

对一道平面向量模考题的探究与思考

华志远 (江苏省无锡市第一中学 214031)

摘要:针对一道平面向量模考题得分率较低的情况,对试题背景、解法作深度探究,并对不同的思考方式作评估分析,透视学生在解题过程中思维受挫的原因,研究解题教学中如何运用波利亚的解题原则,引领学生走出思维误区.

关键词:平面向量;模考题;探究与思考

文章编号:1004-1176(2022)06-0062-03

在无锡市2021年秋学期高三期中考试,第20题是一道以三角形为背景的平面向量试题.统计表明,该题难度系数仅为0.15,得满分者更是寥若晨星.从题面上看,试题内容看似平实,实则内涵极为丰富;试题呈现方式简洁,提出问题逐级深入;涉及知识综合有度,方法灵活多样;具有较强的探索性,深度检测了数学素养,充分体现了新高考评价体系的精神,即把关键能力作为高考评价的核心指标和因素.从题干上看,本题从三角形的基本量和点线的位置关系出发,通过引入向量语言,使数与形有机结合.第(1)问是求两条线段的比值,属于几何问题;第(2)问是求两个向量数量积的最小值,属于代数问题,从而使试题具有较强的探索性和开放性,学生可以从平面向量的多个维度寻找解题突破口,并利用向量共线定理进行转化,而数量积的最值可利用基本不等式或求导获得答案.由于学生解答情况较差,因此我们对本题作重新研究、评估和反思.本文试图通过探索该题的命题背景,尝试一般的解题策略,依托数学思想方法,引领学生走出思维误区,以发展学生的能力和素养.

5 结束语

“通性通法”中,“通性”是概念所反映的数学基本性质,“通法”是概念所蕴含的思想方法.章建跃博士认为,在解题教学中要使学生逐步养成从基本概念、基本原理及其联系性出发思考 and 解决问题的习惯,要注重大巧若拙的通性通法,而不是将学生的注意吸引到技巧上^[5].本文探究了一种求解多面体外接球半径的一般思路,力求“做一题,会一类,通一片”.在解题和教学的过程中,要避免就题论题,要有从特殊到一般的探索意识,归纳和总结问题的共性和特点,从而获得问题的通法,提升能力并优化认知结构.

1 试题及背景分析

试题 在 $\triangle ABC$ 中,已知 $AB=2$, $AC=\sqrt{11}$, $\cos\angle BAC=\frac{5\sqrt{11}}{22}$, D 为 BC 的中点, E 为边 AB 上的一个动点, AD 与 CE 交于点 O .设 $\overrightarrow{AE}=x\overrightarrow{AB}$.

(1)若 $x=\frac{1}{4}$,求 $\frac{CO}{OE}$ 的值;

(2)求 $\overrightarrow{AO}\cdot\overrightarrow{CE}$ 的最小值.

分析 从几何维度去分析,本题第(1)问求两线段的比值,容易想到构造相似三角形求解,因 D 是 BC 的中点,故可以取 CE 的中点 F ,则 $DF\parallel$

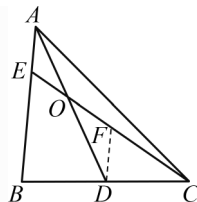


图1

BE ,且 $DF=\frac{1}{2}BE$ (图1).再由

$\triangle ODF\sim\triangle OAE$,得到 $\frac{OF}{OE}$ 的值,进而求得 $\frac{CO}{OE}$

的值.事实上,若将 $\triangle BEC$ 看成被直线 AD 所截,则由梅涅劳斯定理可直接得出结论,这正是这道试题的平面几何背景.

参考文献

- [1] 陈桂明.借球问道 提升想象 助力素养——“空间几何体的外接球”一轮复习与反思[J].中学数学月刊,2020(12):18-21.
- [2] 吴漫华.浅谈多面体外接球半径的求法[J].中学数学研究(华南师范大学版),2018(3):3-5.
- [3] 黄德新,朱贤良.模型视角下的四面体外接球问题[J].数学通讯,2020(15):56-59,63.
- [4] 魏欣.用公式法突破空间几何体的外接球问题[J].中学数学研究(华南师范大学版),2021(11):53,1-6.
- [5] 章建跃.注重通性通法才是好数学教学[J].中小学数学(高中版),2011(11):50.

