

整体建构视角下概念教学实践与思考

——以“函数”教学为例

王 明（江苏省昆山市第二中学 吴海宁初中数学名师工作室 215316）

摘 要：整体建构视角下数学概念教学实践，通过建构学生生长情境，由主线引领知识发展，在此探索过程中，渗透数学思想方法，追求核心概念的教学价值。文章以“函数”教学为例，阐述如何从学生已有经验出发，建构函数生长情境，让函数概念自然生成，促进学生思维的碰撞，实现师生共同发展。

关键词：情境；概念教学；函数

文章编号：1004-1176(2022)05-0025-03

《义务教育数学课程标准(2011 年版)》(以下简称《课标》)提出:数学知识的教学,要注重知识的“生长点”与“延伸点”,把每堂课教学的知识置于整体知识的体系中,注重知识的结构和体系,处理好局部与整体知识的关系,引导学生感受数学的整体性.其中,数学概念形成是以学生的直接经验为基础用归纳的方法抽取出一类实物的共同属性,从而达到对概念的理解.因此,我们在日常数学教学活动中必须基于学生已有知识经验,找到知识生长点,设计好生长架构,规划好生长路径,攀登思维生长高点,改变我们过去课堂教学中“课时孤立化”“知识碎片化”“方法技巧化”的现象.笔者在一次市级展示课活动中执教了一节苏科版八年级上册第六章第 1 节“函数”的概念课,回顾此次活动历程,将教学备课、教学实施及反思整理成文,与同行分享.

1 关于备课的一些思考

1.1 学情分析

八年级学生具备一定的逻辑推理能力和归纳提炼能力,但对现实问题的抽象能力仍处于低思维层次.因此,基于教材整体案例,深度挖掘素材的价值,通过情境问题的创设,埋下具有生命力的思维种子,逐步培养学生认知能力和思维能力.

1.2 备课思考

概念生成是概念学习的一个重要历程,是思维形成过程中的复杂一环,需要用情境的创设和问题的驱动来达成.如何引导学生从生活实际出发设置新问题,展开知识的生长和思维的彰显,从而培养学生的思维能力?基于以上思考,本节课从学生熟悉的情境入手,让学生通过活动讨论提炼概念属性,归纳概括出函数概念.在过程经历中,学生探索新知,体悟思想方法,深化对知识的整体理解与运用,从而培养学生自主学习能力.

2 教学实践

2.1 情境初探,抛砖引玉

情境 1 从上海到苏州,在某一段匀速行驶的高铁上,几位同学谈论着关于车速、路程和时间因素的数量变化和位置变化话题.请大家猜猜,他们会说些什么?

学生经过讨论,汇总如下结论:列车的行驶速度不变;甲乙两地的路程不变;列车行驶的时间不断变化;列车离甲乙两地的路程不断变化.

追问:上述结论中,大家发现有哪些是描述数学中与“量”有关的词语呢?

生:“不变”“变化”.

师生归纳生成,“不变”即常量:在某一变化过程中,数值保持不变的量;“变化”即变量:在某一变化过程中,可以取不同数值的量.

教学分析 从高铁行驶背景出发,结合学生熟知的路程、时间与速度的关系,唤醒其认知,寻找关键词,进而归纳生成常量和变量的概念,为后续问题情境的学习作好铺垫.设计的情境低起点、宽入口,问题设置能聚焦学生的课堂注意力,引发学生学习兴趣和讨论,点明接下来的课堂生长与发展将基于“某一变化过程”,围绕着“常量”和“变量”展开.

2.2 情境深入,探索属性

情境 2 学校打算用 16 m 长的篱笆围成长方形的生物园来饲养小兔.

(1)当一边长是 1 m 时,另一边长是多少?

(2)当一边长是 2 m 时,另一边长是多少?

(3)当一边长分别是 3,4,⋯,7,8 m 时,另一边长呢?

追问 1:通过上述计算,大家思考一下用什么方式能比较清晰地描述上述问题?你是怎么想到的?

生:可以列一个表格汇总,因为表格可以把分散

的数据汇总在一起,看起来不凌乱.

(4)再算一算上述问题情境下,长方形的面积分别是多少?(表 1)

表 1								
一边长	1	2	3	4	5	6	7	...
另一边长	7	6	5	4	3	2	1	...
面积	7	12	15	16	15	12	7	...

(5)在上述变化过程中,哪些是常量?哪些是变量?它们之间有什么关系?

追问 2:若一边长记为 x ,另一边长记为 y ,面积记为 S ,则 y , S 两者与 x 之间有什么关系?

学生回答: $y=8-x$, $S=x(8-x)=8x-x^2$.

