

一次提升“四能”的探究之旅

——从一道三角不等式的教学谈起*

李勤俭 (安徽省池州市第一中学 247000)

摘要:本文围绕教学过程中如何提升“四能”,对一个三角不等式进行多角度思考,探讨其证法,并对其结论进行相关拓展,最后对新课程理念下数学学习的方法作了几点思考.

关键词:四能;三角不等式;琴生不等式

文章编号:1004-1176(2022)04-0042-03

在高中数学教学中,教师有意识地引导学生进行思考,从数学角度发现和提出问题、分析和解决问题,不仅是新课程标准的要求,也能高效地提高学生自主学习的能力.本文从一个正弦定理推证过程中得到的三角不等式入手,探讨如何在解题教学中提升学生的“四能”.

1 发现问题,提出问题

在三角形中,有正弦定理 $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R$,其中在证明“ $=2R$ ”的过程中,文[1]得到了如下的三角不等式 $1 < \cos A + \cos B + \cos C < \frac{\pi}{2}$ ①.那么不等式①如何证明呢?

2 分析问题,问题解决

不等式①的左边看起来比较正常,但右边就让人难以接受.看到 π ,联想到几何意义,所以从圆入手也算自然;①式是代数式,理应有代数证法,那么作为三角函数式,可以从三角变换角度去解决;同时,从式子的结构出发,可以看成是余弦函数相关问题,所以从函数角度分析应该也能解决问题.

2.1 几何证法

在图1中,圆 O 是 $\triangle ABC$ 的外接圆.下面分 $\triangle ABC$ 是锐角三角形、直角三角形和钝角三角形三种情形证明.

证明 (1) 当 $\triangle ABC$ 是锐角三角形时,如图2,连结 BO, AO 并延长分别交圆 O 于点 E, F ,再连结 BF, FC, CE, EA , 则 $BF = 2R \cos C, FC = 2R \cos B, BD = 2R \cos A$.

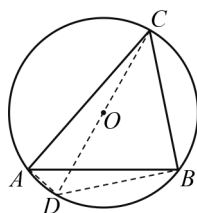


图1

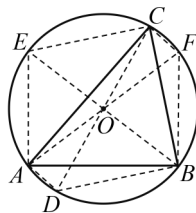


图2

在四边形 $CDBF$ 中,显然有 $CD < DB + BF + FC < \text{半圆弧}$, 即 $2R < 2R \cos A + 2R \cos B + 2R \cos C < \pi R$, 故 $1 < \cos A + \cos B + \cos C < \frac{\pi}{2}$.

(2) 当 $\triangle ABC$ 是直角三角形时,不妨设 $C = 90^\circ$, 此时 $A + B = \frac{\pi}{2}$, $\cos C = 0$, 从而 $\cos A + \cos B + \cos C = \sin A + \cos A = \sqrt{2} \sin\left(A + \frac{\pi}{4}\right)$, $A \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$, 即 $1 < \sin A + \cos A < \sqrt{2} < \frac{\pi}{2}$, 故 $1 < \cos A + \cos B + \cos C < \frac{\pi}{2}$.

(3) 当 $\triangle ABC$ 是钝角三角形时,不妨设 $C > 90^\circ$, 此时可将图2中的点 D 与点 C 对换,转化为情形(1),得证.

几何证法直观、好理解,但不容易想到.我们再尝试用代数证法.

2.2 代数证法

先证 $\cos A + \cos B + \cos C > 1$ ②.

