

不患浮云遮望眼 只缘“构造”在心头

——几种构造函数的方法在高考解题中的运用

周 萍 (江苏省昆山经济技术开发区高级中学 215300)

摘 要:通过同构、放缩、极值点偏移等方法构造函数解决有关高考试题.

关键词:高考试题;构造函数

文章编号:1004-1176(2022)07-0076-02

函数是高中数学的重要内容,近几年间构造函数法在高考试题中屡次出现.本文介绍几种构造函数的方法来解决高考数学试题.

1 用同构法构造函数

1.1 简单的函数构造

例 1 (2021 年扬州一模) 已知 $\alpha \in [0, \pi]$, $\beta \in \left[-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right]$, $\lambda \in \mathbf{R}$, 且 $\alpha^3 - \cos \alpha - \lambda = 0$, $\left(\frac{\pi}{2} - 2\beta\right)^3 - 2\sin \beta \cos \beta - \lambda = 0$, 若 $\cos \alpha = \frac{4}{5}$, 则 $\tan \beta$ 的值为().

A. $\frac{1}{2}$ B. $\frac{1}{3}$ C. $\sqrt{3}$ D. 3

解析 依题意得 $\left(\frac{\pi}{2} - 2\beta\right)^3 - \cos\left(\frac{\pi}{2} - 2\beta\right) - \lambda = 0$, 故可构造函数 $f(x) = x^3 - \cos x - \lambda$, $x \in [0, \pi]$, 再利用导数及单调性解决.

点评 通过观察, 这两个方程相似, 所以只需结合三角公式将第二个方程进行适当的变形, 便可得出与第一个方程相同的形式, 再构造函数.

例 2 (2021 年南通一模) 若 $a \ln a > b \ln b > c \ln c = 1$, 则下列关系正确的是().

A. $e^{b+c} \ln a > e^{c+a} \ln b > e^{a+b} \ln c$
 B. $e^{c+a} \ln b > e^{b+c} \ln a > e^{a+b} \ln c$
 C. $e^{a+b} \ln c > e^{c+a} \ln b > e^{b+c} \ln a$
 D. $e^{a+b} \ln c > e^{b+c} \ln a > e^{c+a} \ln b$

解析 由于选项形式较复杂, 很难直接入手, 故在不等式的两边同除以 e^{a+b+c} , 将选项统一成比较 $\frac{\ln a}{e^a}, \frac{\ln b}{e^b}, \frac{\ln c}{e^c}$ 的大小. 再构造函数 $f(t) = \frac{\ln t}{e^t}$ 以及 $g(x) = x \ln x$ 来解决问题.

1.2 对称法构造函数

例 3 (2019 年郑州三模) 已知 $f(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上存在导函数 $f'(x)$, 对任意 $x \in \mathbf{R}$, 有 $f(x) - f(-x) =$

x^3 , 在 $(0, +\infty)$ 上有 $2f'(x) - 3x^2 > 0$, 若 $f(m-2) - f(m) \geq -3m^2 + 6m - 4$, 则实数 m 的取值范围是().

A. $[-1, 1]$ B. $(-\infty, 1]$
 C. $[1, +\infty)$ D. $(-\infty, -1] \cup [1, +\infty)$

解析 构造函数 $g(x) = f(x) - \frac{1}{2}x^3$, 原不等式等价于 $g(m-2) - g(m) - 3m^2 + 6m - 4 \geq -3m^2 + 6m - 4$, 即 $g(m-2) \geq g(m)$, 可得 $m \in (-\infty, 1]$.

点评 本题的构造需要具备一定的直觉思维, 从原函数形式入手, 结合 $f(x) - f(-x) = x^3$ 的变形 $f(x) - \frac{1}{2}x^3 = f(-x) + \frac{1}{2}x^3$, 使其左右产生对称形式, 从而构造新函数.

