

纸片类数学实验教学的实践与思考^{*}

李明树 (江苏省苏州工业园区东沙湖实验中学 215021)

摘要:教学中,通过嵌入纸片类数学实验,引导学生以手动、眼观、脑思的活动主线,能为学生提供操作、猜想、归纳、探究、讨论、推理的机会和空间.纸片类数学实验有四个方面的功效:优化学习方式;发展几何直观;促进经验积累;提升学生素养.

关键词:纸片类数学实验;案例;教学思考

文章编号:1004-1176(2022)07-0047-03

纸片类数学实验是学生通过动手动脑,以“做”为支架的数学教与学的活动方式,是在教师的引导下,借助“纸片”,通过平移、翻折、旋转、剪(拼)等操作,在认知与非认知因素参与下进行的一种理解数学知识、发现数学问题、探索与验证数学结论的思维活动.教学活动中,利用KT泡沫板、打印纸、透明胶片、半透明纸片、“电子纸片”等作为实验操作的素材,既贴近学生现实,又符合学生的认知水平;纸片类数学实验的介入既诠释了知识的发生、形成、发展的过程,又激发了学生主动探究问题的兴趣.纸片类数学实验可以优化学生的数学学习方式;发展学生的几何直观想象能力;促进学生数学活动经验的积累;达成提升学生数学素养的目标.

1 纸片类数学实验是优化学习方式的常用策略

借助纸片类数学实验,可以让学生获得如何探究、如何发现的方法感悟,实现接受式、思辨式学习向探究式、体验式学习的转变;学生经历动手操作、用眼观察、提出猜想、验证结论等环节,充分体验“知识从何而来”“知识是什么”“知识向何而去”的完整数学学习过程.

案例1 苏科版义务教育教科书《数学》八年级上册“2.5 等腰三角形的轴对称性”一课中,教材大致是这样安排的:学生经历折叠等腰三角形纸片,猜想、归纳等腰三角形的性质,探究证明猜想,尺规作图作等腰三角形,例题解析.整个过程流畅自然,但细细品味,又觉得似乎缺点什么,所折叠的等腰三角形从何而来?为何要折叠等腰三角形纸片?如何制作等腰三角形?故笔者进行了如下设计:

数学实验:

操作1

材料:一张长方形纸片、剪刀、直尺(直尺仅用于画线)、铅笔.

规则:只剪一刀得到一个等腰三角形.

操作2 材料:一张非等腰三角形纸片、剪刀、直尺(直尺仅用于画线)、铅笔.

规则:只剪一刀得到一个等腰三角形.

操作3 材料:一张不规则纸片(纸片边缘均是“曲线”)、剪刀、直尺(直尺仅用于画线)、铅笔.

规则:只剪一刀得到一个等腰三角形.

学生顺利地完成操作1和操作2,因为这两项操作的实验素材均为规则纸片,即纸片的边界为线段.故学生在线段的轴对称的基础上只需要折叠其中纸片的一边,从而折出了线段的垂直平分线,再利用线段垂直平分线的性质即可剪出一个等腰三角形.长方形纸片操作如图1:



图1

操作过程中显然得到了“双层”直角三角形,其一条直角边在第一次折痕上,折痕即为等腰三角形的对称轴.学生的学习过程把教材中静态的知识结果变为动态的知识的发生、发展过程,既回顾了线段的轴对称性的探究方法,又初步感受了等腰三角形的轴对称性,激发了进一步深度探究等腰三角形性质的欲望.非等腰三角形纸片剪裁与图1操作类似,而学生在尝试操作3时却屡次失败,折叠不规则纸片一次虽得到一条“对称轴”,但无法得到线段的垂直平分线(理由是纸片边缘均是“曲线”),自然无法得到“双层”直角三角形,原实验规则不可行,从而激发学生改变实验规则来达成实验目标.具体操作如图2.

学生在操作1和2的过程中获得了一定的数学活动经验,会惯性地用所获得的经验探索操作3,尝试未果后,会主动思考为何失败,于是其在“尝试、失

^{*} 本文系江苏省教育科学“十三五”规划2020年度普教重点自筹课题“初中数学实验常态化教学的行动研究”(编号:B-b/2020/02/114)、江苏省教学科学“十三五”规划2020年度普教重点资助课题“初中数学实验教学支持系统的构建研究”(编号:B-a/2020/02/42)、江苏省教育科学“十四五”规划课题“初中数学实验教学的校本资源开发与实践研究”(编号:D/2021/02/764)的研究成果.

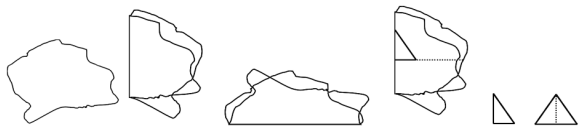


图2

败、再尝试”的反复循环中经历操作、猜想、再操作的学习过程,逐步在解决问题的喜悦中明白问题的原理和本质.