教学分析 通过问题串的设计,学生根据情境从具体计算入手,从数量变化中体会“变化”这一特征和从每一次变化中体会“唯一”和“对应”.追问 1 对学生处理大量数据提出了较高的要求,但通过最近联想区可使用表格的方式罗列解决,学生能够尝试画出表格,通过观察、对比,深入感知“对应”与“唯一”,这也是对学生数学素养能力的一种要求.问题(5)是对问题(1)~(4)的提升和归纳,思辨上述问题中的变量与常量以及它们之间的数量关系,尝试探索概念属性.追问 2 将变量抽象化,用字母代替,从代数表达式的角度进一步让学生体悟变量间的“对应关系”,厘清问题发展方向;用字母表示数,从具体到抽象.此处情境问题串的设计有效建构出概念的属性,为后续学生归纳提炼概念埋下伏笔.在整个关联知识体系中,此处设计为本节课的核心,是知识生长源,也是课堂教学的重难点,因此把握好此处情境教学,体现知识内在联系,建构函数概念的“骨架”,能让学生对函数概念有一个初步整体的认识和感受.

情境 3 在平静的水盆中投下一石子,便会形成以落点为圆心的一系列圆.在这一变化过程中,哪些是变量?它们之间有什么关系?

生:变量有圆的半径、圆周长、圆面积;关系是 $C=2\pi r$, $S=\pi r^2$.

教学分析 通过观察图形,结合生活实际经验,基于抽象思维层次寻找变量和常量,从中抽象出两个变量(周长和半径或者面积和半径)之间的关系.让学生结合自身已有经验,模仿表 1,通过合作讨论探索数量关系,从抽象到具象地再次体会“对应”和“唯一”的本质属性;在水波不断扩张(变化过程中)的情况下,当半径变化时,周长或面积也随之变化;当半径确定时,周长或面积也随之唯一确定.通过活动体会半径是引起周长和面积变化的“主动因素”,也为函数“自变量”“因变量”的引入设好铺垫.从抽

象到具体以深刻体验的方式呈现给学生,揭示函数概念的本质属性,加深“变量说”对应关系的理解.

2.3 模型探索,生成概念

问题 1 表 1 中的长方形边长之间的关系、面积与边长之间的关系,水滴激起的波纹问题中周长与半径、面积与半径的关系,这些问题有哪些共同属性?

教学分析 让学生讨论总结,初步归纳函数本质属性:①一个变化过程;②有两个变量;③当其中一个量变化时另一个量随之变化,当一个量确定时另一个量也随之确定,即“唯一对应”.

问题 2 你还能举出一些与上述有共同属性的实际问题的例子吗?像这样的例子举得完吗?

追问:有必要对这类新事物引入一个新的概念吗?如有,该如何描述?

教学分析 对事物属性有初步认识后,尝试寻找周围具有相同或类似属性的实例,来体悟数学概念生成的必要性和必然性.将举例安排在概念生成之前,目的是让学生弄清函数模型的内涵和外延,使函数本质在学生头脑中更加深刻,为生成概念作好充分准备.进一步,如何描述函数的概念?由于前面有铺垫、有“情境问题”的共识、有“举例子”的经验,其实函数模型的本质已为学生所熟悉,此时让学生给模型下定义就容易多了.但要引导学生用较简洁、精准的语言来描述概念绝非易事.“该如何描述”需要师生共同探讨,当教师引导学生说出用“符号化的思想”^[2]分别给两个变量起名字后,函数概念自然而然能被阐述清楚,余下就是函数概念的“延伸点”,即核心要素的分析与强化以及在实际情境中辨析概念的基本规范.

2.4 情境欣赏,学以致用

例 1 如图 1,搭 1 条小鱼需要 8 根火柴棒,每多搭一条小鱼需要多 6 根火柴棒,如果搭 n 条小鱼需要 S 根火柴棒,那么 S 是 n 的函数吗?为什么?



图 1

例 2 表 2 中 y 是 x 的函数吗?为什么?

表 2							
x	1	2	3	4	5	6	...
y	12	6	4	3	2.4	2	...

例 3 图 2 中温度 T 是时间 t 的函数吗?为什么?

