

解题教学中促进高中生数学运算素养发展之探索

郭立祥 (广东省中山市实验中学 528400)

摘要:数学运算是高中数学新课程标准界定的六大核心素养之一,具备良好的数学运算素养是解决数学问题的前提,也是推动高中生逻辑思维发展的一个必要条件.从理解与分析运算对象、掌握与运用运算法则、探究与选择运算思路、求得运算结果四个方面入手,探究解题教学中高中生数学运算素养的发展途径,以及对运算素养发展的教学实践进行反思.

关键词:解题教学;高中生;数学运算素养

文章编号:1004-1176(2022)05-0010-05

《普通高中数学课程标准(2017年版)》提出培养学生的数学抽象、逻辑推理、数学建模、数学运算、直观想象和数据分析这六大数学核心素养,其中数学运算素养是指“在明晰运算对象基础上,依据运算法则解决实际问题的素养”^[1].关于数学运算,有的教师认为教学应该侧重介绍方法和思路,运算是学生自己的事情.学生中也有一种普遍的说法,现在是智能时代,涉及的计算问题用计算器算就行了,不需要自己算.实际上提高运算能力并不能一蹴而就,而是需要一个长期训练的过程,否则学生往往知道解题方法,但是一做就错.良好的运算素养有利于将数学思维往纵深方向推进,并能够促进其他五大核心素养的均衡发展.

1 解题教学中促进高中生数学运算素养发展的基本途径

高中数学解题教学是指教师在一段时间内,

4 帮助女生以己所长克其所短,提高学习效率

高中的历史方向女生,能说会写、感性、联想能力强,关心社会时事,但学习中理性思维不足,偏重记忆,知识点的悟透贯通能力不够,这些特征对她们学好数学有一定影响,因此教师要适当引导,让学生扬长补短.

例如,可利用历史方向女生关心时事、关心社会热点问题的特点,在复习函数时,我提供了这样一个例题让学生讨论:“假如你有一笔资金用于投资,现在有三种投资方案供你选择,这三种方案的回报如下:方案一,每天回报40元;方案二,第一天回报10元,以后每天比前一天多回报10元;方案三,第一天回报0.4元,以后每天的回报比前一天翻一番.请问,你会选择哪种投资方案?”问题涉

根据学生学习的內容以及所具备的技能,采用试题训练形式来进一步夯实基础知识和基本技能的教学活动,其中包括典型试题的选择、教学方法的采用、教学过程掌控与总结、教学效果的巩固与提高等.良好的运算素养能够促进学生逻辑思维发展,并能够养成良好的运算习惯.学生在解题教学过程中通过问题解决来不断积累数学运算经验,夯实运算方面的基本技能,增强学习数学的自信心,提高学习数学的兴趣,学会用数学眼光来分析和处理问题.下面从解题教学的角度来探究如何提升和发展高中生的数学运算素养.

1.1 理解与分析运算对象是数学运算的基础

运算对象的选择是一个从数的运算到式的运算,再过渡到数据处理的发展过程.只有充分理解运算对象,才能够深入分析运算对象,做到“知其然,知其所以然”.因此当我们面对涉及运算的数

及到函数模型的选择、增长情况的比较,以及时间范围的限制等等,引起了学生极大的兴趣,我便顺势引领着她们一起去探讨、辩论,从讨论中得到事实的真相,完善问题结构,找到正确的答案.教学中也可以鼓励她们利用学习科目的优势,开展创办数学小报、征集试题解法、寻找最优答案等数学活动,联结数学知识点,激发兴趣,提高成绩.

当然,随着高考模式的改革和教育的进步,高中女生学习数学的热情是在不断地增加的.作为一名数学教师,过去的教学经验只是今日的起点,我们必须不断学习,从经验中学、从书本中学、也从学生中学,通过不断学习、不断感悟、不断修正,在寻找最适合学生的教学方法之路上不断前行,从而实现教书育人的崇高使命.

