

从元认知视角探究“数学写作”^{*}

钟进均 (广东省广州市铁一中学 510440)

唐志威 (广州大学 510006)

摘要: 数学学习的主要心理过程是思维,思维与元认知又有着紧密的联系.从元认知视角对一篇高中生数学写作展开案例探究,得出以下结论:数学写作有助于拓展学生数学学习中的元认知知识,增强学生数学学习的元认知体验,提高学生数学学习的元认知监控能力,此外,数学写作还是展示学生掌握数学知识和情感抒发的平台,能优化教师教学策略和提升教学质量.

关键词: 数学写作;元认知;数学思维

文章编号: 1004-1176(2022)05-0072-03

《普通高中数学课程标准(2017 年版)》明确指出,要重视学生数学表达与交流能力的培养^[1].“数学写作”是数学交流活动中的一种书面交流形式,正式将“数学写作”纳入新人教版高中数学教材,这突显了“数学写作”的重要性.本文将采用案例研究法,从元认知视角对中学生数学写作的一个案例进行探究.

1 相关概念及界定

(1) 元认知的概念^[2].1976 年,弗拉维尔(Flavell, John H.)提出了“元认知”这一术语.他指出,元认知通常被广泛地定义为任何以认知过程与结果为对象的知识,或是任何调节认知过程的认知活动.元认知的核心意义是对认知的认知.即认知是认知主体对自我心理状态、能力、任务目标、认知策略等方面的认识,同时元认知又是认知主体对自身各种认知活动的计划、监控和调节.元认知的关键概念是元认知知识和元认知体验.认知主体对各种认知活动的监控正是通过元认知知识、元认知体验、目标(或任务)和行动(或策略)这四个方面的相互作用来实现的.

元认知成分包括元认知知识、元认知体验和元认知监控.元认知知识是人们具有的关于认知活动的一般性认识,是通过经验积累起来的关于认知的陈述性知识和程序性知识.元认知知识分为三部分:①关于认知个体的知识.指个体具有的有关自己和他人作为认知加工者的所有知识,包括个体内差异的认识.②关于认知任务的知识,即对在完成认知任务或目标中所涉及的各种有关信息的认识.③关于认知策略的知识,即对认知过程中关于各种有关策

略知识的认识.元认知体验是人们在从事认知活动时产生的认知和情感体验.元认知体验和元认知知识相辅相成.弗拉维尔指出,元认知知识与元认知体验具有部分重叠.某些元认知体验具有元认知知识的成分,而某些元认知知识可上升为意识并形成相应的元认知体验.持续而稳定的元认知体验可能成为元认知知识,而元认知知识又指导着元认知体验,并在一定程度上成为元认知体验的内容.在完成认知任务的过程中,元认知知识和元认知体验相互作用,互为补充,逐渐完善,最终完成认知过程.元认知监控指个体在进行认知活动的全过程中,对自我认知活动进行积极、自觉的监视、控制和调节.元认知监控就是自我监控,必须建立在个体具备一定的元认知知识和元认知体验的基础上才能进行.元认知知识和元认知体验在学习中的价值体现,必须通过元认知监控去实现.

(2)“数学写作”的界定.数学交流活动是指在数学教与学过程中学生之间、教师与学生之间以提高数学交流能力为目的的活动,包括口头交流和书面交流两种形式.“数学写作”是以提高核心素养为目标,将自己对数学知识和数学学习过程的认识与理解、对数学学习的感想与体会用文字表达出来的数学学习活动,是数学交流活动的书面交流形式.^[3]

2 基于元认知视角的“数学写作”案例探究

为了体现本研究的真实性和科学性,本文将理论与实践相结合,完整如实地呈现一篇高一学生的数学写作作品,从元认知视角来探究数学写作.

2.1 学生数学写作的案例展示

第一个写下数学日记,想想都会有些小兴奋.从数学

^{*} 本文系广东省 2019 年度中小学教师教育科研提升(强师工程)项目“基于核心素养的高中数学写作实践研究”(编号:2019YQJK008)的研究成果.

日记中,相信我能够静下心来好好思考平时疏忽的东西,不仅对数学的学习有极大帮助,甚至对未来的学习、工作都有所裨益.尽管所学知识点不多,所做习题也较少,但我仍找到了一些有价值的东西.

问题1 已知 $f(x)$ 为一次函数,且 $3f(x+1)-2f(x-1)=2x+17$,求 $f(x)$.

刚看到这种题,我明明知道一次函数是一个很重要的条件,却感到无从下手,甚至用参考书上一些复杂的方法求解都无法完成,但没想到这道题沿用的却是初中的 $y=kx+b$ 的式子.

解 设 $f(x)=kx+b(k\neq 0)$,则 $3[k(x+1)+b]-2[k(x-1)+b]=2x+17$,即 $kx+5k+b=2x+17$. 因为 x 的系数为 $\frac{k}{2}$,所以 $\begin{cases} k=2, \\ 5k+b=17 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} k=2, \\ b=7. \end{cases}$ 因此, $f(x)=2x+7$.