从向量维度去分析,本题首先可以选定一组基向量 $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}$, 然后将 C, O, E 和 A, O, D 三点共线转化为向量的共线, 再利用共线向量定理进行转化. 也可以利用三点共线的一个重要模型, 即以 $\overrightarrow{AE}, \overrightarrow{AC}$ 为基向量, 则 C, O, E 三点共线的充要条件是 $\overrightarrow{AO} = \lambda \overrightarrow{AE} + \mu \overrightarrow{AC}$, 其中 $\lambda + \mu = 1$, 从而实现解题目标.

从建系维度去分析, 根据三角函数定义, 应以 A 为原点, AB 为 x 轴, 这样有利于写出各个点的坐标, 从而将向量问题转化为坐标的代数运算.

2 解法探究

(1) **解法 1** (利用相似三角形性质) 由题设, 得 $AE = \frac{1}{2}, BE = \frac{3}{2}$, 取 CE 的中点 F , 连结 DF , 则

$DF \parallel BE$, 且 $DF = \frac{1}{2}BE = \frac{3}{4}$. 由 $\triangle ODF \sim \triangle OAE$, 得 $\frac{FO}{EO} = \frac{DF}{AE} = \frac{3}{2}$, 于是 $\frac{CO}{OE} = \frac{CF + FO}{OE} = \frac{2FO + OE}{OE} = 4$.

解法 2 (利用梅涅劳斯定理) 在 $\triangle BEC$ 中, 直线 AD 与三边所在直线分别相较于 O, A, D , 得 $\frac{CO}{OE} \cdot \frac{EA}{AB} \cdot \frac{BD}{DC} = 1$. 由条件得 $\frac{EA}{AB} = \frac{1}{4}, \frac{BD}{DC} = 1$, 故 $\frac{CO}{OE} = 4$.

解法 3 (利用基向量法) 由 C, O, E 三点共线, 可设 $\overrightarrow{CO} = \lambda \overrightarrow{CE}$, 即 $\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AO} = \lambda(\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AE})$, 得 $\overrightarrow{AO} = (1 - \lambda)\overrightarrow{AC} + \lambda\overrightarrow{AB} = (1 - \lambda)\overrightarrow{AC} + \frac{\lambda}{4}\overrightarrow{AB}$. 同理, 可设 $\overrightarrow{AO} = y\overrightarrow{AD} = \frac{y}{2}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC})$. 由此得 $1 - \lambda = \frac{y}{2}, \frac{\lambda}{4} = \frac{y}{2}$, 解得 $\lambda = \frac{4}{5}, y = \frac{2}{5}$, 所以 $\frac{CO}{OE} = 4$.

解法 4 (利用重要模型) 设 $\overrightarrow{AO} = t\overrightarrow{AD}$, 因 $\overrightarrow{AD} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC})$, 故 $\overrightarrow{AO} = \frac{t}{2}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC})$. 由 C, O, E 三点共线, 可设 $\overrightarrow{AO} = \lambda\overrightarrow{AE} + (1 - \lambda)\overrightarrow{AC} = \frac{\lambda}{4}\overrightarrow{AB} + (1 - \lambda)\overrightarrow{AC}$. 由 $\frac{\lambda}{4} = \frac{t}{2}, 1 - \lambda = \frac{t}{2}$, 得 $\lambda = \frac{4}{5}, t = \frac{2}{5}$. 于是 $\overrightarrow{CO} = \overrightarrow{AO} - \overrightarrow{AC} = \frac{1}{5}\overrightarrow{AB} - \frac{4}{5}\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{OE} = \overrightarrow{AE} - \overrightarrow{AO} = \frac{1}{4}\overrightarrow{AB} - \frac{1}{20}\overrightarrow{AC} - \frac{1}{5}\overrightarrow{AC}$, 故 $\overrightarrow{CO} = 4\overrightarrow{OE}$, 即 $\frac{CO}{OE} = 4$.

$\frac{1}{5}\overrightarrow{AC}$, 故 $\overrightarrow{CO} = 4\overrightarrow{OE}$, 即 $\frac{CO}{OE} = 4$.