学问题时,首先要研究运算对象的背景,分析它所要考查的知识和技能,厘清运算对象所需知识间的逻辑关系.其次要引导学生根据自己所储备的知识技能来开展对运算对象的理解与分析,通过探究运算对象所涉及的问题,进行数学问题解决,从而在数学运算的过程中夯实数学基本技能,培养数学综合素养.

案例1 已知 $a=(3,4)$, $b=(\sin \alpha, \cos \alpha)$, $a \parallel b$, 求 $\sin \alpha \cos \alpha$ 的值.

教学片断1

师:本题属于向量与三角相结合的综合应用题,它考查了向量表示法、平行与垂直,三角函数的正余弦关系与符号判断等.因此需要同学们正确理解运算对象.那么如何去解答这个问题呢?

生1:由已知条件得 $3\cos \alpha - 4\sin \alpha = 0$, 再代入 $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$ 中, 分别求出 $\sin \alpha, \cos \alpha$ 的值.

师:生1掌握了向量平行的定义、正余弦的平方关系以及符号判断,理解问题比较到位.

生2:还可以由 $3\cos \alpha - 4\sin \alpha = 0$ 得 $\sin \alpha = \frac{3}{4}\cos \alpha$, 代入 $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$ 可以得到 $\cos^2 \alpha = \frac{16}{25}$, 那么 $\sin \alpha \cos \alpha = \frac{3}{4}\cos^2 \alpha = \frac{12}{25}$.

师:生2虽然与生1的思路相同,但是巧妙回避了正余弦的符号判断,利用平方关系得到 $\cos^2 \alpha = \frac{16}{25}$, 再将 $\sin \alpha \cos \alpha$ 转化成 $\frac{3}{4}\cos^2 \alpha$, 从而解决了问题.生2注意了解题过程中的前后知识联系,具有较高运算素养.

生3:也可以用“化弦为切”方法,由 $3\cos \alpha - 4\sin \alpha = 0$ 可知 $\tan \alpha = \frac{3}{4}$, 那么 $\sin \alpha \cos \alpha = \frac{\sin \alpha \cos \alpha}{\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha} = \frac{\tan \alpha}{1 + \tan^2 \alpha} = \frac{12}{25}$.

师:生3与前面两位同学思路相同,用“化弦为切”方法回避了正余弦的符号判断.在计算 $\sin \alpha \cos \alpha$ 的时候,首先巧妙运用“1”的变换, $\sin \alpha \cos \alpha = \frac{\sin \alpha \cos \alpha}{\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha}$, 再用“化弦为切”方法得到 $\frac{\sin \alpha \cos \alpha}{\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha} = \frac{\tan \alpha}{1 + \tan^2 \alpha} = \frac{12}{25}$. 这位同学研究运算对象 $\sin \alpha \cos \alpha$ 与 $\tan \alpha$ 的关系,联系到前面 $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$, 将分母除以1,巧妙实

现了“化弦为切”,具有很高运算素养.

教学思考 在理解运算对象的基础上,充分发挥学生主观能动性,提倡一题多解,并且对比每一种方法的优缺点,从不同角度来理解运算对象,夯实学生的基础知识和基本技能,同时感受学习数学过程中带来的乐趣.

1.2 掌握与应用运算法则是数学运算的保障

经过理解与分析运算对象,明确运算对象存在的条件以后,需要明确解决问题涉及的数学运算法则,并且能够熟练应用这些数学运算法则.

案例2 化简

$$f(\alpha) = \frac{\cos\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) \cos(-2\pi + \alpha) \sin\left(-\alpha + \frac{3\pi}{2}\right)}{\sin(-\pi - \alpha) \cos(4\pi - \alpha)}.$$

教学片段2

这道题考查学生熟练应用诱导公式的基本技能,也就是对于三角函数的六组诱导公式要烂熟于心,才能够做到有的放矢.

师:请自主阅读例题并思考,写出本题中涉及到的一个诱导公式以及同一组中其他公式.