因为 $\cos A + \cos B + \cos C$

$$= 2 \cos \frac{A+B}{2} \cos \frac{A-B}{2} - \cos(A+B)$$

* 本文为安徽省池州市重点课题“高中生数学思维能力培养的微观分析”(编号:JK2003)的研究成果.

$$= 2\cos \frac{A+B}{2} \cos \frac{A-B}{2} - 2\cos^2 \left(\frac{A+B}{2} \right) + 1$$

$$= 2\cos \frac{A+B}{2} \left(\cos \frac{A-B}{2} - \cos \frac{A+B}{2} \right) + 1$$

$$= 4\cos \frac{A+B}{2} \sin \frac{A}{2} \sin \frac{B}{2} + 1$$

$$= 4\sin \frac{A}{2} \sin \frac{B}{2} \sin \frac{C}{2} + 1,$$

$$\text{即 } \cos A + \cos B + \cos C = 4\sin \frac{A}{2} \sin \frac{B}{2} \sin \frac{C}{2} +$$

1 ③.

又 $A, B, C \in (0, \pi)$, 故 $\sin \frac{A}{2}, \sin \frac{B}{2}, \sin \frac{C}{2}$ 均大于 0, 因此 $\cos A + \cos B + \cos C > 1$.

再证 $\cos A + \cos B + \cos C < \frac{\pi}{2}$ ④.

为了证 ④ 式, 先证下式:

$$\sin^2 \frac{A}{2} + \sin^2 \frac{B}{2} + \sin^2 \frac{C}{2} + 2\sin \frac{A}{2} \sin \frac{B}{2} \sin \frac{C}{2} =$$

1 ⑤.

$$\begin{aligned} & \sin^2 \frac{A}{2} + \sin^2 \frac{B}{2} + \sin^2 \frac{C}{2} + 2\sin \frac{A}{2} \sin \frac{B}{2} \sin \frac{C}{2} = \\ & \sin \frac{A}{2} \left(\sin \frac{A}{2} + 2\sin \frac{B}{2} \sin \frac{C}{2} \right) + \sin^2 \frac{B}{2} + \sin^2 \frac{C}{2} = \\ & \sin \frac{A}{2} \left(\cos \frac{B+C}{2} + 2\sin \frac{B}{2} \sin \frac{C}{2} \right) + \frac{1 - \cos B}{2} + \\ & \frac{1 - \cos C}{2} = \sin \frac{A}{2} \left(\cos \frac{B}{2} \cos \frac{C}{2} + \sin \frac{B}{2} \sin \frac{C}{2} \right) + \\ & 1 - \frac{1}{2} (\cos B + \cos C) = \cos \frac{B+C}{2} \cos \frac{B-C}{2} + \\ & 1 - \cos \frac{B+C}{2} \cos \frac{B-C}{2} = 1. \end{aligned}$$

另一方面, 在 ⑤ 式中, 有如下变形:

$$\begin{aligned} 1 &= \sin^2 \frac{A}{2} + \sin^2 \frac{B}{2} + \sin^2 \frac{C}{2} + \\ & 2\sin \frac{A}{2} \sin \frac{B}{2} \sin \frac{C}{2} \geqslant 3 \sqrt[3]{\sin^2 \frac{A}{2} \sin^2 \frac{B}{2} \sin^2 \frac{C}{2}} + \\ & 2\sin \frac{A}{2} \sin \frac{B}{2} \sin \frac{C}{2}, \text{ 令 } \sqrt[3]{\sin \frac{A}{2} \sin \frac{B}{2} \sin \frac{C}{2}} = t, \text{ 则} \end{aligned}$$

上式即为 $2t^3 + 3t^2 - 1 \leqslant 0 \Rightarrow (t+1)^2(2t-1) \leqslant 0$. 因为 $t > 0$, 所以 $0 < t \leqslant \frac{1}{2}$, 从而 $0 <$

$$\sin \frac{A}{2} \sin \frac{B}{2} \sin \frac{C}{2} \leqslant \frac{1}{8}.$$

将此式代入 ③ 式, 得 $\cos A + \cos B + \cos C \leqslant$

$$4 \times \frac{1}{8} + 1 = \frac{3}{2} < \frac{\pi}{2}, \text{ 即 ④ 式得证.}$$

由 ②④ 可得 ① 式得证.

