对一道解三角形求取值范围问题的思考*

吕佳峻　（山东省平度市第九中学 2020 级 4 班　266700）　指导教师　姜尚鹏

摘　要：数学学习不仅要学会基本的知识、思想和方法，更重要的是要学会数学地思考问题．以一道高考题为例，不仅对知识、思想和方法进行了梳理，还展示了学习过程中对这个问题的完整思考过程，为学生学会数学地思考问题提供了一定的参考．

关键词：解三角形；高考题；数学思考

文章编号：1004-1176(2022)06-0077-03

1　问题提出

近期做了一道有关解三角形的高考题，题目如下：

题目 1　（2020 年浙江卷 18 题）在锐角 $\triangle ABC$ 中，角 A，B，C 的对边分别为 a，b，c，且 $2b\sin A-\sqrt{3}a=0$．

（1）求角 B；

（2）求 $\cos A+\cos B+\cos C$ 的取值范围．

第（1）题求角 B，条件中只给了一个等式，那么我们就要把这个等式化简，通常有两种方法：一是全部化成边，二是全部化成角．而这道题很明显，采用化角的方法，把等式中的边全部通过正弦定理化成角的正弦的形式，化简后得出 $\sin B=\frac{\sqrt{3}}{2}$，因为题目中说是锐角 $\triangle ABC$，所以角 $B=\frac{\pi}{3}$．

第（2）题，因为知道了角 B，实际上就是求 $\cos A+\cos C$．对于双变量问题，我们习惯化成单变量问题解决，这样这个题的关键就是怎样把两个角化成一个角．$\cos A$ 可以化成 $\cos(\pi-B-C)$，再通过诱导公式化简，因为角 B 在第（1）题已经求出，所以原式就转化成了只含一个变量的式子，又因为三角形是锐角 $\triangle ABC$，即三个角都是锐角，所以可求出角 C 的取值范围，进而求出原式的取值范围．

下面是解答过程．

解　（1）由 $2b\sin A=\sqrt{3}a$ 结合正弦定理，可得 $2\sin B\sin A=\sqrt{3}\sin A$，所以 $\sin B=\frac{\sqrt{3}}{2}$．因为 $\triangle ABC$ 为锐角三角形，故 $B=\frac{\pi}{3}$．

（2）结合（1）的结论，有 $\cos A+\cos B+\cos C=\cos\left(\frac{2\pi}{3}-C\right)+\frac{1}{2}+\cos C=-\frac{1}{2}\cos C+\frac{\sqrt{3}}{2}\sin C+\cos C+\frac{1}{2}=\frac{\sqrt{3}}{2}\sin C+\frac{1}{2}\cos C+\frac{1}{2}=\sin\left(C+\frac{\pi}{6}\right)+\frac{1}{2}$．由 $\begin{cases}0<\frac{2\pi}{3}-C<\frac{\pi}{2},\\0<C<\frac{\pi}{2}\end{cases}$ 可得 $\frac{\pi}{6}<C<\frac{\pi}{2}$，所以 $\frac{\pi}{3}<C+\frac{\pi}{6}<\frac{2\pi}{3}$，则 $\sin\left(C+\frac{\pi}{6}\right)\in\left(\frac{\sqrt{3}}{2},1\right]$，故 $\sin\left(C+\frac{\pi}{6}\right)+\frac{1}{2}\in\left(\frac{\sqrt{3}+1}{2},\frac{3}{2}\right]$．即 $\cos A+\cos B+\cos C$ 的取值范围是 $\left(\frac{\sqrt{3}+1}{2},\frac{3}{2}\right]$．

这道题目的解答比较常规，也没有什么特别难的地方，但研究高考题关键是从高考题中总结出高考题考查的方向，从而为迎接后面的高考做准备，所以我对这道高考题进行了深入的思考．

2　几点思考

2.1　从三角函数的名称角度进行变式

思考 1　既然高考题可以考查两个角余弦的和的取值范围，那是不是也可以考查两个角正弦的和的取值范围呢？

题目 2　在锐角 $\triangle ABC$ 中，已知角 $B=\frac{\pi}{3}$，求 $\sin A+\sin C$ 的取值范围．

解　$\sin A+\sin C=\sin(B+C)+\sin C=$

* 本文系 2020 年度山东省教育教学研究课题“新高考背景下高中数学校本课程的开发与实施研究”（编号：2020JXQ074）和青岛市教育科学“十三五”规划课题“新课程背景下高中数学校本课程的开发与实施研究”（编号：QJK135C1211）的阶段性成果．

$\sin\frac{\pi}{3}\cos C+\cos\frac{\pi}{3}\sin C+\sin C=\frac{\sqrt{3}}{2}\cos C+\frac{3}{2}\sin C=\sqrt{3}\sin\left(C+\frac{\pi}{6}\right)$.后面只需要根据角 C 的取值范围求解即可,不再详细解答.

