系计算外接球半径,但对学生的逻辑推理和直观想象素养要求较高.此处借助命题及其推论,可以降低作图和计算难度,节约时间成本,提高思维的经济效益.

凸多面体外接球半径问题在高联和高考中考查得非常广泛,在 2017 年甘肃和福建高中数学联赛中也进行了考查,在高考全国卷和地方卷对凸多面体外接球半径进行了多次考查,限于篇幅原因,本文不一一列举作答,有兴趣的读者可以尝试利用凸多面体外接球半径统一公式进行求解.

对一道平面向量模考题的探究与思考

华志远 (江苏省无锡市第一中学 214031)

摘要:针对一道平面向量模考题得分率较低的情况,对试题背景、解法作深度探究,并对不同的思考方式作评估分析,透视学生在解题过程中思维受挫的原因,研究解题教学中如何运用波利亚的解题原则,引领学生走出思维误区.

关键词:平面向量;模考题;探究与思考

文章编号:1004-1176(2022)06-0062-03

在无锡市2021年秋学期高三期中考试,第20题是一道以三角形为背景的平面向量试题.统计表明,该题难度系数仅为0.15,得满分者更是寥若晨星.从题面上看,试题内容看似平实,实则内涵极为丰富;试题呈现方式简洁,提出问题逐级深入;涉及知识综合有度,方法灵活多样;具有较强的探索性,深度检测了数学素养,充分体现了新高考评价体系的精神,即把关键能力作为高考评价的核心指标和因素.从题干上看,本题从三角形的基本量和点线的位置关系出发,通过引入向量语言,使数与形有机结合.第(1)问是求两条线段的比值,属于几何问题;第(2)问是求两个向量数量积的最小值,属于代数问题,从而使试题具有较强的探索性和开放性,学生可以从平面向量的多个维度寻找解题突破口,并利用向量共线定理进行转化,而数量积的最值可利用基本不等式或求导获得答案.由于学生解答情况较差,因此我们对本题作重新研究、评估和反思.本文试图通过探索该题的命题背景,尝试一般的解题策略,依托数学思想方法,引领学生走出思维误区,以发展学生的能力和素养.

5 结束语

“通性通法”中,“通性”是概念所反映的数学基本性质,“通法”是概念所蕴含的思想方法.章建跃博士认为,在解题教学中要使学生逐步养成从基本概念、基本原理及其联系性出发思考 and 解决问题的习惯,要注重大巧若拙的通性通法,而不是将学生的注意吸引到技巧上^[5].本文探究了一种求解多面体外接球半径的一般思路,力求“做一题,会一类,通一片”.在解题和教学的过程中,要避免就题论题,要有从特殊到一般的探索意识,归纳和总结问题的共性和特点,从而获得问题的通法,提升能力并优化认知结构.

1 试题及背景分析

试题 在 $\triangle ABC$ 中,已知 $AB=2$, $AC=\sqrt{11}$, $\cos\angle BAC=\frac{5\sqrt{11}}{22}$, D 为 BC 的中点, E 为边 AB 上的一个动点, AD 与 CE 交于点 O .设 $\overrightarrow{AE}=x\overrightarrow{AB}$.

(1)若 $x=\frac{1}{4}$,求 $\frac{CO}{OE}$ 的值;

(2)求 $\overrightarrow{AO}\cdot\overrightarrow{CE}$ 的最小值.

分析 从几何维度去分析,本题第(1)问求两线段的比值,容易想到构造相似三角形求解,因 D 是 BC 的中点,故可以取 CE 的中点 F ,则 $DF\parallel$

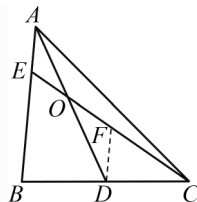


图1

BE ,且 $DF=\frac{1}{2}BE$ (图1).再由

$\triangle ODF\sim\triangle OAE$,得到 $\frac{OF}{OE}$ 的值,进而求得 $\frac{CO}{OE}$

的值.事实上,若将 $\triangle BEC$ 看成被直线 AD 所截,则由梅涅劳斯定理可直接得出结论,这正是这道试题的平面几何背景.

参考文献

- [1] 陈桂明.借球问道 提升想象 助力素养——“空间几何体的外接球”一轮复习与反思[J].中学数学月刊,2020(12):18-21.
- [2] 吴漫华.浅谈多面体外接球半径的求法[J].中学数学研究(华南师范大学版),2018(3):3-5.
- [3] 黄德新,朱贤良.模型视角下的四面体外接球问题[J].数学通讯,2020(15):56-59,63.
- [4] 魏欣.用公式法突破空间几何体的外接球问题[J].中学数学研究(华南师范大学版),2021(11):53,1-6.
- [5] 章建跃.注重通性通法才是好数学教学[J].中小学数学(高中版),2011(11):50.