“模型”少一点 “积累”多一层

陈建洲 李玉荣 （江苏省南京金陵中学河西分校 210019）

摘 要：在解题教学中将常见图形归纳总结形成“数学模型”，对提高学生解题能力极有帮助，但模型不能泛化．本文刍议几个问题的泛化“模型”求解，寻求更自然、适切的解法，旨在帮助学生积累活动经验，提升数学素养．

关键词：解题教学；数学模型；深度思考

文章编号：1004-1176(2022)06-0065-04

文[1]由一道几何试题引发深度思考，给出了9个问题的解题分析，其中对问题1—3的求解引发了笔者的进一步思考：为何要那样求解？有没有更自然、适切的解法？深度思考的意义何在？在此与作者商榷．

问题1 如图1，在矩形$ABCD$中，$CD=3$，$AD=4$，在AD边上取点E，H，在AC上取点F，作正方形$EFGH$，连结AG，点E'是点E关于AG的对称点，AE'交BC于点P，则PC的长为______．

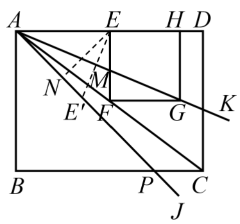

图1

文[1]给出了此题的一个解答过程后指出：“解法利用点E与点E'相对称的性质，得出AK平分$\angle DAJ$，利用角平分线得出线段的比例关系，列出方程求解，但解题思路不容易想到，且角平分线的这个性质不在初中要求范围之内，所列方程烦且难解．”接着作者在解答反思部分借助构图探索出一个结论“若$\tan A=\frac{a}{b}$，则$\tan 2A=\frac{2ab}{b^2-a^2}$”，并指出可以方便地求出一些与“二倍角”有关的问题．笔者不禁要问：这是从学生的角度思考问题吗？此题怎么想到与二倍角有关联呢？这个结论有实用的价值吗？对教师而言，显然没有任何价值，因为他们熟悉公式$\tan 2\alpha=\frac{2\tan\alpha}{1-\tan^2\alpha}$；对学生而言，或许记忆这个结论一时并不困难，但毕竟其适用的机会有限，所以真正遇到几何问题，学生哪里会想到用这个结论？况且还不能直接用来求解问题(除填空题、选择题)．因此，笔者思考：此题有更自然、适切的求解方法吗？

分析 要求PC的长，只需求BP，既然BP的大小最终能确定，可推断$\angle APB$大小确定，而$\angle APB=\angle DAP=2\angle DAG$，说明$\angle DAG$大小确定，事实上，易知$\tan\angle DAG=\frac{3}{7}$．

解法1 如图1，因为$EF\parallel CD$，所以$\triangle AEF\backsim\triangle ADC$，可得$\frac{EF}{AE}=\frac{CD}{AD}=\frac{3}{4}$．

设$EF=3k$，则$HG=EH=3k$，$AE=4k$，所以$AH=7k$，可得$\tan\angle DAG=\frac{HG}{AH}=\frac{3}{7}$．

连结EE'交AG于点M，作$EN\perp AP$于点N，则$\frac{EM}{AM}=\frac{3}{7}$．设$EM=3x$，则$E'E=6x$，$AM=7x$，$AE=\sqrt{EM^2+AM^2}=\sqrt{58}x$，根据面积公式$EN\times AE'=E'E\times AM$，可得$EN=\frac{42x^2}{\sqrt{58}x}=\frac{42}{\sqrt{58}}x$，进而$AN=\sqrt{AE^2-EN^2}=\frac{40}{\sqrt{58}}x$．

易证$\triangle AEN\backsim\triangle PAB$，可得$\frac{EN}{AB}=\frac{AN}{BP}$，即$\frac{42}{\sqrt{58}}x\cdot BP=\frac{40}{\sqrt{58}}x\cdot 3$，所以$PB=\frac{20}{7}$，进而$PC=4-\frac{20}{7}=\frac{8}{7}$．

解法2 同解法1得$\tan\angle DAG=\frac{HG}{AH}=\frac{3}{7}$．

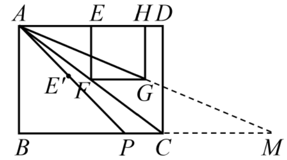

图2

如图2，延长AG，BC交于点M．因为$AD\parallel BM$，所以$\tan\angle M=\frac{3}{7}$，即$\frac{AB}{BM}=\frac{3}{7}$，因为$AB=3$，所以$BM=7$．

又$\angle PAM=\angle DAG=\angle M$，所以$PA=PM$，设$PA=x$，则$BP=7-x$．

在Rt$\triangle ABP$中，根据勾股定理得$3^2+(7-$

$x)^2=x^2$,解得 $x=\frac{29}{7}$,所以 $PB=7-\frac{29}{7}=\frac{20}{7}$,进而 $PC=4-\frac{20}{7}=\frac{8}{7}$.

