

基于数学方法论的高中数学教学设计与反思

——以“椭圆的简单几何性质(第1课时)”为例*

何晓勤 (江苏省昆山市柏庐高级中学 215300)

摘要:基于数学方法论设计高中数学教学是培育学生核心素养的重要途径.将数学方法论有机融入“椭圆的简单几何性质(第1课时)”的教学,促进学生在参与数学探究活动、解决数学问题过程中,主动接受数学知识,深刻理解数学本质内容,持续生长数学学科核心素养.

关键词:数学方法论;教学设计;教学反思;椭圆的几何性质

文章编号:1004-1176(2022)06-0030-03

1 引言

数学方法论是研究和讨论数学的发展规律、数学的思想方法以及数学中的发现、发明与创造等法则的一门学问.^[1]《普通高中数学课程标准(2017年版)》指出:数学教育承载着落实立德树人根本任务、发展素质教育的功能.数学教育帮助学生掌握现代生活和进一步学习所必需的数学知识、技能、思想和方法;提升学生的数学素养,引导学生会用数学眼光观察世界,会用数学思维思考世界,会用数学语言表达世界.^[2]用数学方法论指导高中数学教学是推进素质教育和培育数学核心素养的一种重要途径.下面以“椭圆的简单几何性质(第1课时)”的教学设计为例,对用数学方法论指导高中数学教学进行尝试.

2 基本情况分析

2.1 学情分析

授课对象为江苏省三星级普通高中高二理科班,数学基础较好,具备一定的数学抽象、数学运算、逻辑推理等数学学科核心素养.学生在以前的学习中曾简单运用代数方法研究过圆的性质及函数的性质等,有一定的研究基础,但真正系统地利用代数方法研究曲线性质还是第一次.

2.2 教材分析

本节课是新人教A版数学选择性必修第一册第三章“圆锥曲线的方程”第一节“椭圆”中的“3.1.2 椭圆的简单几何性质”第1课时.课程标准中对“椭圆”这一节的目标要求是:经历从具体情境中抽象出椭圆的过程,掌握椭圆的定义、标准方程及简单几何性质.教材前一节内容是椭圆的定义与标准方程,本节课学习运用代数方法研究椭圆的几何性质,为后续研究双曲线和抛物线的几何性质乃至一般曲线

的性质起到重要的示范作用.

2.3 教学目标定位

结合课程标准和上述分析,确定教学目标如下:(1)能在直观认识椭圆的几何特征的基础上,用椭圆的标准方程推导出椭圆的范围、对称性、顶点、离心率等简单几何性质;(2)通过方程研究椭圆的几何性质,体会用曲线的方程研究曲线性质的方法,发展数学抽象、直观想象、数学运算、逻辑推理等素养.

2.4 教学重点和难点

教学重点 椭圆的简单几何性质(范围、对称性、顶点、离心率等).

教学难点 通过椭圆的标准方程研究椭圆的几何性质;理解椭圆的离心率.

2.5 教法教具分析

设计探究问题,启发引导学生进行自主探究和合作探究;利用现代教学手段,关注教学内容与现代教育手段的合理整合.利用几何画板软件感受动态过程,利用实物投影仪投影学生的作图情况,提高课堂效率.

3 教学过程设计

3.1 创设情境,提出问题

问题1 前面学习了椭圆的哪些知识?接下来要研究什么?

生:我们学习了椭圆的定义和标准方程,接下来需要研究椭圆的几何性质.

追问:如何研究椭圆的几何性质?研究椭圆的哪些性质呢?

生1:通过“画图→观察→猜想→证明”来研究椭圆的形状、大小、对称性、特殊点等.

(考虑到时间问题,课前预习已经布置学生画好

* 本文系江苏省教学研究第十三期课题“指向数学思维的高中‘自治自动’教学研究”(编号:2019JK13-L319)、苏州市教育科学“十三五”规划2019年度重点课题“数学史融入高中数学概念教学的实践研究”(编号:191004029)的阶段性研究成果.

椭圆了)

设计意图 从数学内部提出问题,引导学生回顾椭圆的定义和方程,并引出今天的研究任务——椭圆的简单几何性质.明确研究的基本思路和方法是先“形”后“数”,即在观察图形的形状和特征的基础上提出猜想,再通过椭圆的标准方程进行计算和推理,提升归纳猜想能力,体会数形结合思想的应用.

3.2 数学探究,解决问题

师:为了研究问题的方便,先以椭圆 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 为例,我们来探究其简单几何性质.

探究点1 椭圆的范围.

问题2 椭圆的范围是指什么?它具有怎样的范围?能用方程给出证明吗?