尽管想到初中的方法之后,问题显得简单明了,但仍要注意不要混淆括号中的字母运算顺序,同样运用转换的思想,如代入时 x 的变化.当然,光是一道题无法引起深度的思考.

问题2 已知二次函数 $f(x)$ 满足 $f(0)=0$,且对任意 $x\in\mathbf{R}$ 有 $f(x+1)=f(x)+x+1$,求 $f(x)$.

出现在不同试卷的类似题,往往需要引起注意:重复出这一类型的题目意义何在?

解 设 $f(x)=ax^2+bx+c(a\neq 0)$ (不要忘记细节,这里往往就产生了一定的差距).因为 $f(0)=0$,所以 $c=0$,故 $f(x)=ax^2+bx(a\neq 0)$.由题意可得 $a(x+1)^2+b(x+1)=ax^2+bx+x+1$,即 $2ax+a+b=x+1$ (同样用到上述系数项的转化),故

$$\begin{cases} 2a=1, \\ a+b=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=\frac{1}{2}, \\ b=\frac{1}{2}. \end{cases} \text{ 因此, } f(x)=\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{2}x.$$

这道题并不算难题,只要熟悉了便不成问题,但我却从中发现了一些值得注意的地方.

(1) 往往题目给的条件不多,这时需要我们将所涉及的知识仔细思考,确保不遗漏易错点,也不要去看关系不大的地方挖深,既浪费时间,又难有成效.

(2) 一些题目需要化简为繁,再由繁入简,最简单的如解方程,便是自己创造条件,再由已知得出结论,比如函数 $f(x)=x^2-2x+10$,可化为 $f(x)=x^2-2x+1+9=(x-1)^2+9$.

(3) 由以上二例可以看出,进入高中阶段,对初中的一些知识也就有了更好更全面的理解,高一的方法想必多与初中相近,应多思考.如函数的单调性就是“对 y 随着 x 增大而增大”更好的诠释,揣摩一下,也会受益良多.

对于数学写作这种记录的形式是知识的再一次梳理与加深,往往难题只是源于我们目光太过狭隘,多思考,想法更全面,把握题目前后的关联是学好数学的诀窍,也是以后生活、工作的一大准则.

2.2 基于元认知视角的案例探究

(1) 数学写作有助于拓展学生数学学习中的元认知知识.元认知知识作为元认知结构中重要的成分之一,是通过经验积累起来的关于认知的陈述性知识和程序性知识.该案例中,学生在解决问题1时表述“明知道一次函数是一个很重要的条件,仍感到无从下手,甚至用参考书上一些复杂的方法求解都无法完成”,说明他能明晰“一次函数”的重要性,却不知如何用该条件.从元认知视角分析,即“一次函数”条件未能激发学生元认知策略知识,学生缺少对一次函数使用策略的有关认知,从而导致解题失败.当该生顿悟后,写出了问题解决所需的“一次函数解析式”数学知识、“转化与化归”的数学思想方法以及解题中每个过程的目的,这一过程暴露了学生的思考过程,其中呈现的数学知识、数学思想方法是学生平时学习所积累的,属于陈述性知识,而展示的解题过程实际上为该生如何解决问题的思维过程,属于程序性知识.因此,数学写作能将学生元认知知识完整呈现出来,并暴露该学生所处的元认知知识水平,还有助于巩固和拓展学生的元认知知识.

(2) 数学写作能增强学生数学学习的元认知体验.从元认知体验视角来看,学生在数学写作过程中产生了多次认知和情感体验变化.从案例中可知该生在数学写作时非常激动,因为他是班内首位进行数学写作的学生,他的作品还可以供后续的同学参考和学习,这在心灵上给予了他一定的成就感和幸福感,但同时也给他带来了一定的压力,迫使他要追求数学写作的质量.学生最初对问题1“无从下手”,不难分析出此刻他内心会产生一些困惑和焦虑;而当学生顿悟后,从他陈述的“没想到这道题沿用的却是初中的 $y=kx+b$ 的式子”这句话易知,学生此时非常惊讶;再当其确认自己能成功解决同一类型的题后,顺势总结出对该类型问题的思考以及“学好数学的诀窍,生活、工作的一大准则”的感想,从中可看出他内心此时此刻的喜悦之情.由此可知,学生在整个数学问题解决过程中,经历了由最初的焦虑感到问题解决后的成就感和幸福感.因此,数学写作给学生搭建了一个抒发数学学习情感体验的平台,让他们体验数学学习的成功和幸福,从而激发学生对数学学习的兴趣,增强学生数学学习的元认知体验.

