圆锥曲线涉及几条直线斜率的两个定值

山东省诸城第一中学 262200 薛新灵
山东省邹平双语学校 256200 姜坤崇

【摘 要】 圆锥曲线以其优美的身姿及蕴涵的难以穷尽的性质吸引着众多数学家及数学爱好者的目光.本文给出笔者新发现的它涉及三(或两)条直线斜率的两个定值性质,以飨读者.

【关键词】 圆锥曲线;斜率;定值

圆锥曲线以其优美的身姿及蕴涵的难以穷尽的性质吸引着众多数学家及数学爱好者的目光,对圆锥曲线的研究没有终点.本文给出笔者新发现的它涉及三(或两)条直线斜率的两个定值性质,以飨读者.

设 M,N 是圆锥曲线 Γ 一条对称轴上的两个定点, PQ 是 Γ 过 M 的弦,则三直线 PQ,NP,NQ(或两直线 NP,NQ)的斜率之间有如下介绍的若干定理中的两个定值.

定理 1 给定椭圆 $\Gamma:\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$, $M(m,0)(m\neq\pm a)$, $N(n,0)(n\neq m)$ 是 x 轴上的两个定点,过 M 引不与 x 轴重合的直线交 Γ 于 P,Q 两点,记 k_{PQ},k_{NP},k_{NQ} 分别为直线 PQ,NP,NQ 的斜率(以下同),则

(1) $k_{PQ}\left(\frac{1}{k_{NP}}+\frac{1}{k_{NQ}}\right)$ 为定值 $\frac{2(a^2-mn)}{a^2-m^2}$;

(2) 当 $n=\pm a$ 时 $k_{NP}\cdot k_{NQ}$ 为定值 $\frac{b^2(m\pm a)}{a^2(m\mp a)}$.

证明 (1) 将 Γ 的方程变形为

$$b^2(x-n)^2+a^2y^2+2b^2n(x-n)+b^2(n^2-a^2)=0. \quad ①$$

设直线 PQ 的方程为 $y=k(x-m)(k=k_{PQ},k\neq0)$,变形得 $\frac{y-k(x-n)}{k(n-m)}=1$,代入①式得

$$b^2(x-n)^2+a^2y^2+2b^2n(x-n)\cdot\frac{y-k(x-n)}{k(n-m)}+b^2(n^2-a^2)\cdot\left[\frac{y-k(x-n)}{k(n-m)}\right]^2=0,$$

化简整理得 $b^2k^2(a^2-m^2)(x-n)^2-2b^2k(a^2-mn)(x-n)y-[a^2k^2(m-n)^2+b^2(n^2-a^2)]y^2=0$,上式两边同除以 y^2 得 $b^2k^2(a^2-m^2)t^2-2b^2k(a^2-mn)t-a^2k^2(m-n)^2-b^2(n^2-a^2)=0\left(其中 t=\frac{x-n}{y}\right)$.

设 $P(x_1,y_1)$, $Q(x_2,y_2)$,则由点 P,Q 的坐标既满足 Γ 的方程又满足直线 PQ 的方程知 $\frac{1}{k_{NP}}=\frac{x_1-n}{y_1}$, $\frac{1}{k_{NQ}}=\frac{x_2-n}{y_2}$ 是以上关于 t 的二次方程的两个根,由韦达定理得

$$\frac{1}{k_{NP}}+\frac{1}{k_{NQ}}=\frac{2b^2k(a^2-mn)}{b^2k^2(a^2-m^2)}=\frac{2(a^2-mn)}{k(a^2-m^2)},$$

$$\frac{1}{k_{NP}}\cdot\frac{1}{k_{NQ}}=\frac{a^2k^2(m-n)^2+b^2(n^2-a^2)}{b^2k^2(m^2-a^2)}. \quad ②$$

所以, $k_{PQ}\left(\frac{1}{k_{NP}}+\frac{1}{k_{NQ}}\right)=\frac{2(a^2-mn)}{a^2-m^2}$.

(2) 当 $n=\pm a$ 时,由②式知 $k_{NP}\cdot k_{NQ}$ 为定值 $\frac{b^2(m\pm a)}{a^2(m\mp a)}$.