解法 5 (建立坐标系法)

以 A 为坐标原点, AB 为 x 轴, 建立直角坐标系(图 2). 由三角函数的定义得 $C\left(\frac{5}{2}, \frac{\sqrt{19}}{2}\right)$,

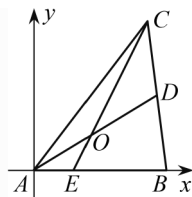


图 2

BC 的中点 $D\left(\frac{9}{4}, \frac{\sqrt{19}}{4}\right)$. 设

$O(x_0, y_0)$, 由 $\overrightarrow{AO} \parallel \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{EO} \parallel \overrightarrow{EC}$, 而 $\overrightarrow{AO} = (x_0, y_0), \overrightarrow{AD} = \left(\frac{9}{4}, \frac{\sqrt{19}}{4}\right), \overrightarrow{EO} = \left(x_0 - \frac{1}{2}, y_0\right),$

$\overrightarrow{EC} = \left(2, \frac{\sqrt{19}}{2}\right)$, 故 $\frac{\sqrt{19}}{4}x_0 = \frac{9}{4}y_0, \frac{\sqrt{19}}{2}\left(x_0 - \frac{1}{2}\right) = 2y_0$, 解得 $x_0 = \frac{9}{10}, y_0 = \frac{\sqrt{19}}{10}$. 设 $\overrightarrow{CO} = \lambda\overrightarrow{OE}$, 解得

$\lambda = 4$, 于是 $\frac{CO}{OE} = 4$.

解法 6 (利用解析几何法) 建系写坐标与解法 5 类似, 只是在求点的坐标时, 由直线 $AD: y = \frac{\sqrt{19}}{9}x$ 及直线 $CE: y = \frac{\sqrt{19}}{4}\left(x - \frac{1}{2}\right)$, 求得它们的

交点坐标 $O\left(\frac{9}{10}, \frac{\sqrt{19}}{10}\right)$, 再利用距离公式, 求得

$\frac{CO}{OE} = 4$.

(2) **解法 1** (与(1)中解法 1 类似) 由题意, 得 $AE = 2x, BE = 2 - 2x, DF = 1 - x$. 由 $\triangle AOE \sim \triangle DOF$, 得 $\frac{AO}{DO} = \frac{2x}{1 - x}$, 故 $\frac{AO}{AD} = \frac{2x}{1 + x}$, 于是

$\overrightarrow{AO} = \frac{2x}{x + 1}\overrightarrow{AD} = \frac{x}{x + 1}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}), \overrightarrow{CE} = \overrightarrow{AE} - \overrightarrow{AC} = x\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC}$, 从而 $\overrightarrow{AO} \cdot \overrightarrow{CE} = \frac{x}{x + 1}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}) \cdot (x\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC}) = \frac{x}{x + 1}[x\overrightarrow{AB}^2 + (x - 1)\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AC}^2] = \frac{9x^2 - 16x}{x + 1}$. 令 $x + 1 = t$, 由 $x \in [0, 1]$, 得 $t \in [1, 2]$. 于是 $\overrightarrow{AO} \cdot \overrightarrow{CE} = \frac{9t^2 - 34t + 25}{t} = 9t + \frac{25}{t} - 34 \geq 2\sqrt{9t \cdot \frac{25}{t}} - 34 = -4$, 当且仅当 $9t = \frac{25}{t}, t = \frac{5}{3}$, 即 $x = \frac{2}{3}$ 时, $\overrightarrow{AO} \cdot \overrightarrow{CE}$ 的最小值为 -4 .

解法 2 (与(1)中解法 3 类似) $\overrightarrow{AO} \cdot \overrightarrow{CE} = [(1 - \lambda)\overrightarrow{AC} + \lambda\overrightarrow{AB}] \cdot (-\overrightarrow{AC} + x\overrightarrow{AB}) = 11\lambda -$

$11+4\lambda x^2+5x(1-2\lambda)$.由(1)中解法3得 $1-\lambda=\frac{y}{2}$, $\lambda x=\frac{y}{2}$, 解得 $\lambda=\frac{1}{1+x}$, 代入上式, 得 $\overrightarrow{AO} \cdot \overrightarrow{CE}=\frac{9x^2-16x}{x+1}$. 设 $f(x)=\frac{9x^2-16x}{x+1}$, $x \in [0,1]$, 则 $f'(x)=\frac{9x^2+18x-16}{(x+1)^2}=\frac{(3x+8)(3x-2)}{(x+1)^2}$. 令 $f'(x)=0$, 得 $x=\frac{2}{3}$, 故当 $x \in \left[0, \frac{2}{3}\right)$ 时, $f'(x)<0$, $f(x)$ 在 $\left[0, \frac{2}{3}\right)$ 上单调递减; 当 $x \in \left(\frac{2}{3}, 1\right]$ 时, $f'(x)>0$, $f(x)$ 在 $\left(\frac{2}{3}, 1\right]$ 上单调递增, 故当 $x=\frac{2}{3}$ 时, $f(x)$ 有极小值, 也是最小值. 由 $f\left(\frac{2}{3}\right)=-4$, 得 $\overrightarrow{AO} \cdot \overrightarrow{CE}$ 的最小值为 -4 .