解法 3 如图 3,同解法 1 得 $\tan\angle DAG=\frac{HG}{AH}=\frac{3}{7}$.

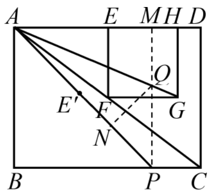

图 3

作 $PM\perp AD$ 于点 M,PM 交 AG 于点 Q,则 $PM=AB=3$,$BP=AM$,$\frac{QM}{AM}=\tan\angle DAG=\frac{3}{7}$.

设 $QM=3k$,则 $AM=7k$,$PQ=3-3k$.作 $QN\perp AP$ 于点 Q,则 $AN=AM=7k$,$QN=QM=3k$.易证 $\triangle PNQ\backsim\triangle PMA$,可得 $\frac{PN}{PM}=\frac{QN}{AM}=\frac{PQ}{PA}=\frac{3}{7}$,所以 $PN=\frac{3}{7}PM=\frac{9}{7}$,$PA=7k+\frac{9}{7}$,所以 $\frac{3-3k}{7k+\frac{9}{7}}=\frac{3}{7}$,解得 $k=\frac{20}{49}$,所以 $PB=7k=\frac{20}{7}$,进而 $PC=4-\frac{20}{7}=\frac{8}{7}$.

解法 4 如图 4,延长 GF 交 AB 于点 M,交 AP 于点 N,则 $\angle NAG=\angle HAG=\angle AGN$,所以 $NA=NG$.

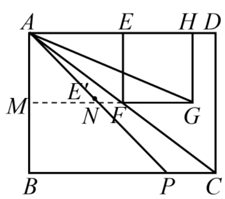

图 4

易证 $\triangle AMF\backsim\triangle ABC$,可得 $\frac{AM}{MF}=\frac{AB}{BC}=\frac{3}{4}$,设 $AM=3k$,则 $EF=FG=3k$,$MF=4k$,$MG=7k$,设 $NG=x$,则 $MN=7k-x$.

在 $\mathrm{Rt}\triangle AMN$ 中,根据勾股定理得 $(3k)^2+(7k-x)^2=x^2$,解得 $x=\frac{29}{7}k$,即 $MN=\frac{20}{7}k$,易证 $\triangle AMN\backsim\triangle ABP$,可得 $\frac{AM}{MN}=\frac{AB}{BP}$,即 $\frac{3k}{\frac{20}{7}k}=\frac{3}{BP}$,所以 $PB=\frac{20}{7}$,进而 $PC=4-\frac{20}{7}=\frac{8}{7}$.

评注 解法1—4添加的都是朴实的辅助线,构造出"角平分线+平行线=等腰三角形"等与角平分线有关联的基本图形,使用了面积法、勾股定理、相似三角形等基本计算工具,贴近学生思维发展区,解法自然、适切.

问题 2 如图 5,正方形 $ABCD$ 中,$AB=6$,E 是 BC 边中点,将 $\triangle ABE$ 沿 AE 对折,使得点 B 与点 F 重合,AF 与对角线 BD 交于点 G,求线段 GF 的长.

分析 此题文[1]是利用之前探究的结论求解的,笔者以为作为解答题显然不妥.有更自然的求解方法吗?要求线段 GF 的长,只需求线段 AG 的长,需借助 $\triangle AGB$ 或 $\triangle AGD$ 求解,但条件暂时不足.注意到 $\angle AFE=90^\circ$,于是有两个基本思路:一是构造"一线三等角型"相似三角形;二是构造"双垂直共角型"相似三角形,最后借助"X 型"相似三角形求解.

解法 1 如图 5,过点 F 作 $MN\perp AD$ 于点 M,交 BC 于点 N,则 $MN=AB=6$,$AM=BN$.

