

一道课本习题的溯源、破解与思考

张志刚 (山东省宁阳县复圣中学 271400)

摘要:对一道最大张角教材习题进行深度剖析,探寻题目的本质与历史渊源,提出问题的直观感知和代数论证的解决方案,并就问题中蕴含的核心素养价值进行了解读.

关键词:米勒问题;核心素养;直观想象;数学建模

文章编号:1004-1176(2022)05-0000-00

徐章韬教授提出,理想的课堂是“学术”“技术”“艺术”三“术”交织的课堂.作为教师,其修为要能“上通数学、下达课堂”,能做“顶天立地”之事.然三“术”的发展具有序列性,先要解决一些“技术”问题,首先表现在教师能深刻研读教材,能看到教材背后的“微言要义”.课程教材承载的是传统成熟内容,是数学工作者集体智慧的结晶,不仅具备完整的学科知识体系,同时也是教师实施教学和学生学习的重要材料,而作为教材重要组成部分的习题理应置于显著的位置上.众多高考试题和竞赛试题都是从课本例题或习题出发,经过改编、综合、拓展、嫁接而来,具体表现为:课本例题、习题数据的变更,课本例题、习题条件的拓展,课本例题、习题背景的变换,课本例题、习题的应用等^[1].对典型习题的深度挖掘有利于我们发现问题的内涵和本质,“揭秘”题目背后的故事与历史渊源,概括归纳深藏其中的思维主线,以此为中心推而广之,可以收到以一敌百的良好成效.

证 $(1+t)e^{\frac{1}{1+t}} < e$, 即证 $1+t < e^{\frac{1}{1+t}}$. 于是只要证 $(t-1)\ln(1+t) - t\ln t < 0$ 在 $t > 1$ 时恒成立. 继而构造一元函数 $\varphi(t) = (t-1)\ln(1+t) - t\ln t$ ($t > 1$), 求得 $\varphi'(t) = \ln(1+t) + \frac{t-1}{1+t} - \ln t - 1 = \ln \frac{1+t}{t} - \frac{2}{1+t} < \frac{1+t}{t} - 1 - \frac{2}{1+t} = \frac{1-t}{t(1+t)} < 0$ 恒成立. (这里有一个重要的对数切线不等式 $\ln x \leq x-1$ 的放缩, 需证明)

所以 $\varphi(t)$ 在 $(1, +\infty)$ 上单调递减, 故 $t > 1$ 时, $\varphi(t) = (t-1)\ln(1+t) - t\ln t < \varphi(1) = 0$, 即得证 $x_1 + x_2 < e$.

点评 上述两种解答都充分体现了数学核心素养对解题的思路引领. 两种解法分别建立了对应的数学模型, 通过逐步深入的逻辑推理和数据分析、数学运算简化问题, 最后使问题得以轻松解决. 放缩法是证明不等式的常用方法, 方法 1 利

效. 事实上, “小题深挖”“一题多法”“一题多变”“多题一法”充分体现了教学的简约性功能, 能在尽可能短的时间内传播尽可能多的数学思想, 对题海战术也是一种“反制”, 历来都是我国习题课教学的宝贵经验, 在继承与发展的道路上, 我们应使其焕发新的生机. 下面举例说明.

1 题目再现

普通高中课程标准试验教科书必修《数学 5》(人教版 2007 年 1 月第 3 版, A 版) 第 101 页习题 3.4B 组第 2 题: 如图 1, 树顶 A 离地面 a m, 树上另一点 B 离地面 b m, 在离地面 c m 的 C 处看此树, 离此树多远时视角最大?

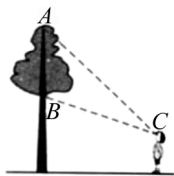


图 1

2 问题剖析

2.1 问题探源

本题源于历史上经典的米勒问题. 1471 年, 德国

用不等式性质放缩, 方法 2 利用对数切线不等式 $\ln x \leq x-1$ 进行有目标的放缩, 能达到事半功倍的效果. 其中利用比(差)值代换是解决极值点偏移的另一种简单快捷的方法, 利用两数之比(差)作为变量 t , 继而将所求解问题转化为关于 t 的函数问题求解, 将双变量问题转化为单变量问题, 从而实现消元的目的.