(学生在独立思考的基础上,进行小组交流,然后每组选择一位同学代表本组发言)

$$\begin{aligned} \text{生4: } \cos\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) &= -\sin \alpha, \sin\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) = \cos \alpha, \tan\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) = \frac{\sin\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right)}{\cos\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right)} = -\frac{1}{\tan \alpha}. \end{aligned}$$

师:此同学复习了 $\frac{\pi}{2} + \alpha$ 与 α 之间的正弦、余弦、正切函数之间关系,涉及到三个公式.

$$\text{生5: } \cos(2k\pi + \alpha) = \cos \alpha, \sin(2k\pi + \alpha) = \sin \alpha, \tan(k\pi + \alpha) = \tan \alpha.$$

师:生5给出了终边相同角的正弦、余弦、正切函数值不变,以及正切函数以 π 为周期的三个公式.

$$\text{生6: } \cos(-\alpha) = \cos \alpha, \sin(-\alpha) = -\sin \alpha, \tan(-\alpha) = -\tan \alpha.$$

$$\text{生7: } \cos(\pi - \alpha) = -\cos \alpha, \sin(\pi - \alpha) = \sin \alpha, \tan(\pi - \alpha) = -\tan \alpha.$$

$$\text{生8: } \cos(\pi + \alpha) = -\cos \alpha, \sin(\pi + \alpha) = -\sin \alpha, \tan(\pi + \alpha) = \tan \alpha.$$

师:三位同学给出了一 $\alpha, \pi \pm \alpha$ 的正弦、余弦、正切函数值变化的九个公式.

教学思考 培养学生用类比方法找出同类型正弦、余弦或者正切函数的变化公式,目的是复习诱导公式中蕴含的“奇变偶不变,符号看象限”规律.

教师在学生回答的基础上,进一步提问:

师: $\sin\left(-\alpha+\frac{3\pi}{2}\right)$, $\sin(-\pi-\alpha)$, $\cos(4\pi-\alpha)$ 除了应用“奇变偶不变,符号看象限”外,可不可以用其他诱导公式推导出来?

生9: $\sin\left(-\alpha+\frac{3\pi}{2}\right)=\sin\left(4\pi-\alpha-\frac{\pi}{2}\right)=\sin\left(-\frac{\pi}{2}-\alpha\right)=-\sin\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)=-\cos\alpha$,或者
 $\sin\left(-\alpha+\frac{3\pi}{2}\right)=\sin\left(\pi-\alpha+\frac{\pi}{2}\right)=-\sin\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)=-\cos\alpha$.

生10: $\sin(-\pi-\alpha)=\sin(2\pi-\pi-\alpha)=\sin(\pi-\alpha)=\sin\alpha$ 或 $\sin(-\pi-\alpha)=\sin[-(\pi+\alpha)]=-\sin(\pi+\alpha)=\sin\alpha$.

生11: $\cos(4\pi-\alpha)=\cos(-\alpha)=\cos\alpha$.

师:这三位同学给出的不同解法都应用了两个以上诱导公式,强化了知识之间的相互联系.

教学思考 设计这个运算问题,目的是利用高一学生的认知结构特点,从单纯一个到几个公式的综合应用,构建公式之间的联系,也进一步强化“奇变偶不变,符号看象限”规律.

1.3 探究与选择运算思路是数学运算的关键

在熟练掌握与应用运算法则的基础上,问题解决的方法显得尤为重要.所有的数学运算思路都是开放的,基于学生已有的运算素养基础,选择合适的运算思路,有助于逻辑思维展开.

• 复杂问题简单化

运算法则、运算公式和运算技能是培养运算素养的基础,在平时注意多积累一些一般问题的运算方法和技巧,因为复杂问题往往可以分解成为几个一般问题.在探究与选择运算思路的时候,把这些复杂运算进行分解,帮助学生更好地理解运算对象,找到合适的运算方法.

案例3 若 $g(x)=x^2+ax+b$, 求证:
 $g\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)\leq\frac{g(x_1)+g(x_2)}{2}$.