2.2 从三角函数的运算角度进行变式

思考 2 既然可以考查两个角正弦的和的取值范围,那是不是也可以考查它们的差、积、商的取值范围呢?

题目 3 在锐角 $\triangle ABC$ 中,已知角 $B=\frac{\pi}{3}$,求 $\sin A-\sin C$ 的取值范围.

解析 $\sin A-\sin C=\sin(B+C)-\sin C=\frac{\sqrt{3}}{2}\cos C-\frac{1}{2}\sin C=-\sin\left(C-\frac{\pi}{3}\right)$,下略.

题目 4 在锐角 $\triangle ABC$ 中,已知角 $B=\frac{\pi}{3}$,求 $\sin A\sin C$ 的取值范围.

解析 $\sin A\sin C=\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\cos C+\frac{1}{2}\sin C\right)\sin C=\frac{\sqrt{3}}{4}\sin 2C-\frac{1}{4}\cos 2C+\frac{1}{4}=\frac{1}{2}\sin\left(2C-\frac{\pi}{6}\right)+\frac{1}{4}$,下略.

题目 5 在锐角 $\triangle ABC$ 中,已知角 $B=\frac{\pi}{3}$,求 $\frac{\sin A}{\sin C}$ 的取值范围.

解析 $\frac{\sin A}{\sin C}=\frac{\frac{\sqrt{3}}{2}\cos C+\frac{1}{2}\sin C}{\sin C}=\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{1}{\tan C}+\frac{1}{2}$,下略.

通过搜集其他高考题发现,题目 5 的类型确实在 2019 年全国统一高考数学试卷(新课标 III 文)考查过,题目如下:

$\triangle ABC$ 的内角 A,B,C 的对边分别为 a,b,c,已知 $a\sin\frac{A+C}{2}=b\sin A$.

(1)求 B;

(2)若 $\triangle ABC$ 为锐角三角形,且 $c=1$,求 $\triangle ABC$ 面积的取值范围.

解 (1)略,可求得 $B=\frac{\pi}{3}$.

(2)由正弦定理 $\frac{a}{\sin A}=\frac{c}{\sin C}$,得 $a=\frac{c\sin A}{\sin C}=\frac{\sin A}{\sin C}$.由三角形面积公式有 $S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}ac\sin B=\frac{1}{2}\cdot\frac{\sin A}{\sin C}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{\sqrt{3}}{4}\cdot\frac{\sin(B+C)}{\sin C}=\frac{\sqrt{3}}{4}\cdot\frac{\sin\frac{\pi}{3}\cos C+\cos\frac{\pi}{3}\sin C}{\sin C}=\frac{3}{8}\cdot\frac{1}{\tan C}+\frac{\sqrt{3}}{8}$.因为 $\triangle ABC$ 是锐角三角形,由(1)知 $B=\frac{\pi}{3}$,$A+B+C=\pi$,得到 $A=\frac{2\pi}{3}-C$,故 $\begin{cases}0<C<\frac{\pi}{2},\\0<A<\frac{\pi}{2},\end{cases}$ 即 $\begin{cases}0<C<\frac{\pi}{2},\\0<\frac{2\pi}{3}-C<\frac{\pi}{2},\end{cases}$ 解得 $\frac{\pi}{6}<C<\frac{\pi}{2}$.故 $\tan C>\frac{\sqrt{3}}{3}$,故 $\frac{\sqrt{3}}{8}<\frac{3}{8}\cdot\frac{1}{\tan C}+\frac{\sqrt{3}}{8}<\frac{\sqrt{3}}{2}$,即 $\frac{\sqrt{3}}{8}<S_{\triangle ABC}<\frac{\sqrt{3}}{2}$.故 $S_{\triangle ABC}$ 的取值范围是 $\left(\frac{\sqrt{3}}{8},\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$.

第(2)题的解答过程是不是与题目 5 的解答惊人地相似?心中油然而生一种自豪感,原来我也可以命制高考题了.

2.3 从三角形中边的角度进行变式

思考 3 三角形的元素分为角和边,前面主要都是求角的正弦或余弦的取值范围,那么是不是也可以求边的取值范围呢?

题目 6 在 $\triangle ABC$ 中,已知角 $B=\frac{\pi}{3}$,$b=3$,求 $a+c$ 的取值范围.