极值点偏移问题在全国高考中属于高频题型, 此类问题由浅入深, 对计算难度、思维深度的要求逐步提高, 很好地体现了数学的科学性、应用性和创造性. 解决这类问题, 本质上就是将双变量问题转化为单变量问题, 建立相应的数学模型, 通过逐步深入的逻辑推理和数据分析、数学运算简化问题, 最后使问题得以轻松解决.

参考文献

- [1] 陈宽宏. 对数平均与高考压轴题[J]. 数学通讯, 2012(11): 34-37.

数学家、天文学家米勒(Johannes Miller)向诺德尔(Christian Roder)教授提出了一个有趣的问题:在地球表面的什么部位,一根垂直的悬杆呈现最长(即可视角最大)?上述最大视角问题因是米勒首先提出的,故被称为“米勒问题”.米勒问题广泛存在于各种实际问题中,例如探求欣赏一幅画的最佳角度、足球比赛最佳射门点等.

2.2 数学模型

历史上的米勒问题涉及的范围是三维空间.作为实际问题,我们首先要做的是根据实物背景抽象出简化的数学模型.相对于悬杆而言,地球的体积是相当大的,我们可视地球表面为平面,为了简化模型,同时忽略观察者身高对答案的影响,可以设观察者的身高为0,且悬杆在地面上的投影也为0,因为悬杆垂直于地面,所以距点O相同距离的点所得可视角是相同的(图2).

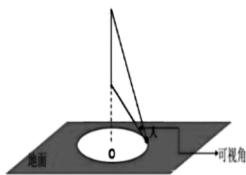


图2

2.3 问题转化

将上述模型一般化,可得到如下数学问题:如图3,设M,N是锐角 $\angle AOB$ 的一边OA上的两点,试在边OB上找一点P,使 $\angle MPN$ 最大.

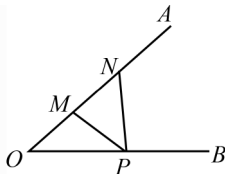


图3

对上述米勒问题,我们有如下重要结论,不妨称之为米勒定理:

米勒定理 设M,N是锐角 $\angle AOB$ 的一边OA上的两点,点P是射线OB上异于点O的一个动点,则当且仅当 $\triangle MNP$ 的外接圆与射线OB相切于点P时, $\angle MPN$ 最大.

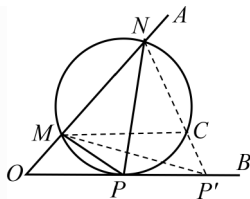


图4

证明 如图4,在射线OB上任取异于P的一点P',连结MP',NP',NP'与圆相交于点C,易知 $\angle MCN > \angle NP'M$.又因为 $\angle MCN = \angle MPN$,所以 $\angle MPN > \angle MP'N$.得证.

3 问题解答

3.1 几何视角

解法1 由圆的几何性质探求张角最大值.

如图5,DE是过点C且垂直于AB的直线,D为垂足.当DE与过点A,B的圆相切时,切点记为C,此时 $\angle ACB = \alpha$ 最大.

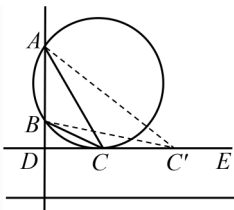


图5

事实上,观察图5,易知无论点C是前行还是后退到点C',过点A,B,C'的圆必与直线DE相交,此时 $\angle AC'B$ 必小于圆内的角 α .当DE与过点A,B,C的圆相切且切点为C时,由切割线定理得 $CD = \sqrt{DA \cdot DB} = \sqrt{(a-c)(b-c)}$,即当C离此树距离为 $\sqrt{(a-c)(b-c)}$ 时,看A,B的视角最大.