1.3 e^x 与 $\ln x$ 型同构式构造函数

此类同构式常用形式有 xe^x 和 $x \ln x$, 即 $xe^x = e^{\ln x} x$, $x \ln x = (\ln x) e^{\ln x}$; 还有 $x + e^x$ 和 $x + \ln x$, 即 $x + e^x = e^{\ln x} + e^x$, $x + \ln x = e^{\ln x} + \ln x$.

例 4 (2021 年苏州 4 月联考) 已知 $f(x) = e^{kx} - 2 \cdot \frac{\ln x}{kx} + 1$ ($k \neq 0$), $g(x) = x \ln x$, 若 $kf(x) \geq 2g(x)$, 对任意 $x \in (0, +\infty)$ 恒成立, 则 k 的范围为().

A. $[1, +\infty)$ B. $[e, +\infty)$
 C. $\left[\frac{1}{e}, +\infty\right)$ D. $\left[\frac{2}{e}, +\infty\right)$

解析 依题意 $ke^{kx} - 2 \cdot \frac{\ln x}{x} + k \geq 2x \cdot \ln x \Leftrightarrow kxe^{kx} + kx \geq (\ln x^2) e^{\ln x^2} + \ln x^2$, 于是构造同构函数 $g(t) = te^t + t$, 由对称式 $g(kx) > g(\ln x^2)$ 可得 $x \in \left[\frac{2}{e}, +\infty\right)$.

例 5 (2020 年新高考全国 I 卷) 已知函数 $f(x) = ae^{x-1} - \ln x + \ln a$.

(1) 略; (2) 若 $f(x) \geq 1$, 求 a 的取值范围.

解析 由 $ae^{x-1} - \ln x + \ln a \geq 1 \Leftrightarrow e^{\ln a + x - 1} + \ln a + x - 1 \geq x + \ln x$, 可以构造同构函数 $g(t) = t + \ln t$, 有 $e^{\ln a + x - 1} \geq x \Rightarrow a \geq \frac{x}{e^{x-1}}$, 故 $a \geq 1$.

点评 同构式函数其实是复合函数的另一种改写方式, 只要复合函数能解决的问题, 同构式基本可随之解决. 近几年高考中的一些不等式恒成立求参数范围问题、零点存在问题及不等式证明中, 用同构式的方法屡现.

以上构造函数的方法主要可通过因式分解、移项、通分、除以同因式、两边取对数等手段, 将方程或不等式“改头换面”, 使其变成结构相同的方程或不等式, 亦或是复合函数形式等, 进而构造出较易解决的新函数. 这就要求善于观察题设中的函数形式, 挖掘其本质, 并熟悉常见的函数形式, 抽丝剥茧, 系统分析.

2 用放缩法构造函数

在高中压轴题中, 不等式的证明或者参数范围的求解往往蕴含较复杂的形式, 需要利用不等式的传递性, 将原有形式进行放大或缩小, 进而简化求解过程. 高中阶段最常用的有三种放缩, 其原理都是利用曲线的切线, 将指数、对数、三角函数放缩成一次函数形式.

2.1 基于指数放缩 $e^x \geq x + 1$ 构造函数

例6 (2021年苏州期初调研) 已知函数 $f(x) = xe^{ax} - \ln x$, 其中 $a > 0$.

(1) 略; (2) 对于给定的常数 a , 若 $f(x) \geq bx + 1$ 对 $x \in (0, +\infty)$ 恒成立, 求证: $b \leq a$.

解析 (2) 设 $u(t) = e^t - t - 1$, 易得 $e^t \geq t + 1$. 依题意 $b \leq e^{ax} - \frac{\ln x}{x} - \frac{1}{x}$ 对 $x \in (0, +\infty)$ 恒成立, 设 $g(x) = \frac{xe^{ax} - \ln x - 1}{x}$, 则 $g(x) \geq \frac{ax + \ln x + 1 - \ln x - 1}{x} = a$, 当 $ax + \ln x = 0$ 时取“=”. 又存在 $x_0 \in (e^{-a}, 1)$, 使得 $\varphi(x_0) = 0$, 即 $ax_0 + \ln x_0 = 0$ 有唯一解 $x_0 \in (e^{-a}, 1)$, 得证.