方法 1 我们可以用化角的方法转化成我们熟悉的题目.$a+c=2\sqrt{3}\sin A+2\sqrt{3}\sin C=6\sin\left(C+\frac{\pi}{6}\right)$.后面只需要根据角 C 的取值范围求解即可,不再详细解答.

方法 2 由于求的是两个变量的和的取值范围,所以还可以考虑利用基本不等式求解.因为 $\cos B=\frac{a^2+c^2-b^2}{2ac}$,所以 $ac=a^2+c^2-9$,故 $(a+c)^2-9\leqslant 3\left(\frac{a+c}{2}\right)^2$,从而 $a+c\leqslant 6$.因为 $a+c>b=3$,所以 $a+c\in(3,6]$.

思考 4　三角形内角的三角函数之间可以通过加减乘除求取值范围，那三角形的边是不是也可以通过加减乘除求取值范围呢？下面让我们来研究一下吧！

题目7　在△ABC中，已知角 $B=\frac{\pi}{3}$，$b=3$，求 $a-c$ 的取值范围．

题目8　在△ABC中，已知角 $B=\frac{\pi}{3}$，$b=3$，求 ac 的取值范围．

题目9　在△ABC中，已知角 $B=\frac{\pi}{3}$，$b=3$，求$\frac{a}{c}$的取值范围．

题目 7—9 很显然都可以化成边对应角的正弦求解，转化成前面熟悉的问题，对于题目 8 还可以用基本不等式求解．

2.4　从三角形中边的几何意义进行变式

思考 5　由题目 1 我发现，命题老师没有简单考查 $\cos A+\cos C$ 的取值范围，而是考查了 $\cos A+\cos B+\cos C$ 的取值范围，所以我想题目 6 考查 $a+c$ 的取值范围，是不是也可以考查 $a+b+c$ 的取值范围呢？这样的好处是三条边的和有几何意义，可以直接说求△ABC 的周长的取值范围．

题目10　在△ABC中，已知角 $B=\frac{\pi}{3}$，$b=3$，求△ABC 周长的取值范围．

思考 6　同样，对于求 ac 的取值范围，也可以赋予这个式子几何意义，改成求△ABC面积的取值范围．

题目11　在△ABC中，已知角 $B=\frac{\pi}{3}$，$b=3$，求△ABC 面积的取值范围．

思考 7　既然有些式子是有相应的几何意义的，那是不是可以借助于几何意义解题呢？

对于题目 11，可以把 ac 转化成角的正弦，即对$3\sqrt{3}\sin A\sin C$求解取值范围，也可以直接利用基本不等式求解，实际上还可以采用数形结合的思想利用几何意义进行求解：$\frac{b}{\sin B}=2R$ 是一个定值，而 R 是三角形外接圆的半径，我们就可以把三角形的外接圆画出来，把边 b 当成底，当边 b 上的高最大时，△ABC 的面积最大．显然，边 b 上的高过圆心时最大，即此时△ABC 的面积最大，当边 b 上的高为 0 时，△ABC 的面积最小．

关于求△ABC 周长和面积的取值范围也是高考命题的热点，原来出题老师是经历了这样的一个过程才命制出来的，不得不佩服，出题老师真的是煞费苦心了．

这样，就可以总结出解三角形中求取值范围问题的解决策略：(1) 化角 —— 转化为一元函数求取值范围；(2) 化边 —— 结合基本不等式求取值范围；(3) 化形 —— 利用数形结合思想求取值范围．

3　结束语

通过这次对高考题深入的思考，我发现自己对解三角形知识的认知更上一层楼，并且发现原来高考题不是随便命制出来的，也是有一定的命制原则的．当我们能从数学的思维和逻辑出发，对高考题多思考一下，说不定我们也可以命制出高考题．同时，我也发现命制一道高考题凝聚了命题人的心血，因此，在后面的数学学习生活中，我会用更加认真的态度来对待数学，并怀着崇敬的心情求解数学题．

指导教师点评：吕佳峻同学的这篇文章，从学生的视角给我们展现了对于一道高考题，可以从哪些角度进行思考．他先从简单的变换角的三角函数名入手进行变式，之后上升到运算的变式，再之后由角过渡到边的变式，最后又赋予了边的运算相应的几何意义进行变式，整个思维过程层层深入，思考也越来越有深度，很好地展现了一位高中生良好的数学素养．同时关于求解解三角形中取值范围问题的解决策略也是不断地增加，从最初的“化角”，到中间的“化边”，到最后的“化形”，解法不断完善．题目的不断变式，体现了吕佳峻同学掌握知识的广度和思考问题的深度；解法的不断完善，体现了吕佳峻同学解决问题能力的厚度，这篇文章为高中生如何思考数学问题提供了范例，值得借鉴．