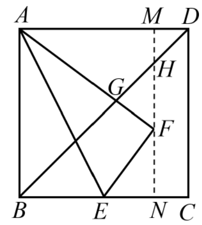

图 5

易证 $\triangle AMF\backsim\triangle FNE$,可得 $\frac{FN}{AM}=\frac{EN}{MF}=\frac{EF}{AF}=\frac{3}{6}=\frac{1}{2}$.

设 $EN=k$,则 $MF=2k$,$FN=6-2k$,$AM=BN=3+k$,所以 $3+k=2(6-2k)$,解得 $k=\frac{9}{5}$,所以 $FN=6-2\times\frac{9}{5}=\frac{12}{5}$,$HN=BN=3+\frac{9}{5}=\frac{24}{5}$,进而 $HF=HN-FN=\frac{12}{5}$.

易证 $\triangle ABG\backsim\triangle FHG$,可得 $\frac{AG}{FG}=\frac{AB}{FH}=\frac{6}{\frac{12}{5}}=\frac{5}{2}$,所以 $GF=\frac{2}{7}AF=\frac{12}{7}$.

解法 2 如图 6,延长 AF,BC 交于点 H.

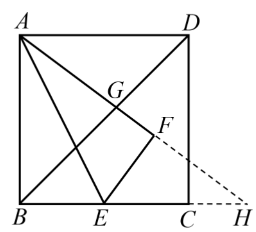

图 6

易证 $\triangle EHF\backsim\triangle AHB$,可得 $\frac{FH}{BH}=\frac{EH}{AH}=\frac{EF}{AB}=\frac{3}{6}=\frac{1}{2}$.

设 $FH=k$,则 $BH=2k$,$EH=2k-3$,$AH=6+k$,所以 $6+k=2(2k-3)$,解得 $k=4$,所以 $AH=10$,$BH=8$.

易证 $\triangle ADG\backsim\triangle HBG$,可得 $\frac{AG}{HG}=\frac{AD}{HB}=\frac{6}{8}=\frac{3}{4}$,所以 $AG=\frac{3}{7}AH=\frac{30}{7}$,进而 $GF=6-\frac{30}{7}=\frac{12}{7}$.

解法3 如图7,延长 AF 交 DC 于点 H,连结 CF.

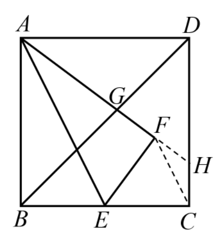

图 7

因为 $EF=BE=EC$,所以 $\angle EFC=\angle ECF$,可得 $\angle HFC=\angle HCF$,所以 $CH=FH$.

设 $FH=x$,则 $AH=6+x$,$DH=6-x$,在 $\mathrm{Rt}\triangle ADH$ 中,根

据勾股定理得 $6^2+(6-x)^2=(6+x)^2$，解得 $x=\frac{3}{2}$，所以 $DH=\frac{9}{2}$，$AH=\frac{15}{2}$．

易证 $\triangle ABG\backsim\triangle HDG$，可得 $\frac{AG}{HG}=\frac{AB}{HD}=\frac{4}{3}$，所以 $AG=\frac{4}{7}AH=\frac{30}{7}$，进而 $GF=6-\frac{30}{7}=\frac{12}{7}$．

解法 4[2]　如图 8，延长 AE，DC 交于点 H，延长 AF 交 DC 于点 M．

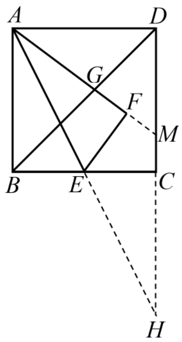

图 8

易证 $\triangle ABE\cong\triangle HCE$，可得 $CH=AB=6$，$DH=12$，$\angle BAE=\angle EHC=\angle HAM$，所以 $AM=HM$．

设 $DM=x$，则 $AM=12-x$，在 $\mathrm{Rt}\triangle ADM$ 中，根据勾股定理得 $6^2+x^2=(12-x)^2$，解得 $x=\frac{9}{2}$，$AM=\frac{15}{2}$．

易证 $\triangle ABG\backsim\triangle DMG$，可得 $\frac{AG}{MG}=\frac{AB}{MD}=\frac{4}{3}$，所以 $AG=\frac{4}{7}AM=\frac{30}{7}$，进而 $GF=6-\frac{30}{7}=\frac{12}{7}$．