(3) 数学写作能提高学生数学学习的元认知监控能力^[4].元认知监控伴随着整个数学写作过程,通过元认知知识、元认知体验的交互作用来实现,同时它也是一个动态过程.首先,学生会制定详细的写作计划,保证写作内容从始至终不会偏离数学这个大

主题,这其实就是学生自我监控的过程,时刻监控着写作任务和目的.其次,该生在解决问题1后又找了一道同类型题,继续沿用问题1的解题策略进行求解,最后确认自己已成功突破此类题.由此可知,该生能自我判断策略知识的有效性,并通过举一反三来正确评估自己对策略知识的掌握程度,体现出他在数学学习过程中有较好的监控能力.除此之外,口头交流往往会自带一定的情景,即使口头说得不是很清楚,听者往往也会明晰其含义,而书面表达则需要把前因后果表达清楚才能使阅读者看懂,因此书面表达一般要比口头交流更困难.数学写作是一种书面表达形式,这表明学生需要时刻监控文字、数学语言表达是否规范、是否有误、是否严谨、是否通俗易懂、前后逻辑是否清晰等等.该案例中呈现的写作思路清晰,书写规范,书面表述也通俗易懂,由此体现了该学生的元认知监控能力较好,具备良好的元认知策略,也说明了数学写作对学生的元认知监控能力的培养具有促进作用,能提高学生数学学习的元认知监控能力.

3 从“学”与“教”的角度窥探数学写作

史宁中教授曾说:“学生通过数学学习,要能用数学的眼光观察世界,用数学的思维思考世界,用数学的语言表达世界.”^[5]从一定程度上讲,学生学习数学并不只学数学中的陈述性知识和机械的数学解题策略,而更应该学会数学地思考问题,提高数学思维能力和数学表达能力.教学是“教”与“学”的两个过程,相辅相成.而数学写作作为一种教学交往的工具,既可以促进学生的“学”,同时也能进一步优化教师的“教”.

(1)数学写作是展示学生掌握数学知识和情感抒发的平台^[6].在上述案例中,学生进行数学写作时,他会搜索记忆中与“一次函数”和“二次函数”相关的数学知识以及数学思想方法,接着进行知识提取,这个过程就包含着数学知识的回忆和推理,这种推理的过程会进一步巩固和拓展学生的元认知知识.另外,数学写作还给学生提供了一个数学学习情感抒发的平台.学生可通过数学写作宣泄不良情绪和学习压力,对自己的缺陷与情感经历会有一种新的、正确的认知,这样可以让学生能以一种积极的态度来面对接下来的学习;同时,数学写作也可以是一个分享学习喜悦的渠道.学生通过数学写作表达其对数学学习的愉悦感与成就感,从而进一步激发其对数学学习的兴趣.因此,数学写作暴露了该学生数学问题解决的内部思维过程以及数学学习过程中的情感体验,而这恰好对学生元认知水平的提高具有

很好的促进作用.

(2)数学写作能优化教师的教学策略,提升教学质量.对教师而言,选择教学方式和教学内容的重要依据就是对学生的了解,而数学写作可以为教师提供及时和充足的反馈信息,并有助于教师进行更好的教学决策,还可以帮助教师去评估一些其他评价方法和评价工具难以评量或不予关注的东西.比如在上述案例中,学生在解决问题1时明知道“一次函数”非常重要,但就是不知道怎么用,此时教师可以分析出这位学生数学基本功还不够扎实,同时还可推测出还有其他学生可能与该学生有类似的情况,那么教师在讲课时需注意复习与本题相关的初中数学内容,让这部分学生能够及时巩固数学基础.除此之外,从上述案例分析中可知,该生在进行数学写作和数学问题解决过程中由困惑感、焦虑感,到最终问题解决的喜悦感,并且还自行总结出了“以后生活、工作的一大准则”,呈现了一种积极向上的学习态度,且超越了学科知识,上升到了人生哲理的层面,而这些内容是平时的数学作业和考试中看不到的.因此,数学教师要及时对该生的行为进行积极的评价和鼓励,让学生继续保持努力向上的态度,与此同时,也能促进教师的教学反思,让教师明晰教学生不但要教会学生数学知识,更重要的是教学生会用数学的思维去思考人生.

4 小结与展望

本研究从元认知视角探究数学写作,可知数学写作有助于提高学生数学学习的元认知水平,增强学生数学学习的情感体验,并有助于教师教学策略的优化,推动教师的专业成长,为实现“教与学”的双赢提供了一条新的途径.目前,很多研究者在数学写作领域发表了很多优秀的成果,但就如何更有效地利用和发挥中学数学写作的作用,还有待进一步探究.

参考文献

- [1] 中华人民共和国教育部.普通高中数学课程标准(2017年版)[M].北京:人民教育出版社,2020:3.
- [2] 钟进均,朱维宗.基于元认知视角的“说数学”探究[J].数学通讯,2009(24):8-10.
- [3] 钟进均.中学生数学写作研究[M].长春:吉林人民出版社,2019:15.
- [4] 钟进均.基于知识分类视角的高中数学日记案例探究[J].数学通讯,2015(9):1-4.
- [5] 史宁中.学科核心素养的培养与教学——以数学学科核心素养的培养为例[J].中小学管理,2017(1):35-37.
- [6] 钟进均.对高中数学日记的案例探究[J].中学数学,2013(1):68-72.