解法3 (与(1)中解法4类似) $\overrightarrow{AO}=\frac{t}{2}(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC})=\frac{t}{2x}\overrightarrow{AE}+\frac{t}{2}\overrightarrow{AC}$, 由 C, O, E 三点共线, 得 $\frac{t}{2x}+\frac{t}{2}=1$, $t=\frac{2x}{x+1}$, 于是 $\overrightarrow{AO}=\frac{x}{x+1}(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC})$, 后面同上.

解法4 (与(1)中的解法5、6类似) 设 $O(x_0, y_0)$, $E(2x, 0)$, 则 $\overrightarrow{AO}=(x_0, y_0)$, $\overrightarrow{AD}=\left(\frac{9}{4}, \frac{\sqrt{19}}{4}\right)$, $\overrightarrow{EO}=(x_0-2x, y_0)$, $\overrightarrow{EC}=\left(\frac{5}{2}-2x, \frac{\sqrt{19}}{2}\right)$. 由 $\overrightarrow{AO} \parallel \overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{EO} \parallel \overrightarrow{EC}$ 得 $\frac{\sqrt{19}}{4}x_0=\frac{9}{4}y_0$, $\frac{\sqrt{19}}{2}(x_0-2x)=\left(\frac{5}{2}-2x\right)y_0$, 解得 $x_0=\frac{9x}{2x+2}$, $y_0=\frac{\sqrt{19}x}{2x+2}$ (也可用解析几何求交点的方法求得答案). 于是求得 $\overrightarrow{AO} \cdot \overrightarrow{CE}=\frac{9x^2-16x}{x+1}$, 后面同上.

3 解法评价

数学解题中,不同的思维视角对解题的长度、逻辑推理及数学运算产生较大影响,其中确立思维的起点最为重要.以《平面向量》一章为例,通常可以从几何法、基向量法、坐标法、数量积等作为思维的开启,在解题目标的驱使下作合理的选择、调整和实施.如本题若从图形上加以整体分析,则

利用平面几何知识,可使解题显得一气呵成、简洁明了,这对学生的直观想象素养提出了要求;若从向量角度思考,则要选好基向量,并通过其线性运算,结合向量的共线找到其中的内在联系,但由于本题图形中涉及的点线较多,许多学生解题时产生了“原地打转”的现象,思维缺乏进阶;若从坐标法去分析思考,则关键要建立适当的坐标系,写出相关点及向量的坐标,同时对数学运算的目的性、条理性及准确性提出了较高的要求.由此可见,只有让学生形成大单元的视野,掌握主干知识结构和体系,依据数学思想方法,才能自然地找到思维的起点,并在思维导图的引领下,实现解题的目标.从考试卷面上看,首先众多学生面对问题无所适从,因而零分率超过60%,说明在复习教学中,学生的认知体系构建存在不足;其次是解题的目标意识不强,在探寻结论与条件的关系时,找不到中间转化的量(线段长、向量或坐标),从而使思维受挫;再次是逻辑推理、数学运算、直观想象等数学素养有待进一步提高,尤其是利用坐标法求解的学生,无论从坐标系的建立,还是运算的正确率都有待加强.

4 走出解题困境

著名数学及教育家G·波利亚在《怎样解题》一书中,将数学解题分为四个步骤,即审题联想、拟定计划、实施解答和回顾反思.审题联想是从宏观上要求解题者理解题意,弄清条件与结论,并产生有效联想,从而找到解目标,其中包括信息的获取与检索、题目与知识的关联性以及思维起点的确立等;拟定计划是从中观上要求解题者在明晰方向后,形成具有可操作性的解题步骤.即从条件与结论的联系出发,运用数学思想方法作引领,尽量将复杂的、陌生的问题化归为简单的、熟悉的问题;实施解答是从微观层面上动手操作,要求解题者利用数学知识和通性通法,进行有条理的推理和演算,并在解题过程中加以监控、调整和优化;回顾反思则是指既要总结解题成功的经验,又要反思解题失败的教训,并从认识论、方法论、价值论的维度加以提炼,促进解题者理性思维的发展,从而不断积累数学活动经验,提高“元认知”能力.以这道模拟考题为例,如果我们从这一解题理论去指导学生分析和解决问题,那么对学生构建《平面向量》一章的认知结构、优化思维品质、提升关键能力,都会起到积极的引领作用.