推论 给定椭圆 $\Gamma:\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$, $M(m,0)(m\neq\pm a,m\neq0)$, $N\left(\frac{a^2}{m},0\right)$ 是 x 轴上的两个定点,过 M 引不与 x 轴垂直和重合的直线交 Γ 于 P,Q 两点,则

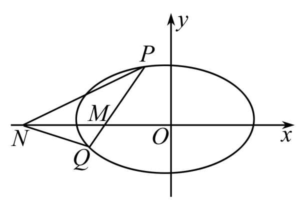

图 1

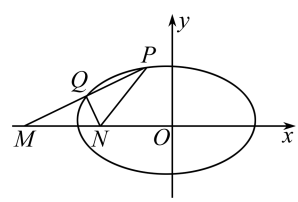

图 2

(1) 当 M 在 Γ 的焦点所在区域时, $\angle PNM=\angle QNM$;

(2) 当 M 在 Γ 的非焦点所在区域时, $\angle PNM+\angle QNM=180°$.

证明 因为 $n=\frac{a^2}{m}$,所以由定理 1(1) 的结论知 $k_{PQ}\left(\frac{1}{k_{NP}}+\frac{1}{k_{NQ}}\right)=0$,即 $k_{NP}=-k_{NQ}$,于是,当 M 在 Γ 的焦点

所在区域时(如图 1)有 $\angle PNM = \angle QNM$;当 M 在 Γ 的非焦点所在区域时(如图 2),$\angle PNM + \angle QNM = 180°$.

定理 2　给定椭圆 $\Gamma: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1(a > b > 0)$, $M(0,m)(m \neq \pm b)$,$N(0,n)(n \neq m)$ 是 y 轴上的两个定点,过 M 引不与 y 轴重合的直线交 Γ 于 P,Q 两点,则

(1) $\frac{k_{NP} + k_{NQ}}{k_{PQ}}$ 为定值 $\frac{2(b^2 - mn)}{b^2 - m^2}$;

(2) 当 $n = \pm b$ 时,$k_{NP} \cdot k_{NQ}$ 为定值 $\frac{b^2(m \mp b)}{a^2(m \pm b)}$.

证明　(1) 将 Γ 的方程变形为 $b^2x^2 + a^2(y-n)^2 + 2a^2n(y-n) + a^2(n^2-b^2) = 0$.　③

设直线 PQ 的方程为 $y - m = kx(k = k_{PQ})$,变形得 $\frac{(y-n)-kx}{m-n} = 1$,代入③式得 $b^2x^2 + a^2(y-n)^2 + 2a^2n(y-n) \cdot \frac{(y-n)-kx}{m-n} + a^2(n^2-b^2) \cdot \left[\frac{(y-n)-kx}{m-n}\right]^2 = 0$,化简整理得,$a^2(b^2-m^2)(y-n)^2 - 2a^2k(b^2-mn)x(y-n) - [a^2k^2(n^2-b^2) + b^2(m-n)^2]x^2 = 0$,上式两边同除以 x^2 得,$a^2(b^2-m^2)t^2 - 2a^2k(b^2-mn)t - a^2k^2(n^2-b^2) - b^2(m-n)^2 = 0$(其中 $t = \frac{y-n}{x}$).

设 $P(x_1,y_1)$,$Q(x_2,y_2)$,则由点 P,Q 的坐标既满足 Γ 的方程又满足直线 PQ 的方程知 $k_{NP} = \frac{y_1 - n}{x_1}$,$k_{NQ} = \frac{y_2 - n}{x_2}$ 是以上关于 t 的二次方程的两个根,由韦达定理得

$$k_{NP} + k_{NQ} = \frac{2k(b^2 - mn)}{b^2 - m^2},$$

$$k_{NP} \cdot k_{NQ} = \frac{a^2k^2(n^2-b^2) + b^2(m-n)^2}{a^2(m^2-b^2)}. \quad ④$$

所以,$\frac{k_{NP} + k_{NQ}}{k_{PQ}} = \frac{2(b^2 - mn)}{b^2 - m^2}$.

(2) 当 $n = \pm b$ 时,由④式知 $k_{NP} \cdot k_{NQ}$ 为定值 $\frac{b^2(m \mp b)}{a^2(m \pm b)}$.