通过讨论得出,利用代数方法研究曲线的范围就是利用方程确定曲线上点的横、纵坐标的取值范围.

生2:利用 $\frac{x^2}{a^2} \geq 0$ 和 $\frac{y^2}{b^2} \geq 0$,即设 $P(x, y)$ 是椭圆上任意一点,由 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ 可得 $\frac{x^2}{a^2} = 1 - \frac{y^2}{b^2} \leq 1$,即 $-a \leq x \leq a$.同理 $-b \leq y \leq b$.

生3:利用函数思想,与函数 $y = b\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}}$ 和 $y = -b\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}}$ 的定义域、值域联系.

生4:利用三角函数的有界性,观察方程的形式,由 $\left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 = 1$ 联系到 $\frac{x}{a} = \cos \theta$ 和 $\frac{y}{b} = \sin \theta$.

学生活动1 画出直线 $x = \pm a$ 和 $y = \pm b$ 所围成的矩形区域,体验椭圆的范围.

师:由此可见,椭圆位于直线 $x = \pm a$ 和 $y = \pm b$ 所围成的矩形区域(含边界)内.研究椭圆的范围给我们带来了方便,如便于画椭圆的草图.

设计意图 明确研究曲线的范围实质上是研究什么以及怎样进行研究.学生先观察图形归纳出椭圆的范围,再利用方程进行证明,体会到方程研究性质的作用,最后再作图体验范围的应用,体现了“形→数→形”的探究过程.

探究点2 椭圆的对称性.

问题3 观察椭圆的形状,它具有怎样的对称性?在平面直角坐标系中,如何证明一个图形关于坐标轴或原点对称呢?

由于学生对利用代数法证明图象的对称性不熟悉,教师进一步追问引导学生思考.

追问:椭圆方程 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 中,把 x

换成 $-x$,方程是否改变?这说明什么?

(指明图形对称的本质是点的对称,强调“任意取一点”,并引导学生从方程角度判断曲线的对称性)

椭圆的对称中心叫做椭圆的中心.

设计意图 明确曲线对称性的实质以及怎样通过方程判断曲线是否关于坐标轴或原点对称.学生由形归纳出椭圆的对称性不难,但用代数法证明具有一定的难度;通过追问引导,让学生感知如何通过方程来研究椭圆的对称性.

探究点3 椭圆的顶点.

问题4 观察图形,你觉得 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 经过哪些比较特殊的点?它们的坐标是什么?你能通过方程给出证明吗?

生5:结合图形,得出 x 轴和 y 轴为椭圆的对称轴,故椭圆与 x 轴和 y 轴的四个交点称为椭圆的顶点.

教师通过举出坐标轴不为对称轴的椭圆,让学生体会椭圆与其对称轴的交点称为椭圆的顶点.同时,引出椭圆的长轴和短轴的概念,明确方程中参数 a, b 的几何意义.

设计意图 明确曲线顶点的含义以及通过方程研究曲线顶点的思路和方法.

学生活动2 利用描点法作出下列椭圆的草图:(1) $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1$; (2) $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1$.

设计意图 学生动手操作,运用几何性质作出椭圆的草图,进一步体会数形结合思想.给出的两个椭圆的“圆扁”程度不同,为下面引入椭圆的离心率埋下伏笔.

探究点4 椭圆的离心率.

问题5 所有的圆都是相似的,那椭圆呢?椭圆有的比较“圆”,有的比较“扁”,从方程角度看,用什么量来刻画椭圆 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的“扁”的程度呢?

生6:可用 $\frac{b}{a}$ 的大小衡量椭圆的扁平程度.

生7:可用 $\frac{c}{a}$ 的大小衡量椭圆的扁平程度.

教师给予肯定.事实上,用 a, b, c 中任意两者的比值来衡量椭圆的扁平程度都可以.但我们为什么选择 $\frac{c}{a}$ 来刻画椭圆的扁平程度呢?因为 a 和 c 是椭圆定义中的原始量,另外也为了方便后续研究圆锥曲线的统一定义.事实上,椭圆的离心率是焦距与长

轴长的比值,即 $e = \frac{2c}{2a} = \frac{c}{a} \in (0, 1)$.

追问:离心率 e 的大小如何影响椭圆“扁”的程度呢?

(先独立思考,再小组合作探究)

生8:(提出猜想)离心率越小,椭圆越接近于圆;离心率越大,椭圆越扁.

生9:(实验操作)用几何画板验证猜想的正确性.