教学分析 三个例题的设计让学生从不同角度

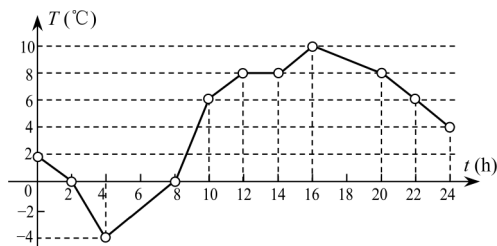


图 2

再次辨析函数的概念,体悟函数的三种表达形式:解析式,表格,图象.这样的整体设计让学生能系统而全面地体悟函数模型的多样性,从具象到抽象实现认识提升,符合八年级学生的认知规律,通过概念的应用,形成概念判断的“操作程序”和“思考路径”,是一次新的概括能力的提升.学生在不断体会和提炼的过程中逐渐内化概念,整体设计又拉长了其思维长度,从而提升课堂的效度.

2.5 归纳总结,体悟思想

总结回顾,谈谈你收获了哪些知识?经历了今天的学习过程,你体会到了什么数学思想方法?

教学分析 让学生回顾教学过程,厘清学习主线:情景问题—探索属性—举一反三—生成概念—辨析提升.通过自我归纳,自我建构知识体系,让学生从点到线、从局部到整体形成一种认知模式下的思维方式,从中体会由特殊到一般、抽象化和整体建构的思想.通过这样的生长教学和深度思考,促使学生的思维水平向高层次发展,而提升学生的数学核心素养.

3 教学思考

3.1 关注结构生长,彰显本质属性

数学知识的形成、发展和应用是有内在联系的,是基于数学体系,在知识板块结构上生成与发展的.概念教学的核心是“概括”^[3],在数学实践中要引导学生展开分析各种事例属性,抽象概括共同本质属性,归纳提炼数学概念.因此,教师在进行教学设计时要从系统观和整体观视角出发,在学生已有知识经验的基础上,在学生熟悉的情境中创设新问题、提出新观点,对教学素材进行合理的重构,溯源求新,让知识能够自然生长.

细节决定成败.概念教学过程必须“通俗化”“深加工”“精致化”.本节课通过学生熟知的行程问题,探索路程、速度、时间反映出的不变量和变化量,提炼“常量”和“变量”的概念,在此基础上,由学生熟悉的“饲养小兔”问题,到水波中周长与半径、面积与半径的关系,创设新问题串,由浅入深,逐步引导,辨析常量与变量,并进一步挖掘变量间的关系,探索“变化过程”“两个变量”“唯一对应”这些函数属性,逐步

生成函数概念(函数模型).通过内容环节的环环相扣,将抽象知识的来龙去脉阐述清楚,揭示知识的本来面目,即在二元方程概念下的新认知和新视角.

3.2 关注主线引领,蕴涵数学思想

《课标》指出,在教学实施中“数学思想蕴涵在数学知识形成、发展和应用的过程中,是数学知识和方法在更高层次上的抽象和概括.学生在积极参与与教学活动过程中,通过独立思考、合作交流,逐步感悟数学思想.”教师在教学中一般会有一条主线来引领,较常见的是知识主线、探索主线,这些是知识生长的明线^[4].此外,教师更要关注暗线贯穿,即知识背后涉及的数学思想方法的引领.在学习数学知识的基础上,引导学生聚焦问题生成,感受知识生长,从过程中体悟数学思想(特殊到一般,符号抽象),激发学生深度思考,促进思维生长.基于学生已有学习经验创设情境,在学生熟知的背景下建构老情境下的新问题,这更加容易获得经验.对新知识从接触到消化,更有亲切感,更加轻车熟路,能更好地帮助学生进一步理解数学知识,体会其中蕴涵的数学思想.长方形生物园的情境在七年级时已经接触过,在这里从具体数据的运算入手,引导学生归纳整理数据,通过观察、讨论、类比,得出变量间的关系式.情境创设中蕴涵了“特殊到一般”的数学思想,教学中需要层层引导,让学生有深入体会.

经历从特殊到一般的探索过程后函数概念的属性渐渐浮出水面,需要用简洁的语言来描述和概括,这是数学知识在不断更新发展过程中必然要经历的进程,必然促使学生知识的自然重构.那就需要对具体事物情境进行抽象,以引导学生更好地表述概念.对于两个变量,在哪一个主动变化下另一个随之变化,引导学生用抽象思维的“字母符号化”给两个变量起名字,这样就能将问题表达清楚,函数概念就完美呈现出来了.而在情境2的追问中,“一边长记为 x ,另一边长记为 y ,面积记为 S ”,已经为两个变量的“符号抽象化”设好铺垫.