由此还可以顺带得 ① 式的加强式:

$$1 < \cos A + \cos B + \cos C \leqslant \frac{3}{2} \text{ ⑥.}$$

2.3 琴生不等式证法

下面用琴生不等式证明 $\cos A + \cos B + \cos C \leqslant \frac{3}{2}$.

琴生不等式(Jensen Inequality):

函数 $f(x)$ 是定义在开区间 (a, b) 上的凸函数. 设 $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ 是 n 个正实数, 且 $\lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_n = 1$, $x_1, x_2, \dots, x_n$ 是开区间 (a, b) 上任意 n 个点, 则下面不等式成立: $f(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \dots + \lambda_n x_n) \geqslant \lambda_1 f(x_1) + \lambda_2 f(x_2) + \dots + \lambda_n f(x_n)$. 这个不等式称为琴生不等式. (注意: 对于凹函数(下凸函数), 上式中的“ $\geqslant$ ”变为“ $\leqslant$ ”)

当 $\triangle ABC$ 是锐角或直角三角形时, 函数

$f(x) = \cos x$ 在 $\left(0, \frac{\pi}{2}\right]$ 上是凸函数, 则 $\frac{f(A) + f(B) + f(C)}{3} \leqslant f\left(\frac{A+B+C}{3}\right)$, 即 $\frac{\cos A + \cos B + \cos C}{3} \leqslant \cos\left(\frac{A+B+C}{3}\right) = \cos \frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}$, 故 $1 < \cos A + \cos B + \cos C \leqslant \frac{3}{2}$.

当 $\triangle ABC$ 是钝角三角形时, 不妨设 $C > 90^\circ$,

则 $A, B \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$. 利用琴生不等式得 $\frac{f(A) + f(B)}{2} \leqslant f\left(\frac{A+B}{2}\right)$, 即 $\cos A + \cos B \leqslant$

$$\begin{aligned} & 2\cos\left(\frac{A+B}{2}\right), \text{ 故 } \cos A + \cos B + \cos C \leqslant \\ & 2\cos \frac{A+B}{2} + \cos C = 2\sin \frac{C}{2} + 1 - 2\sin^2 \frac{C}{2} = \\ & -2\left(\sin \frac{C}{2} - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{2} \leqslant \frac{3}{2}. \end{aligned}$$

3 再次提出问题

一个问题从提出到解决, 并不是思维过程的结束, 而往往是新问题的开始. ① 式是针对余弦函数而言的, 那么对于正弦函数、正切函数, 相应的结论是什么? 又如何证明?

3.1 与正弦函数有关的不等式

经过探讨分析得到

$$0 < \sin A + \sin B + \sin C \leq \frac{3\sqrt{3}}{2} \quad ⑦.$$

分析 一方面, 不等式 $\sin A + \sin B + \sin C > 0$ 显然成立; 另一方面, 由于正弦函数在 $(0, \pi)$ 上是凸函数, 所以由琴生不等式容易得到 $\sin A + \sin B + \sin C \leq 3 \sin \frac{A+B+C}{3} = 3 \sin \frac{\pi}{3} = \frac{3\sqrt{3}}{2}$, 从而 ⑦ 式成立. (注: 其他证法请读者自行思考)

3.2 与正切函数有关的不等式

当 $\triangle ABC$ 是锐角三角形时,

$$\tan A + \tan B + \tan C \geq 3\sqrt{3} \quad ⑧.$$

分析 显然 $\triangle ABC$ 是直角三角形时, 正切没有意义; 由于 $A = B = 30^\circ, C = 120^\circ$ 时, $\tan A + \tan B + \tan C = -\frac{\sqrt{3}}{3}$, 所以当 $\triangle ABC$ 是钝角三角形时, 亦不成立.