评注　笔者分别给出了问题1、问题2的4种解法，或许还有更多的解法可以探索，这不远比套“公式”求解更能启迪思维？

问题 3　如图 9，在平面直角坐标系 xOy 中，直线 $y=2x+b$ 经过点 $A(-1,0)$，与 y 轴正半轴交于点 B，与反比例函数 $y=\frac{k}{x}(k>0,x>0)$ 交于点 C，且 $BC=AB$，点 D 是反比例函数上一点，连结 AD，若 $\tan\angle BAD=\frac{1}{2}$，则点 D 的横坐标为______．

分析　文[1]刻意配制了问题2、3用以说明之前探究的结论的应用价值，但问题 3 的选取显然不够贴切，求解方法给人以“杀鸡用牛刀”的感觉，由 $\tan\angle BAD=\frac{1}{2}$ 为何不用更自然的解法呢？

解法1　因为直线 $y=2x+b$ 经过点 $A(-1,0)$，所以 $b=2$，$OA=1$，$OB=2$，$AB=\sqrt{5}$．

如图9，设直线 AD 交 y 轴于点 F，过点 F 作 $FE\perp AB$ 于点 E，则 $\tan\angle BAD=\frac{1}{2}=\frac{EF}{AE}$，设 $EF=k$，则 $AE=2k$．

易证 $\triangle BEF\backsim\triangle BOA$，可得 $\frac{EF}{BE}=\frac{OA}{OB}=\frac{1}{2}$，故有 $BE=2k$，从而 $2k+2k=\sqrt{5}$，解得 $k=\frac{\sqrt{5}}{4}$，所以 $BF=\sqrt{BE^2+EF^2}=\frac{5}{4}$，进而 $FO=2-\frac{5}{4}=\frac{3}{4}$，可求出经过 A，F 的直线为 $y=\frac{3}{4}x+\frac{3}{4}$．

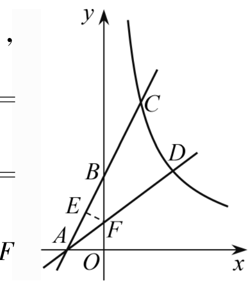

图 9

易知 $C(1,4)$，所以 $y=\frac{4}{x}$，所以 $\frac{4}{x}=\frac{3}{4}x+\frac{3}{4}$，解得 $x=\frac{-3+\sqrt{201}}{6}$（舍去负根），即 D 的横坐标为 $\frac{-3+\sqrt{201}}{6}$．

评注　这个解法看似繁琐，但解法自然且具有一般性（如 $\tan\angle BAD=\frac{1}{3}$，此时不存在二倍角，文[1]利用之前探究的结论算得 $\tan 2A=\frac{4}{3}$ 无法解决问题）．当然，如果能结合已知条件从图形中发现 $\tan\angle BAD=\frac{1}{2}=\tan\angle ABO$，下面的解法更为简洁．

解法 2　如图 10，因为直线 $y=2x+b$ 经过点 $A(-1,0)$，所以 $b=2$，$OA=1$，$OB=2$，进而 $\tan\angle ABO=\frac{1}{2}=\tan\angle BAD$，所以 $AF=BF$，设 $AF=m$，则 $OF=2-m$．

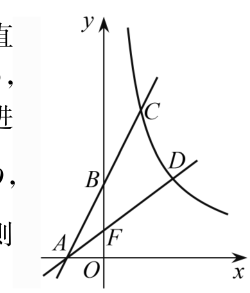

图 1

在 $\mathrm{Rt}\triangle AFO$ 中，根据勾股定理得 $1^2+(2-m)^2=m^2$，解得 $m=\frac{5}{4}$，进而 $FO=2-\frac{5}{4}=\frac{3}{4}$．以下同解法 1．

评注　这个解法无需添加辅助线，更无需套什么“公式”或“模型”，独具匠心．

不知从何时起，应对考试的“模型”充斥数学课堂教学，如“猪蹄”模型、“手拉手”模型、“12345”模型…… 让人眼花缭乱，教学年岁较长的教师甚至闻所未闻、莫名其妙．《义务教育数学课程标准(2011年版)》明确指出：“课程内容的组织要重视过程，处理好过程与结果的关系．”基于此理念，曾经耳熟能详的射影定理、相交弦定理、垂径定理等重要定理在教材上都已删去，那我们还有什么理由去编制所谓的模型（充其量也只能算基本图形）让学生去记忆、