点评 本题函数结构较复杂, 所以先“同构”, 使得变量统一成 $ax + \ln x$ 这一整体, 再立足于指数放缩式 $e^x \geq x + 1$, 得到 $e^{ax + \ln x} \geq ax + \ln x + 1$, 最终达到消除变量的目的.

2.2 基于对数放缩 $x - 1 \geq \ln x$ 构造函数

例7 (2021年南京一模) 设函数 $f(x) = ax + e^{-x}$ ($a > 1$).

(1) 求证: $f(x)$ 有极值点;

(2) 设 $f(x)$ 的极值点为 x_0 , 若对任意正整数 a 都有 $x_0 \in (m, n)$, 其中 $m, n \in \mathbf{Z}$, 求 $n - m$ 的最小值.

解析 (1) 当 $x = \log_{ae} \frac{1}{\ln a}$ 时, 函数 $f(x)$ 有极值.

(2) 由 (1) 知 $x_0 = \log_{ae} \frac{1}{\ln a} = -\frac{\ln(\ln a)}{\ln a + 1}$. 令 $\ln a = k$, 易证 $\ln k \leq k - 1$, 所以 $x_0 = -\frac{\ln k}{k + 1} \geq -\frac{k - 1}{k + 1} > -1$. 又当 $k \geq \ln 3$ 时, $x_0 = -\frac{\ln k}{k + 1} < 0$. 又 $\frac{1}{\ln 2} < e$, 当 $k = \ln 2$ 时, $x_0 = -\frac{\ln(\ln 2)}{\ln 2 + 1} > 0$, $x_0 = \frac{\ln(\ln 2)^{-1}}{\ln 2 + 1} < \frac{\ln e}{\ln 2 + 1} < 1$, 故 $x_0 \in (-1, 1)$ 恒成立, 且存在 $a = 2$, 使 $x_0 \in (0, 1)$, 存在 $a = 3$, 使 $x_0 \in (-1, 0)$, $(n - m)_{\min} = 2$.

点评 本题中涵盖除变量 x 外的某些参数, 受其结构和参数的影响, 其处理步骤无法顺利进行, 所以采用对数放缩 $x - 1 \geq \ln x$, 简化求解过程.

2.3 基于三角放缩 $\sin x \leq x \leq \tan x$ 构造函数

例8 (2021年八省联考) 已知函数 $g(x) = e^x + \sin x + \cos x$.

(1) 略; (2) 若 $g(x) \geq 2 + ax$, 求 a .

解析 (2) 当 $x = 0$ 时, 成立. 当 $x > 0$ 时, $a \leq \frac{e^x + \sin x + \cos x - 2}{x}$, 由 $\varphi(x) = x - \sin x$ ($x > 0$) 易证 $\sin x < x$, 则 $a \leq \frac{e^x + \sin x + \cos x - 2}{x} < \frac{e^x + x + 1 - 2}{x} = \frac{e^x - 1}{x} + 1$. 又由指数放缩 $e^x > x + 1$ ($x > 0$) 得 $e^x - 1 > x$, 所以 $a \leq 2$.

当 $x < 0$ 时, 同理可得 $a \geq 2$, 故 $a = 2$.

点评 本题将三角放缩和指数放缩完美结合, 化曲为直, 使放缩这一构造函数的方法在导数不等式的求解中大放异彩.

3 极值点偏移条件下的函数构造

在“极值点偏移”条件下构造函数, 一般用于 $f(x)$ 是连续函数, 在 (x_1, x_2) 上有唯一极值点 x_0 , 且在 $f(x_1) = f(x_2)$ 成立的前提下, x_1, x_2 与极值点 x_0 之间不等关系的证明. 处理这类问题主要有以下两种方法.

3.1 主元对称化构造函数

例9 (2021年新高考卷) 已知 $f(x) = x(1 - \ln x)$.