案例2 折纸——探索角平分线性质

苏科版义务教育教科书《数学》八年级上册“2.4 角的轴对称性”大致安排如下:(1)沿 $\angle AOB$ 的角平分线 OC 翻折,得到角的轴对称性的结论;(2)在 $\angle AOB$ 的角平分线 OC 上任取一点 P ,分别画点 P 到 OA, OB 的垂线段 PC, PD , PC 和 PD 相等吗? 学生经历操作、猜想,再运用图形运动的方法,利用角的轴对称性,证明 $PC = PD$.

促进学生的思维发展,是数学教育的重要任务之一.传统的数学教学中,教师注重知识的系统性和逻辑的严谨性,学生主要是记住数学结论,然后进行题海式的训练.这样的教学,并不利于学生的思维发展.^[1]教材内容的设置虽体现了学生操作、猜想、验证的学习过程,但对角平分线性质的本质理解似乎还不够“立体”,于是笔者在教学中进行了如下尝试:

数学实验 任取一张三角形纸片,按照图3所示的方法折叠.

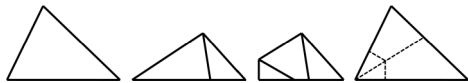


图3

数学建模 还原纸片,画出几何图形(图4).

数学归纳 归纳猜想,你能获得什么结论?

结论:角平分线上的点到角的两边的距离相等.

数学推理 (略)

数学表达 因为 BD 是 $\angle ABC$ 的角平分线, $PE \perp BC, PF \perp AB$, 所以 $PE = PF$.

纸片类数学实验是“做数学”的具体实施形态之一,是教师引导学生经历探索过程,发现数学结论和寻找证明方法的一种学习方式.案例1、2将动手操作、用眼观察、动脑思考有机地结合在一起,通过外部实践和操作的数学实验活动促进学生思维的发展.实验前、实验中、实验后均对学生学习方式的优化和思维的发展提供了优良的学习环境,同时为学生创造性思维的培育提供了空间.

2 纸片类数学实验是发展几何直观的重要载体

《义务教育数学课程标准(2011年版)》(以下简

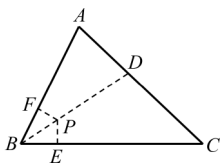


图4

称《标准》)提出,在数学课程中应当注重发展学生的几何直观.几何直观主要是指利用图形描述和分析问题.借助几何直观可以把复杂的数学问题变得简明、形象,有助于探索解决问题的思路,预测结果.几何直观可以帮助学生直观地理解数学,在整个数学学习过程中都发挥着重要作用.^[2]《普通高中数学课程标准(2017年版)》也明确提出,直观想象是数学学科六大核心素养之一.直观想象是指借助几何直观和空间想象感知实物的形态和变化,利用空间形式特别是图形,理解和解决数学问题的素养.主要包括:借助空间形式认识事物的位置关系、形态变化与运动规律;利用图形描述、分析数学问题;建立形与数的联系,构建数学问题的直观模型,探索解决问题的思路.^[3]透明打印胶片作为实验素材参与图形的探究,可以直观地显现图形的组成,动态或静态地呈现图形的结构、数量关系,有助于发展学生的几何直观.

案例3 (苏州工业园区

2020—2021 学年初三数学模拟试卷第18题)如图5,是小明家客厅地面铺设的瓷砖图案,其中四边形 $ABCD$ 是正方形,阴影部分是四个全等的菱形,且点 A, E, F 在同一条直线上.已知菱形较短的对角线长为 20 cm ,则正方形 $ABCD$ 的面积为 $\underline{\hspace{2cm}}\text{ cm}^2$.

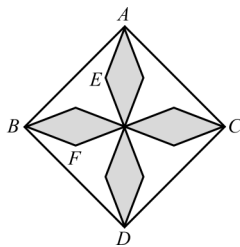


图5

此题是基于生活(图6)而被“设计”出来的,图形结构丰富、元素关系复杂、解法多元、思维强度大.解决此题时,选取透明打印胶片作为实验的工具.事先将原图打印在透明打印胶片

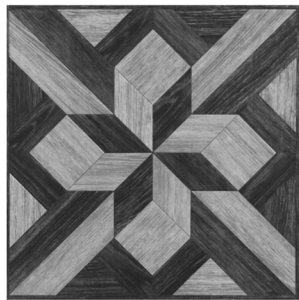


图6

上,通过透明打印胶片的折叠、与原图的叠放、旋转等发现对称性、特殊点,再从定性分析到定量计算;设计更为复杂、美丽的图案,使学生感受图案的设计与数学知识是密不可分的,体验的过程提高了学生综合运用数学知识、思想、方法解决真实情境问题的能力.罗丹说过:“生活中不缺少美,缺少的是发现美的眼睛.”而生活中不能缺少数学,因为数学可以让我们知道美在何处.

案例4 折正多边形结

数学实验 用长方形纸片按照图7的方式打结、拉紧、压平,折出的“五边形”是正五边形吗?

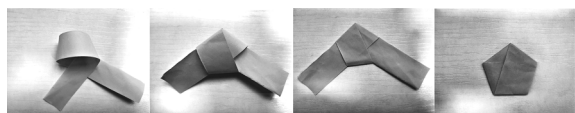


图 7

数学思考 各边相等、各角相等的五边形是正五边形.你能证明你的发现吗?