套用？解题是数学教师的最常见活动，学生学习数学更离不开解题，建立数学模型，对模型进行分析、求解，最终达到解决问题的目的无可厚非，甚至极为重要，但模型不能泛化，数学解题不能依赖并不常用的所谓“模型”或“结论”，更不宜在初中解题教学中大肆渲染一些远离教材的“模型”甚至是超标的内容，美其名曰“拓展延伸”，实际上是加重了学生的学业负担．泛化的模型等同于“拿来主义”：拿现成的“模型”去解难度大、思维含量高的数学题，表面上看解题过程简化了，但失去的是更有价值的数学思维，实在得不偿失．解题方法的教学理应遵循教材知识，执行课程标准，探寻贴近学生的发展区的自然解法，机械的“模型”或“结论”慎教、慎用，着力点应是强化过程性教学，让学生更多地思考、探究，体验获取知识的乐趣，促进数学思维能力的提升，增效减负才能真正落到实处．

完稿之余，恰好看到广东省 2021 年中考数学试卷第 23 题：

如图 11，边长为 1 的正方形 $ABCD$ 中，点 E 为 AD 的中点．连结 BE，将 $\triangle ABE$ 沿 BE 折叠得到 $\triangle FBE$，BF 交 AC 于点 G，求 CG 的长．

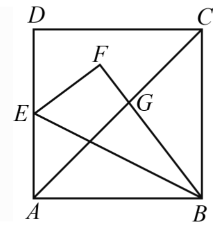

图 11

此题与问题 2 极为相似，考生该用什么样的思路来求解呢？读者自有分辨．

参考文献

[1] 王万丰，汪佳莎．一道试题的解法及深度思考[J]．中学数学杂志（初中版），2020(4)：50-53．

[2] 李玉荣．从自然走向更自然[J]．中学教研（数学），2016(4)：42-45．

（上接第 58 页）

征；在函数教学中，利用电脑制图向学生展示函数图象，研究函数的性质．那么，在其他知识点的呈现中，教师如何将信息技术融合到教学设计中值得我们认真思考．此外，如何借助信息技术培养学生自主学习习惯，切实提高自主学习的能力和效果？如何做到信息技术与教学内容的有机融合，更好地体现学科特色？这些问题都需要教育教学人员深入探究．

总之，数学教育工作者的教学研究与教研论文写作在一定程度上是一脉相承的，“教无定法，贵在得法”的说法用在这里同样适合．[9] 归根结底，写作的依据是作者对教学的深入研究，数学教育工作者要着眼于热点问题，并设法融合到自己的数学课堂中；要注重教材改革的深层价值，让自己的教学内容及时更新；要结合信息技术，让自己的数学课堂一改枯燥的状态，变得生动活泼，在乐趣中教会学生知识．显然，还有很多问题需要数学教育研究者进行深层次的探讨，才能让数学教育事业大放异彩．

参考文献

[1] 张定强，闫佳洁．高中数学教与学研究：论文梳理与内容解读——基于 2016 年度人大《复印报刊资料·高中数学教与学》论文转载视角[J]．中学数学，2017(5)：20-23．

[2] 黄家瑜．《福建师范大学学报（自然科学版）》2012—2016 年各学科载文、作者和被引统计分析[J]．福建师范大学学报（自然科学版），2017，33(6)：102-107．

[3] 陈隽，王光明．“人大复印报刊资料”《高中数学教与学》(2015 年)载文分析[J]．中学数学教学参考，2016(31)：59-63．

[4] 张素霞．1997—2002 年《河南大学学报》（自然版）载文及引文分析[J]．科技情报开发与经济，2004，14(1)：28-30．

[5] 王安，师晓莉，朱哲．《人大复印报刊资料·高中数学教与学》(2012—2016)载文分析[J]．中学数学月刊，2017(5)：37-41．

[6] 朱成万．基于比较的新教材解读——“空间中点、直线与平面的向量表示”的教材分析与教学建议[J]．中学数学月刊，2021(7)：39-42．

[7] 洪萍．“上教版新教材”章首语的学科育人价值[J]．中学数学月刊，2021(7)：43-45．

[8] 黄水连．刍议新课程理念下高中数学教学中信息技术的应用[J]．数学教学通讯，2021(27)：55-56．

[9] 王娟利．2018 年人大《复印报刊资料·初中数学教与学》载文特点分析及写作启示[J]．中学数学杂志，2019(10)：64-66．