证法 1 (琴生不等式) 当 $\triangle ABC$ 是锐角三角形时, $f(x) = \tan x$ 在 $(0, \frac{\pi}{2})$ 上是凹函数, 所以有 $\tan A + \tan B + \tan C \geq 3 \tan \frac{A+B+C}{3} = 3 \tan \frac{\pi}{3} = 3\sqrt{3}$.

证法 2 (琴生不等式+函数法) 由琴生不等式, 易得 $\tan A + \tan B \geq 2 \tan \frac{A+B}{2}$, 故 $\tan A + \tan B + \tan C \geq 2 \tan \frac{A+B}{2} + \tan C = \frac{2}{\tan \frac{C}{2}} + \frac{2 \tan \frac{C}{2}}{1 - \tan^2 \frac{C}{2}}$. 设 $t = \tan \frac{C}{2}$, 则上式右边 $= \frac{2}{t} + \frac{2t}{1-t^2} = \frac{2}{t(1-t^2)} (t > 0)$.

令 $f(t) = t(1-t^2)$, 则 $f'(t) = -3t^2 + 1$, 故 $f(t)_{\max} = f(\frac{\sqrt{3}}{3}) = \frac{\sqrt{3}}{3} (1 - \frac{1}{3}) = \frac{2\sqrt{3}}{9}$. 从而

$$\tan A + \tan B + \tan C \geq \frac{2}{\frac{2\sqrt{3}}{9}} = 3\sqrt{3}.$$

综上所述, $\tan A + \tan B + \tan C \geq 3\sqrt{3}$.

证法 3 (基本不等式法) 因为在 $\triangle ABC$ 中, 有 $\tan A + \tan B + \tan C = \tan A \cdot \tan B \cdot \tan C$, 当 $\triangle ABC$ 为锐角三角形时, $\tan A > 0, \tan B > 0, \tan C > 0$, 所以由基本不等式得 $\tan A + \tan B + \tan C = \tan A \cdot \tan B \cdot \tan C \geq 3 \sqrt[3]{\tan A \cdot \tan B \cdot \tan C}$, 从而 $\tan A \cdot \tan B \cdot \tan C \geq 3\sqrt{3}$, 即 $\tan A + \tan B + \tan C \geq 3\sqrt{3}$.

4 几点感悟

在学习数学的过程中, 发现问题往往比证明结论更重要. 《普通高中数学课程标准(2017年版)》提出了“四能”^[2], 因此教师需要适时、适度地引导学生发现、提出一些数学问题, 进而分析和解决问题, 促进学生数学水平的提高.

(1) 引导学生学会提出问题的方法应成为教学中的一个重要内容. 本文由余弦函数的一个优美的不等关系, 运用合情推理的方法拓展到了与正弦和正切函数相关的性质. 如何引导学生学会提出问题, 也许比帮助学生解决问题更有意义.

(2) 对一个问题的解决进行多角度思考是数学探究的基本思路. 文中对不等式①的证法进行了多角度的思考, 得到了很好的思维体验. 这意味着教师在教学过程中如何进行多角度的思考, 以及如何引导学生多角度思考是值得探索的一个课题.

(3) 要在解决问题的过程中进行逻辑推理等核心素养的培养. 本文在探讨的过程中, 包含了很多较深刻的分析与推理, 使得学生在过程中学习, 在过程中提高.

(4) 探究无止境. 文中通过探究得到了八个关系式, 它们的应用又可作为新的探讨课题.

在这一探讨的旅程中, 学生得到了很好的思维能力的训练, 以及分析问题和解决问题的能力训练, 体会到数学的严谨美、和谐美, 提高了学习数学的兴趣. 这不正是新课程理念所要求的吗?

参考文献

- [1] 李勤俭. 正弦定理推证中的三个“副产品”[J]. 数学通讯, 2006(3): 10.
- [2] 中华人民共和国教育部. 普通高中数学课程标准(2017年版 2020年修订). 北京: 北京师范大学出版社, 2018: 8.