3.2 代数视角

由于在C处看A,B的视角为 $\angle ACB \in (0, \frac{\pi}{2})$,为了探求 $\angle ACB$ 的最大值,可转化为研究锐角 $\angle ACB$ 的某一个三角函数值的最值.下面以 $\angle ACB$ 的正切的最大值为例进行推演论证.

解法2 探索锐角 $\angle ACB$ 正切的最大值.

设离此树x m远时视角最大,如图6所示.过点C作AB的垂线CD,垂足为点D. $CD = EF = x$ m, $AD = (a-c)$ m, $BD = (b-c)$ m.在 $\text{Rt}\triangle BCD$ 中, $\tan \angle BCD = \frac{BD}{CD} = \frac{b-c}{x}$,在

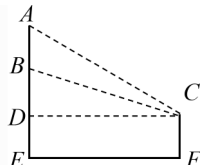


图6

$\text{Rt}\triangle ACD$ 中, $\tan \angle ACD = \frac{AD}{CD} = \frac{a-c}{x}$,所以 $\tan \angle ACB = \tan(\angle ACD - \angle BCD) = \frac{\frac{a-c}{x} - \frac{b-c}{x}}{1 + \frac{a-c}{x} \cdot \frac{b-c}{x}} = \frac{\frac{a-b}{x}}{1 + \frac{(a-c)(b-c)}{x^2}}$

仅当 $x = \frac{(a-c)(b-c)}{x}$,即 $x = \sqrt{(a-c)(b-c)}$ 时取等号.

又 $y = \tan x$ 在 $(0, \frac{\pi}{2})$ 上单调递增,则y最大时,x也最大.从而当C离此树距离为 $\sqrt{(a-c)(b-c)}$ 时,看A,B的视角最大.

4 定理应用

以米勒问题为背景的最大张角问题在历年高考试题中屡见不鲜而又经久不衰,如1986年高考全国卷理科第5题、2005年高考浙江卷理科第17题、2010年高考江苏卷第17题等,若能从题设中挖掘、识别出隐含的米勒问题模型,将有效地突破思维瓶颈,大

幅减少运算量,降低思维难度,从而使问题顺利获解.倘若无法及时提取该模型,很容易成为考生难以逾越的一道鸿沟.值得关注的是,米勒问题在竞赛数学中也频频亮相,需要引起足够的重视.下面列举几例.

题1 (2004年全国高中数学联赛第12题)在平面直角坐标系 xOy 中,给定点 $M(-1,2), N(1,4)$,点 P 在 x 轴上移动,当 $\angle MPN$ 取最大值时,点 P 的横坐标为 _____. (参考答案:1)

题2 (2006年全国高中数学联赛第9题)已知椭圆 $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{4} = 1$ 的左右焦点分别为 F_1, F_2 ,点 P 在直线 $l: x - \sqrt{3}y + 8 + 2\sqrt{3} = 0$ 上.当 $\angle F_1PF_2$ 取最大值时, $\frac{PF_1}{PF_2} =$ _____. (参考答案: $\sqrt{3} - 1$)

题3 (2017年全国高中数学联赛辽宁省初赛第9题)已知 F_1, F_2 分别为椭圆 $\Gamma: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的左、右焦点, $F_1F_2 = 2$, A 为 Γ 的右顶点,直线 l 过点 A 且垂直于 x 轴, P 为直线 l 上一动点,若 $\angle F_1PF_2$ 的最大值是 $\frac{\pi}{4}$,则点 P 的坐标是 _____. (参考答案: $(\sqrt{2}, 1)$ 或 $(-\sqrt{2}, 1)$)