推论　给定椭圆 $\Gamma: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1(a > b > 0)$,$M(0,m)(m \neq \pm b, m \neq 0)$,$N\left(\frac{b^2}{m}, 0\right)$ 是 y 轴上的两个定点,过 M 引不与 y 轴垂直和重合的直线交 Γ 于 P,Q 两点,

(1) 当 M 在 Γ 的焦点所在区域时,$\angle PNM = \angle QNM$;

(2) 当 M 在 Γ 的非焦点所在区域时,$\angle PNM + \angle QNM = 180°$.

证明从略.

仿照定理 1,2 及其推论的证明,可以给出双曲线中如下两个定理及其推论的证明(限于篇幅,证明从略):

定理 3　给定双曲线 $\Gamma: \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1(a > 0, b > 0)$,$M(m,0)(m \neq \pm a)$,$N(n,0)(n \neq m)$ 是 x 轴上的两个定点,过 M 引不与 x 轴重合的直线交 Γ 于 P,Q 两点,则

(1) $k_{PQ}\left(\frac{1}{k_{NP}} + \frac{1}{k_{NQ}}\right)$ 为定值 $\frac{2(a^2 - mn)}{a^2 - m^2}$;

(2) 当 $n = \pm a$ 时 $k_{NP} \cdot k_{NQ}$ 为定值 $\frac{b^2(a \pm m)}{a^2(a \mp m)}$.

推论　给定双曲线 $\Gamma: \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1(a > 0, b > 0)$,$M(m,0)(m \neq \pm a, m \neq 0)$,$N\left(\frac{a^2}{m}, 0\right)$ 是 x 轴上的两个定点,过 M 引不与 x 轴重合的直线交 Γ 于 P,Q 两点,

(1) 当 M 在 Γ 的焦点所在区域时,$\angle PNM = \angle QNM$;

(2) 当 M 在 Γ 的非焦点所在区域时,$\angle PNM + \angle QNM = 180°$.

定理 4　给定双曲线 $\Gamma: \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1(a > 0, b > 0)$,$M(0,m)$,$N(0,n)(n \neq m)$ 是 y 轴上的两个定点,过 M 引不与 y 轴重合的直线交 Γ 于 P,Q 两点,则 $\frac{k_{NP} + k_{NQ}}{k_{PQ}}$ 为定值 $\frac{2(b^2 + mn)}{b^2 + m^2}$.

推论　给定双曲线 $\Gamma: \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1(a > 0, b > 0)$,$M(0,m)(m \neq 0)$,$N\left(0, -\frac{b^2}{m}\right)$ 是 y 轴上的两个定点,过 M 引不与 y 轴重合的直线交 Γ 于 P,Q 两点,

(1) 若 P,Q 分别在 Γ 的两支上,则 $\angle PNM = \angle QNM$;

(2) 若 P,Q 在 Γ 的同一支上,则 $\angle PNM + \angle QNM = 180°$.

定理 5　给定抛物线 $\Gamma: y^2 = 2px(p > 0)$,$M(m,0)(m \neq 0)$,$N(n,0)(n \neq m)$ 是 x 轴上的两个定点,$O(0,0)$ 为顶点,过 M 引不与 x 轴重合的直线交 Γ 于 P,Q 两点,则

(1) $k_{PQ}\left(\frac{1}{k_{NP}} + \frac{1}{k_{NQ}}\right)$ 为定值 $\frac{m + n}{m}$;

(2) 当 $n = 0$ 时 $k_{NP} \cdot k_{NQ}$(即 $k_{OP} \cdot k_{OQ}$)为定值 $-\frac{2p}{m}$.

证明　(1) 将 Γ 的方程变形为 $y^2 - 2p(x - n)$

$-2pn=0.$ ⑤

设直线 PQ 的方程为 $y=k(x-m)(k=k_{PQ},k\neq 0)$,变形得 $\frac{y-k(x-n)}{k(n-m)}=1$,代入⑤得

$$y^2-2p(x-n)\cdot\frac{y-k(x-n)}{k(n-m)}-2pn\cdot\left[\frac{y-k(x-n)}{k(n-m)}\right]^2=0.$$

化简整理后两边同除以 y^2 得,$2pmk^2t^2-2pk(m+n)t-(m-n)^2k^2+2pn=0\left(其中\ t=\frac{x-n}{y}\right)$. ⑥

于是,$\frac{1}{k_{NP}}+\frac{1}{k_{NQ}}=\frac{m+n}{km}$,即 $k_{PQ}\left(\frac{1}{k_{NP}}+\frac{1}{k_{NQ}}\right)=\frac{m+n}{m}$.