上述操作中,中学生很难画出相应的几何图形,基本是画出图形的轮廓(图8).不透明的长方形纸片在打结、拉紧、压平之后,重叠部分看不到了,这就给作图带来了障碍;用透明长方形纸片重复操作发现“图形的风骨清晰可见”(图9),看得见的线条用实线,看不见的线条用虚线,可以画出相应的几何图形(图10).

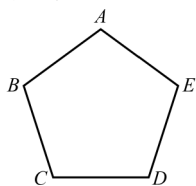


图 8

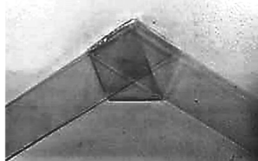


图 9

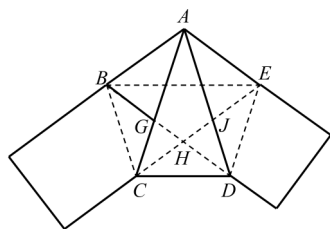


图 10

几何直观所指有两点:一是几何,即图形;二是直观,不仅仅局限于“看得到的东西”(实物),更重要的是要依托现在“看得到的东西”(实验操作)和以前“看得到的东西”(已有经验)进行思考、想象.综合起来,这在本质上是一种通过图形所展开的想象能力.几何直观的培养需要以透明纸片为素材经历数学实验中的体验、抽象,使数学的研究对象变得“看得见、摸得着”.

3 纸片类数学实验是促进经验积累的关键手段

《标准》在教学建议中指出:“数学活动经验的积累是提高学生数学素养的重要标志.帮助学生积累数学活动经验是数学教学的重要目标,是学生不断经历、体验各种数学活动过程的结果.数学活动经验需要在‘做’的过程和‘思考’的过程中积淀,是在数学学习过程中逐步积累的…….”^[2]笔者认为纸片类数学实验是积累数学活动经验的有效途径,可以促进不断经历知识的来龙去脉,是对知识的真探究,形成了真能力,积累并丰富了数学活动经验.

案例 5 含 30° 角的直角三角形的性质

数学实验 1 折一个含 30° 角的直角三角形

用一张正方形纸片,按如图 11 所示的方式折叠,找出含 30° 的直角三角形,并说明理由.

数学实验 2 探索 30° 角的直角三角形的性质

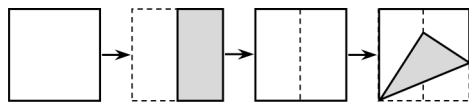


图 11

剪下图 11 中含 30° 角的直角三角形纸片,按图 12 所示的方式折叠,完成对其性质的探究.

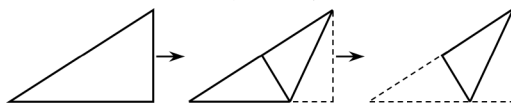


图 12

教师引导学生完成数学猜想、数学建模(画出图 13)、数学证明、数学归纳、数学表达:“第一次数学活动中获得原初经验;第二次遇到相同情景时,经验再现,称为再生经验;再次遇到类似情景时,迁移运用先前经验,产生再认识经验;在形式不同本质一样的新情况下,按照‘模式’重复运用这种经验时,这种经验就成为概括性经验”^[4].

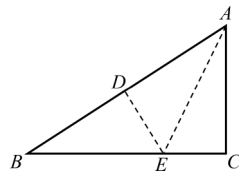


图 13

4 纸片类数学实验是达成提升学生素养目标的有效途径

2014 年教育部在发布的《关于全面深化课程改革,落实立德树人根本任务的意见》中提出了发展核心素养.2018 年教育部颁布的《普通高中数学课程标准(2017 年版)》中,把数学核心素养定义为“学生应具备的、能够适应终身发展和社会需要的、与数学有关的思维品格和关键能力”,并明确了数学抽象、逻辑推理、数学建模、数学运算、直观想象和数据分析等数学核心素养要素.新课程改革对数学教育提出的目标要求经历了“双基目标”“三维目标”“四基四能”“数学核心素养”的过程,这些目标的达成主要是要学生亲自参与其中,需要学生的独立思考和深刻感悟,在发展能力的同时,品格和观念也得到相应的发展.“纸片类数学实验”极大地激发了学生的学习兴趣,调动了学生的学习热情,引起了学生的好奇心,使学生以积极的态度投入实验探究的活动中.

参考文献

- [1] 董林伟.“做数学”:中小适合教育的实践构建[J],教育研究与评论,2021(3):16-21.
- [2] 中华人民共和国教育部.义务教育数学课程标准(2011 年版)[M].北京:北京师范大学出版社,2012:6.
- [3] 中华人民共和国教育部.普通高中数学课程标准(2017 年版)[M].北京:人民教育出版社,2018:6.
- [4] 仲秀英.促进学生积累数学活动经验的教学策略[J].数学教育学报,2010,19(5):36-39.