3.3 关注探索过程,培养整体意识

把握教材整体性,对内容的系统结构了如指掌,做到心中有“联络图”,才能把握教学的大方向,教学才能有的放矢.情境问题的设计是在整体建构视角与微观课时设计有效结合后作出的综合决策.数学知识并非孤立存在,而是在已有知识体系中,通过动态创新、深入学习后产生的正向迁移,因此要注重探索过程的体悟.问题串的设计要环环相扣、层层推进,在探究过程中让学生积极思考.学生获得结论后,

(下转第31页)

中学生围绕某个问题开展系列的动手操作、实验、归纳等实践活动,化动态为静态、化抽象为具体,感悟数学的基本思想.本节课中利用砝码和细绳探索旋转的基本概念和旋转的三要素,利用半透明硫酸纸进行旋转性质的探索环节的设计和实验.实验材料的易获取性使得学生能够在课堂有限的时间后,利用课后时间进一步设计实验方案并探索,培养学生通过实验的设计和实验操作发展解决问题的能力.

3.2 紧扣主体性和交互性,让学生在主动学习中探索

“做数学”理念下课堂的主体是学生,知识、技能和能力的获得最终都需要学生自我内化.因此,整个课堂教学紧密围绕学生的实践活动展开,无论是旋转的概念还是旋转性质的归纳,都需要学生动手操作,在进一步的发现、归纳中获得知识.整个课堂中教师起到主导作用,并确保学生的主体性,引导学生探究旋转的研究路线和确定实验方法;修正或改进学生提出的方案.在旋转性质探究过程中,线段旋转的旋转中心的确定就需要教师不断引导学生思考,探究旋转中心位置的几种可能性,不断完善旋转性质探究的实验方案.

3.3 着眼开放性和育人性,让素养在数学研究中发展

“做数学”视域下的课堂预设是多元的,允许学生各抒己见,也容许学生“犯错”.学生不同想法的大胆表达往往能够激发大家思考,进而发展学

(上接第 27 页)

让其展示思维路径,巩固基础的同时体会思维带来的成就感,使其能够更加积极地探索问题.通过设问和追问促进学生对知识的理解和建构、迁移运用和问题解决,获得深度感悟,形成整体视角下的认识提升.

函数概念是在整个关联知识体系中较为核心的一个概念.教学中不仅要关注其生长由来,还要将其置入各种情境中.例如,情境 2 中表格的设计为后续学习函数图象作铺垫;解析式生成的一次函数、正比例函数、二次函数、反比例函数等,为后续进一步学习函数知识做好充分预设.例题辨析中的 3 个类型包含了三种函数的表达形式,从整体上布局了概念的全面解读和运用.这样一番学习和体悟过程,能让学生感受函数家族的整体性,促使学生逐步形成整

生的创新思维,学生在交流过程中发现数学本质.在本节课中,探究旋转的性质的过程中应设置多种预设,满足学生开放性探索的需求,特别是在探究三角形旋转时,旋转的过程中到底有哪些变化的量、哪些不变的量,都需要学生不断发现和归纳.

课堂教学不仅仅是为了帮助学生获取数学原理和知识,更应关注学生关键能力的提升和认识世界的一般方法的掌握,这正是育人性的体现.本节课不仅关注旋转概念和性质的探究,还通过实验活动引导学生梳理研究图形运动的一般路径,把握知识的整体脉络,体会数学研究的一般方法.整个课堂需紧密围绕学生自主设计实验方案并动手实践,达成知识体系的建构和能力的提升,实现课堂角色的“翻转”,实现数学价值和思维的发展,发展学生的数学学科的关键能力和核心素养.

参考文献

[1] 刘佳. Hands-on(动手做)在小学数学学习中的运用[D]. 上海师范大学, 2012: 11-13.

[2] 中华人民共和国教育部. 义务教育数学课程标准(2011 年版)[M]. 北京: 北京师范大学出版社, 2012: 4-6.

[3] 董林伟, 石树伟. 做数学: 学科育人方式的实践创新[J]. 数学通报, 2021, 60(4): 22-24, 62.

[4] 章建跃. 中学数学课程论[M]. 北京: 北京师范大学出版社, 2011: 98-99.

体视角下考虑问题的格局.

综上所述,教师在创设生长情境,关注知识的发展必然性和价值性的同时,也要关注数学思想方法的渗透和整体视角的教学观,更要关注学生自主学习能力的培养与核心素养能力的提升.

参考文献

[1] 董林伟. 数学实验在概念教学中的运用[J]. 数学通报, 2015(8): 24-27.

[2] 卜以楼. 生长数学: 卜以楼初中数学教学主张[M]. 西安: 陕西师范大学出版社, 2018: 239-254.

[3] 章建跃. 数学教育随想录(下卷)[M]. 浙江: 浙江教育出版社, 2019: 677-678.

[4] 张越飞. 主线统领, 方法植入, 方向引导[J]. 中学数学教学参考(中旬), 2021(7): 14-16.