5 核心素养价值思考

从以上分析可以看出,米勒问题内蕴丰富,其解决过程需要直观想象、数学建模、数学运算、逻辑推理等核心素养,具有较高的挖掘价值.而直观想象素养是借助几何直观和空间想象感知事物的形态与变化,利用空间形式特别是图形来理解 and 解决数学问题的素养.主要包括:借助空间形式认识事物的位置关系、形态与运动规律;利用图形描述、分析问题;建立数与形的联系,构建数学问题的直观模型,探索解决问题的思路.^[2] 直观想象是发现和提出问题、分析和解决问题的重要手段.在数学研究的探索中,通过运用直观手段以及借助直观展开想象从而发现结论、作出猜想的例子比比皆是.直观想象在数学活动中是探索和形成论证思路、进行数学推理、构建抽象结构的思维基础.史宁中教授在《普通高中数学课程标准(2017年版2020年修订)解读》中提出的案例5.9本质上也是典型的米勒问题,他还以此为例说明了直观想象素养的三个水平.

案例5.9 足球场上竖立一个电影屏幕,屏幕高为 L ,底部距离地面为 H .设一人站在足球场上,眼睛距离地面高度为 h , $r = H - h > 0$.问:此人应该站在足球场上何处观看电影,眼睛观察屏幕上下沿

形成的视角最大?

用竖直的线段 AB 表示屏幕,用 EF 表示站立的人, E 点为眼睛的位置,观察屏幕的上、下沿,形成视角 $\theta = \angle AEB$,画出平面图(图7).学生能描述和表达数学问题:设 $AB = L, BD = H, CD = EF = h$,求点 F 的位置,使得视角 θ 最大.如此,学生能够建立事物的几何图形,体会图形和数量的关系,即达到了水平一的标准.

设 $\alpha = \angle CEA, \beta = \angle CEB$, 则 $\theta = \alpha - \beta$, 则 $\theta \in (0, \frac{\pi}{2})$. 设 $x = DF = CE, r = H - h$, 从而 $\tan \alpha = \frac{L+r}{x}, \tan \beta = \frac{r}{x}, \tan \theta = \tan(\alpha - \beta) = \frac{\tan \alpha - \tan \beta}{1 + \tan \alpha \cdot \tan \beta} = \frac{L}{x + \frac{r(L+r)}{x}} \leq \frac{L}{2\sqrt{x \cdot \frac{r(L+r)}{x}}} = \frac{L}{2\sqrt{r(L+r)}}$, 当且仅当 $x = \frac{r(L+r)}{x}$ 即 $x = \sqrt{r(L+r)}$ 时取等号.

又 $y = \tan \theta$ 在 $(0, \frac{\pi}{2})$ 上单调递增,则 y 最大时,

θ 也最大.学生进一步利用数形结合,利用函数知识解决问题,学生就达到了水平二的标准.

如图8所示,学生观察到,过 A 和 B 点恰有一圆与直线 CE 相切于点 G .在射线上任取异于 G 点的一点 P ,易知 $\angle APB < \angle AGB$, 所以人站在 G 点时,视角 $\theta = \angle AGB$ 最大.此时, $x = CG = \sqrt{CB \cdot CA} = \sqrt{r(L+r)}$.

课程标准指出,直观想象主要表现为以下四点:建立数与形的联系,利用几何图形描述问题,借助几何直观理解问题,运用空间想象认识事物.米勒问题的解决过程是直观想象素养的完美演绎,是数形结合、转化与化归、函数与方程等数学思想应用的集中体现,是不可多得的训练素材和载体,极具教育价值.

参考文献

- [1] 戴建国.对高考中导数试题命制过程的一些思考[J].数学通讯(下半月),2021(9):52-55.
- [2] 史宁中,王尚志.普通高中数学课程标准(2017年版2020年修订)解读[M].北京:高等教育出版社,2020:109-110.

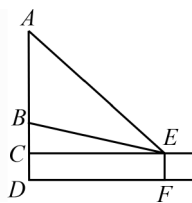


图7

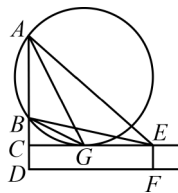


图8