设计意图 曲线的形状是曲线的重要性质,它是由曲线方程的参数确定的.以此为载体,既学习如何刻画椭圆的形状,又学习如何用曲线方程中的参数刻画曲线的形状.学生通过独立思考和合作探究,经历从猜想、验证到论证的思维过程,以此培养学生严谨的数学思维习惯.

学生活动3 填表(表略),总结和对比两种标准方程形式下椭圆的几何性质.

设计意图 通过填表,一方面让学生巩固椭圆 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的几何性质;另一方面让学生类比已有的知识,研究椭圆 $\frac{y^2}{a^2} + \frac{x^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的几何性质.

3.3 数学应用,内化迁移

例题 求椭圆 $25x^2 + 16y^2 = 400$ 的长轴长、短轴长、离心率、焦点坐标和顶点坐标.

设计意图 掌握椭圆的几何性质,促进知识向技能迁移.

3.4 回顾反思,总结提升

问题6 这节课我们研究了曲线的哪些性质?推导这些性质我们用到了哪些数学思想方法?

生10:(知识)椭圆的几何性质:范围、对称性、顶点、离心率.对椭圆知识的学习过程:定义 $\rightarrow$ 方程 $\rightarrow$ 几何性质.

生11:(方法)经历由观察图形归纳出曲线的性质,再用曲线的方程证明曲线的性质,即运用代数方法(即坐标法)解决几何问题.

生12:(思想)数形结合、归纳猜想、类比法、函数与方程等.

设计意图 以回顾反思为契机,引导学生总结本节课的学习内容,深化知识的形成过程,完善认知结构,掌握研究的方法和思路,拓展思维角度,提高思维层次.

3.5 作业分层,因材施教

必做部分:课本第112页练习第1,2,3,4,5题.

选做部分:收集有关笛卡尔与解析几何、费马与解析几何的资料,了解与本节课有关的数学史知识,

撰写数学小论文.

设计意图 通过课后作业巩固本节课所学的知识和方法,并留下一个开放性的数学写作作业,让学习和探究延伸到课外,培养学生的创新意识,做到因材施教.

4 教学反思

4.1 基于数学方法论设计教学过程,渗透解析几何核心思想

数学家笛卡尔创立了平面直角坐标系,使得用代数方法(即坐标法)研究几何问题成为解析几何的核心思想.本节课从“观察椭圆 $\rightarrow$ 归纳椭圆的性质 $\rightarrow$ 运用方程论证猜想”这条主线出发设计教学,椭圆的所有几何性质都是先归纳再证明的,充分体现了椭圆的几何性质在“数”和“形”上的本质联系,让学生掌握利用代数方法研究几何图形的一般思路和方法.整个探究过程始终运用数形结合思想.正如华罗庚先生所说:“数缺形时少直观,形少数时难入微.”有了本次数学活动经验,学生可以自主探究双曲线和抛物线的几何性质.

4.2 基于数学方法论设计探究活动,改善学生数学抽象方法

林崇德教授在研究中国学生核心素养时提到:勇于探究,重点是具有好奇心和想象力;能不畏困难,有坚持不懈的探索精神;能大胆尝试,积极寻求有效的解决方法等.^[3] 本节课中,椭圆几何性质的得出,均先由学生自主思考或合作探究,然后教师适当点拨,最后由学生归纳总结形成.让学生参与知识发现、发生、发展的全过程,既培养了合作意识和交流表达能力,又加深了对知识的理解与记忆.而探究活动本身,促使学生自觉地融入数学抽象素养的提升过程之中.

4.3 基于数学方法论设计思维过程,发展学生直观想象水平

我国数学家徐利治先生在文章《谈谈我的一些数学治学经验》中提出“重视直观”:在科学研究中,我常常借助于由经验获得的直观能力,以猜测的方式去探索某些可能取得的成果.对学生来说,椭圆的离心率是一个全新的概念,这是本节课一个难点.为了突破这个难点,通过学生自己动手画出不同的椭圆,由图归纳出椭圆的“圆扁”程度与 a, b, c 中任意两者的比值有关,培养学生的归纳猜想能力.通过交流与合作,最后回归本质,抽象出离心率的概念.从概念层面看,丰富表征、完善结构,便于概念抽象;从思想方法看,以形助数、数形沟通,实现数形结合;从心理学角度看,用图思考、形象直观,有助于建立信心.

(下转第46页)

并据此开发了教学案例,以期为中学数学建模活动的开展提供参考.