在实际教学过程中,若直接用“作差法”来做,学生会体会到“看起来比较简单,做起来麻烦”.这是因为学生探究与选择运算思路时候,没有

对问题进行“分解”,如果引导学生采用“分步”来解决,首先算出 $g\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)$ 和 $\frac{g(x_1)+g(x_2)}{2}$, 然后再运用“作差法”来做,那么学生会明显感觉到运算变得容易了.采用将“一步算”转化为“三步算”,经过“分解”以后,复杂问题转化成三个容易解决的“小问题”.表面上看起来麻烦,学生实际运算以后,体验到复杂问题简单化能够提高运算的速度和准确率.

• 常规问题常态化

学生所遇到的复杂问题都是由一些常规问题组合而成,而常规问题侧重夯实学生的基础知识和基本技能,这类问题也是日常教学的重点.基于复杂问题简单化的的解题原则,我们要做到常规问题常态化.

案例4 已知函数 $f(x)=\sin^2 x \sin 2x$.

(1) 讨论 $f(x)$ 在区间 $(0, \pi)$ 上的单调性;

(2) 证明: $|f(x)|\leq\frac{3\sqrt{3}}{8}$; (3) 设 $n\in\mathbf{N}^*$, 证明:

$$\sin^2 x \sin^2 2x \sin^2 4x \cdots \sin^2 2^n x \leq \frac{3^n}{4^n}.$$

这道题是2020年全国II卷理科数学第21题,看起来比较难,实际上从它考查的知识和技能来判断,仍然属于常规问题,只不过是几个常规问题组合成一个综合性问题.

教学片断3

师:第(1)问的运算思路是什么?

生12:先对原函数求导,由导函数大(小)于零,得出原函数单调区间.

师:第(1)问属于一般运算问题,这位同学应用导数来求单调区间的思路是正确的.第(2)问看起来无从下手,第(1)问求得的单调区间对于第(2)问寻找解题思路是否有帮助呢?

生13:从第(1)问求出的单调区间,可以得到最大值.

师:第(2)问中的定义域为 $\mathbf{R}$, 而第(1)问是定义在区间 $(0, \pi)$ 上,怎么办?

生14:在(2)中,先判定原函数是周期函数,然后结合(1)的结论算出函数在一个周期内的最大值,最后可得不等式证明.

师:借助周期性将区间 $(0, \pi)$ 推广到全体实数是关键,在区间 $(0, \pi)$ 内根据(1)的结果求最大值,利用前后运算问题对比来寻找思路,考查的最值和周期性也属于常规问题.

教学思考 本题涉及的是利用求导来确定单调性,然后再求出给定区间上的极值,最后利用周期性拓广到 $\mathbf{R}$ 上的最值,仍然属于常规问题.

• 分析法为探究与选择运算思路打开一扇窗

分析法是从结论出发,结合已知条件,在前后问题对比中来寻找运算思路,是探究运算思路的常备方法.例如案例4第(3)问就可以利用分析法来探究解决问题的思路.

师: $\sin^2 x \sin^2 2x \sin^2 4x \cdots \sin^2 2^n x$ 与已知条件中函数的解析式是否有关联?

生15:在(3)中 $\sin^2 x \sin^2 2x \sin^2 4x \cdots \sin^2 2^n x = (\sin^3 x \sin^3 2x \sin^3 4x \cdots \sin^3 2^n x)^{\frac{2}{3}} = [\sin x (\sin^2 x \sin 2x) (\sin^2 2x \sin 4x) \cdots (\sin^2 2^{n-1} x \cdot \sin 2^n x) \sin^2 2^n x]^{\frac{2}{3}}$,然后结合(2)的结论和三角函数的有界性进行放缩即可证得题中的不等式.

师:根据(2)的结果得到函数在 $\mathbf{R}$ 上的最大值,第(3)问再对解析式变形,结合三角函数的放缩,三个问环环紧扣,前一个问题的结论为后一个问题的解决提供思路,通过分析法找到了解决这个问题的突破口.

教学思考 对于由几个问题组合而成的综合问题,问题之间是相互联系的,并不是孤立的.分析法实际上是“执果索因”,采用逻辑推理中“若 p 则 q ”形式,从结论出发,结合已知条件和前面已经解决问题的结论,逐步推理来解决问题.