(2)当 $n=0$ 时由⑥式得

$$k_{NP}\cdot k_{NQ}=\frac{2pmk^2}{-(m-n)^2k^2+2pn}=-\frac{2p}{m}.$$

推论 给定抛物线 $\Gamma:y^2=2px(p>0)$,$M(m,0)(m\neq 0)$,$N(-m,0)$ 是 x 轴上的两个定点,过 M 引不与 x 轴垂直和重合的直线交 Γ 于 P,Q 两点,

(1)当 M 在 Γ 的焦点所在区域时,$\angle PNM=\angle QNM$;

(2)当 M 在 Γ 的非焦点所在区域时,$\angle PNM+\angle QNM=180^\circ$.

证明从略.

最后需说明的是,在以上定理中,点 M,N 可以取一些特殊点,从而结论(定值)变为一些特殊值.如在定理1(1)中,M 可取 Γ 的左右准线与 x 轴的交点、左右两焦点、Γ 的中心,N 除了可取以上点外还可以取左右顶点,取法最多可有 $5\times 6=30$ 种.仅举一例:当 M 取 Γ 的左焦点 $F_1(-c,0)(c=\sqrt{a^2-b^2})$ N 取 Γ 的中心 O 时,$k_{PQ}\left(\frac{1}{k_{NP}}+\frac{1}{k_{NQ}}\right)$ 为定值 $\frac{2}{1-e^2}$(其中 $e=\frac{c}{a}$ 为 Γ 的离心率).

参考文献

[1] 林维明.圆锥曲线离心率一个共性的推广[J].中学数学教学,2009(03):62-63.

[2] 张乃贵,邢友宝.圆锥曲线中三直线斜率成等差数列的三个命题[J].中学数学杂志,2010(1):31-32.

[3] 姜坤崇.圆锥曲线一个几何性质的补充[J].数学通报,2002(11):45.

[4] 姜坤崇.圆锥曲线纵轴定点弦的一个新性质[J].中学数学研究(江西),2021(05):39-40.

作者简介 薛新灵(1982—),女,山东诸城人,中学一级教师.主要致力于高中数学教育教学及高考数学试题研究,先后九次获得市级教学成果奖,教学成绩突出;2019 年 9 月执教潍坊市高中数学公开课,受到广泛好评.

姜坤崇(1958—),男,山东威海人,中学高级教师,全国优秀教师,在省级及以上中等数学期刊上共发表论文 300 余篇;研究方向:初等数学及数学竞赛研究,侧重圆锥曲线和不等式.

以退为进 把握本质*

江苏省滨海中等专业学校 224500 梁永年

【摘 要】 借助以退为进的思想对试题的解法、思路进行分析,把复杂问题退到简单问题,退到学生最容易看清楚的地方,经历感受、体验的探究过程,让学生看清问题的本质,从而顺利解决问题.

【关键词】 以退为进;把握本质

1 提出问题

设数列 $\{a_n\}$ 的通项公式为 $a_n=\frac{2n-1}{3^n}$,问:在数列 $\{a_n\}$ 中,是否存在三项,使得它们构成等差数列?若存在,求出这三项;若不存在,请说明理由.

这是一道典型的数列"整数解"问题,作为本校模拟考试压轴题的最后一问,得分率很低,全班只有两位同学用特殊值验证出一组解.在试卷评讲前,笔者进行了广泛调研,对于"数列 $\{a_n\}$ 中是否存在三项",大部分学生都有基本思路,即设存在三项 a_p,

* 基金项目:本文系第四期江苏省教育科学研究院职业教育教学研究 2019 年度立项课题《中职数学教学"最优化课堂"体系构建的案例研究》(登记号:ZYB187)的阶段成果.