参考文献

- [1] 宋乃庆,高鑫,陈珊.基础教育 STEAM 课程改革的路径探析[J].课程·教材·教法,2019,39(7):27-33.
- [2] 赵慧臣,陆晓婷.开展 STEAM 教育,提高学生创新能力——访美国 STEAM 教育知名学者格雷特·亚克门教授[J].开放教育研究,2016,22(5):4-10.
- [3] Maass K, Geiger V, Ariza M R, et al. The role of mathematics in interdisciplinary STEM education [J]. ZDM, 2019, 51(6):869-884.
- [4] 胡焱,蒋秋.数学教育与 STEM (STEAM) 教育的融合:机遇与挑战——基于数学教育与 STEM (STEAM) 教育国际学术研讨会[J].数学教育学报,2019,28(6):92-94.
- [5] 张辉蓉,冉彦桃. STEAM 教育理念落地:数学文化项目学习模式构建及案例开发[J].中国电化教育,2020(7):97-103.
- [6] 中华人民共和国教育部.普通高中数学课程标准(2017年版)[M].北京:人民教育出版社,2018:5.
- [7] 李明振,喻平.高中数学建模课程实施的背景、问题

与对策[J].数学通报,2008,47(11):8-10,14.

- [8] 章建跃,张艳娇,金克勤.数学建模活动的课程理解、教材设计与教学实施[J].中学数学教学参考,2020(13):13-19.
- [9] Kertil M, Gurel C. Mathematical Modeling: A bridge to STEM education [J]. International Journal of Education in Mathematics Science and Technology, 2016, 4(1):44-55.
- [10] 于戈.指向数学学科核心素养培养的 STEM 教育探索[J].中小学数字化教学,2019(10):18-21.
- [11] 宗琦,李琪. STEM 教育与高中数学建模融合的初步研究[C]//人民教育出版社人教数字教育研究院.数字教材·数字化教学——第四届中小学数字化教学研讨会论文案例集.[出版者不详],2020:145-151.
- [12] 林琳,沈书生.设计思维的概念内涵与培养策略[J].现代远程教育研究,2016(6):18-25.
- [13] 高海荣,黄振旭,李华敏.16种中国茶叶中茶多酚含量对比研究[J].食品研究与开发,2016,37(7):33-36.
- [14] 陈中峰.整体规划 分步实施——从“函数应用:停车距离问题”(第2课时)谈数学建模素养的培育[J].中国数学教育,2021(6):26-27.

(上接第32页)

4.4 基于数学方法论设计问题链,激发学生创新思维能力

著名数学家 P. Halmos 强调“问题是关键”,数学概念、定理、模型和应用都是在解决问题的过程中总结形成的.以问题链为载体的数学教学能在一定程度上促进教师课堂指导基础上的学生探究学习,使学生在明确知识内涵的基础上提高思维能力.因此,将数学方法论原理渗透在问题链教学中,用方法论指导数学问题链的设计,让学生从“学会”向“会学”转化.^[4]本节课在数学方法论的指导下,设计了一系列的问题链,将数学思想方法渗透到具体知识内容中,让学生不断地处于问题探究的过程之中.学生带着问题走进课堂,在课堂中不断提出新问题、解决新问题,最后又带着“新的问题”走出课堂,整个过程中数学方法论扮演了重要角色.

4.5 基于数学方法论营造和谐气氛,助推逻辑推理培育

逻辑推理是科学研究的核心素养,在数学教学中,逻辑推理素养的养成有利于学生理解数学结论的来龙去脉,形成举一反三的能力;有利于学生形成有论据、有条理、合乎逻辑的思维习惯.^[5]本节课把思考的时间留给学生,把提问的权力交给学生,把讲

解的机会留给学生,让学生经历概念形成的过程,促进学生主动地探究知识,在探究过程中提升了逻辑推理能力.

5 结束语

数学方法论为学生的思考与探索提供了理论基础,以数学方法论指引高中数学教学,要求每位教师在每堂数学课中渗透数学思想方法以培育学生数学核心素养,这一过程不是一蹴而就的,需要教师时刻关注并付出行动.

参考文献

- [1] 徐利治.数学方法论选讲(第三版)[M].武汉:华中理工大学出版社,2000:1.
- [2] 中华人民共和国教育部.普通高中数学课程标准(2017年版)[M].北京:人民教育出版社,2018:1-2.
- [3] 林崇德.中国学生核心素养研究[J].心理与行为研究,2017,15(2):145-154.
- [4] 龚含笑,唐恒钧.数学方法论指导下的数学问题链教学研究——基于“空间两点间的距离公式”教学探索[J].中学数学教学参考(上旬),2018(12):19-21.
- [5] 张月晴,何晓勤.基于学生核心素养的高中数学课堂教学——以“指数函数(第1课时)”为例[J].中国数学教育(高中版),2017(11):37-41.