1.4 在格式规范化基础上求得运算结果

在深入探究运算思路并能够作出正确选择之后,需要在格式规范化基础上才能够求得运算结果.结果呈现是数学思维的展示过程,规范化的运算结果能够清晰地展示解决问题的方法,它具有可复制性和可操作性.格式规范化包括:推理过程的合理性,定理、公理使用是否准确,数学符号使用、表达方式的规范性等.

• 逻辑推理的流畅化

在运算格式的规范化训练中,要做到有理有据,避免思维跳跃性过大,这样有助于逻辑思维的推进,并能够发现运算盲点.例如,在案例4的第(1)问中,首先把函数 $f(x)$ 运用降次公式或者二倍角公式进行化简,再求导,降低运算的难度.对于这一类常规问题遵循“先化简,再求导,后整理”的原则,做到思维过渡无障碍,提高运算的准确率.

• 书写表述的规范化

数学思维的展示中数学符号和表述方式都强

调严谨性.例如,在案例1中,向量 a 如果不加粗,表示的就不是向量,而是数量、线段、射线等.规范化表述也能够提高学生的审题能力,推进对涉及的定理、公理、公式的深度理解.

案例5 在某校高一的一次月考中有以下三道填空题:

1.已知幂函数 $y=f(x)$ 的图象经过点(9, 3),则函数 $f(x)$ 的解析式是_____.

2.函数 $y=\sqrt{\log_{\frac{1}{2}}(5x-2)}$ 的定义域为_____.

3.已知函数 $f(x)=\begin{cases} 2^x, & x \leq 1, \\ \log_3(x-1), & x > 1, \end{cases}$ 且 $f(x_0)=1$,则 $x_0=_____$.

教师在阅卷时候,发现了学生出现的一些典型错误解答,归纳如下:

(1)书写不规范: $y=f(x)=\sqrt{x}, x \in \{x | x \geq 0\}$; $\left\{ \frac{2}{5} < x \leq \frac{3}{5} \right\}$; $\frac{2}{5} < x \leq \frac{3}{5}$.正确的表述

方式应该为: $f(x)=\sqrt{x}; \left(\frac{2}{5}, \frac{3}{5} \right]$ 或者

$\left\{ x \left| \frac{2}{5} < x \leq \frac{3}{5} \right. \right\}$,显然这些错误折射出学生对于所涉及的知识点理解不到位.

(2)审题不清: $\{0, 4\}$,以及写成 $0/4$,没有搞清楚需要解决的问题,以及结果如何呈现.正确的表述方式应该为:0或4.这些貌似正确的答案,由于书写格式不规范或者表述不规范,造成前功尽弃.

教学思考 对于数学符号书写和逻辑思维呈现方式中易错的知识点,引导学生准备一个易错本,用以记录和整理平时在学习过程中遇到的错误.持之以恒的书写规范化训练,有助于提高运算素养,以及逻辑思维的严谨性.

2 解题教学中促进高中生数学运算素养发展的思考

“重记忆轻理解”是常见的数学运算能力培养误区,特别是运算较多的习题课教学,奉行“计算题记住公式就可以了”,不探究公式产生的背景、适用范围,也就是我们通常所说的“读不懂公式”“想当然地计算”,导致运算能力较弱,影响逻辑思维的发展.结合前面解题教学中促进高中生数学运算素养发展的途径分析,培养高中生数学运算素养还应关注下面几个方面.

2.1 寻找运算盲点,夯实数学运算基本技能

学生具有良好的运算素养表现在能够应用原有的知识和技能解决实际运算问题.在解题教学过程中教师应能发现学生的运算盲点,重视这些盲点,并探究盲点形成的原因,并把它作为提高运算素养的着眼点.另一方面,对于涉及的定理、公理、公式,并不是简单记忆,而去探究它们的背景和来源,达到溯本求源,减少数学运算盲点.当一个运算盲点出现的时候,学生要思考是公式记忆错误、公式应用错误,还是运算技能不足.举一反三,在熟能生巧中逐步促进运算素养的发展.例如,在案例1中所涉及的 $\mathbf{a} \parallel \mathbf{b}$ 和 $\sin \alpha \cos \alpha$,学生的运算盲点可能是:分不清向量平行、垂直满足的条件,或者对 $\sin \alpha, \cos \alpha, \tan \alpha$ 的相互关系不清楚和不会利用“化弦为切”方法,这些都需要在不断运算中寻找自己的盲点并加以纠正.再如,由案例2中 $f(\alpha)$ 的解析式联想到六组诱导公式的“奇变偶不变,符号看象限”规律,以及相互之间关系,并在归纳总结过程中审视哪个公式自己还掌握不牢,再对盲点进行针对性纠正.

2.2 动静结合,在归纳总结中促进逻辑推理思维发展

数学思维分为静态思维和动态思维,静态思维强调直观记忆,动态思维提倡主观能动性.在动静结合基础上对运算对象进行观察、比较以后,按照先易后难的原则寻找运算的突破口,结合复杂运算简单化,最终达到问题解决.另一方面,运算结束以后的自我检查是对于静态思维与动态思维进行归纳、总结、完善,也是提高数学运算速度和丰富解题技巧、培养运算素养的必备过程.例如,在案例1中求 $\sin \alpha \cos \alpha$ 的值,为了避免静态思维过多,学生容易产生疲劳,扩大了知识点涉及的范围,融合了向量的平行和垂直、三角函数之间关系、“化弦为切”等知识与技能,让学生的思维在动静结合中动起来.再如,在案例2中,由于涉及的诱导公式比较多,如果只是单纯化简,则静态思维过多,很容易产生思维疲劳感.教学中以此为线索拓广到复习所有的诱导公式,采用独立思考与小组合作相结合,形式多样的活动让更多的学生参与进来,特别是对于 $\sin\left(-\alpha + \frac{3\pi}{2}\right), \sin(-\pi -$

$\alpha), \cos(4\pi - \alpha)$ 的化简,结合总结“奇变偶不变,符号看象限”规律,充分将学生的静态思维和动态思维训练相结合,从而提高运算效率.

2.3 在挫折和成就中培养学生百折不挠的意志品质

数学运算过程中能够逐步培养学生良好的思维习惯、坚强的毅力、持之以恒的探求精神,以及严谨的科学态度、百折不挠的刚强意志.新课程标准注重考查学生的数学运算素养,强调通过数学运算引导学生的思维向纵深方向发展,使得学生具备分类与整合、函数与方程、数形结合、化归与转化、特殊与一般思想,能够促进学生的数学综合素养发展,引导学生会用数学眼光看待世界,会用数学思维去指导自己的生活.日本著名数学教育家米山国藏曾经说:“在学校学的数学知识,毕业后若没什么机会去用,一两年后,很快就忘掉了.然而,不管他们从事什么工作,唯有深深铭刻在心中的数学精神、数学思维方法、研究方法、推理方法和看问题的着眼点等,却随时随地发生作用,使他们终生受益.”^[2]

总之,数学运算素养拓宽了数学的应用范围,它也是解决数学问题的基本手段,但是学生数学运算素养的培养仍然是一个长期的过程.正如《中国学生发展核心素养》中提出:“学生发展核心素养是指学生应具备能够适应终身发展和社会发展需要的必备品格和关键能力.”^[3]良好数学运算素养有利于学生形成良好数学思维习惯,提升对于数学基础知识和基本技能的理解程度,它也是提高学生综合素养的重要抓手.与此同时,数学运算素养的培养过程体现“数学育人”特点,它重视知识的形成过程,通过挖掘教材中对于知识点的元认知,让数学学习回归数学教育本质.

参考文献

- [1] 中华人民共和国教育部.普通高中数学课程标准(2017年版)[M].北京:人民教育出版社,2018:7.
- [2] 米山国藏.数学的精神、思想和方法[M].成都:四川教育出版社,1986:10-11.
- [3] 赵婀娜,赵婷玉.《中国学生发展核心素养》发布[EB/OL].(2016-09-14)[2021-12-12].<http://edu.people.com.cn/n1/2016/0914/c1053-28714231.html>.