

即满足 $2y_1 + y_2 < 0$, $t = \frac{y_2}{y_1} \in (-\infty, -2)$, 当 $t = \frac{y_2}{y_1} = -2 - \sqrt{3}$ 时, $(\frac{S_1}{S_2})_{\max} = 1 - \frac{\sqrt{3}}{2}$.

4 总结反思

从上述探究不难发现, 本题的模型可以从抛物线上三点推广到椭圆或双曲线上三点, 也可以拓展到任意三点, 直接“架空”曲线. 从这个角度讲, 本题失去了圆锥曲线解析的本质, 但确实给人以耳目一新的感觉, 或许试题已经很难用“难或简单”加以

评论, 因为它本身就是考查学生的综合素养. 那么, 如何在有限的时间内, 实现“透过表象看本质”? 相信只要在日常的教学过程中注重对问题本质的探究, 注重学生发散性思维的培养, 注重学生核心素养的提升, 那么还是有可能快速破解此类问题的, 或者至少会进行多角度尝试并简化运算.

(本文系湖州市 2022 年度教学研究课题“新课改背景下高中数学创新试题命制的研究”(课题编号: HZJY22047) 阶段性研究成果)

“让学生爱上数学习题课”的实践研究

王 飞¹ 殷长征²

1 江苏省连云港市赣马高级中学 (222124) 2 江苏省连云港市锦屏高级中学 (222021)

1 问题提出

波利亚说: “中学数学教学的首要任务就是加强解题训练.” 因为通过解题教学可以强化学生“四基”, 提高学生“四能”, 发展学生数学核心素养.

习题课是高中教学常见的课型之一, 也是数学教学的重要组成部分, 特别是高三年级, 几乎天天都是习题课. 可当前, 习题课教学的现状如何呢?

现象 1 教师讲解练习 (或试卷) 讲评课, 不是每题讲解, 而是有选择性地归类讲解. 讲解伊始, 教师情绪激昂, 偶尔也会生成一些问题让学生回答, 或让学生板演. 半节课过去, 发现有近 1/4 学生精力不集中, 个别同学竟趴在桌子上睡着了.

现象 2 投影仪展示习题, 教师开始讲解, 一段时间后, 教师又给出一道习题让学生思考, 学生一脸茫然困惑, 看着题目不知从哪入手, 教师提示, 让学生再思考, 看学生仍然没有什么反应, 忙说: “同学们看黑板, 注意听.” 教师颇有耐心地讲完一遍: “听懂了吗?” 教室内发出几个微弱的声音, “懂了.” 显然教师有点着急了: “听懂的请举手”, 有八、九个学生举起了手, 教师更加着急了. “好, 我再讲一遍, 注意听!” 讲完后, 气呼呼地瞪着眼睛, “听懂的请举手”, 学生纷纷举起了手……

2 教学实践

习题课, 该如何让教师上出精彩, 让学生学有所获并真正爱上习题课呢? 根据曾经连续八年担

任高三数学教学的经验, 笔者认为, 要上好习题课, 需过好“五关”.

2.1 学情调研关

把握学情是精准教学的要义. 习题教学的出发点就是要找准学生的学习起点, 所以教师要从学生解题时已具备的知识基础、基本技能、思维基础、经验基础以及数学学习心向 (指学生对数学内容的认识、态度) 这四个维度入手. 分析学生解题时的知识基础本质上是了解、判断学生原有认知结构的状态, 及时唤醒与解题相关联的旧知识, 把解题需用的知识内容与学生的认知结构中原有的知识系统建立实质性的联系, 找出学生对当前数学解题内容的“最近发展区”. 分析学生解题时的基本技能就是要了解学生建立模型的能力. 分析思维基础和经验基础就是了解学生处理问题的思维及方法取向.

学情调研的内容可包括: ①学生已有的知识技能基础, 如对本单元或本节内容已掌握和运用的情况; ②学生的学习困难, 如学生在知识运用和技能学习方面存在的困难. 学情调研的方式可以是作业批改、问卷调查、前测以及个别访谈等. 做好了学情调研, 教师就掌握了大量鲜活的关于本班学生解题所掌握知识技能等信息, 为后面的目标设计、过程设计及评价设计提供依据.

2.2 学生情感关

数学学习是枯燥无味的,特别是做习题,计算繁琐、量大,整天跟数字和字母打交道,学生烦得很.俗话说得好:“亲其师方能信其道”.感情的力量是巨大的,教师上好习题课的前提是和学生感情融洽、课堂和谐,尤其是对于那些学困生而言更加重要.他们有的会因为基础差,缺少教师的关心和帮助,而放弃数学学科学习.因此,如果教师平时多关注这部分学生,通过鼓励、面批、谈心等方式让他们感受到教师对他们的爱心与关怀,他们的精力就有可能转移到学习上来,他们就有可能“为了教师”而努力学习,克服重重困难,用一颗“感恩的心”来回报教师.

长期以来,由于应试教育的强化,围绕“双基”的过度训练仍然在一些课堂盛行,这就使得数学课程中数学素养、情感目标等被弱化,久而久之学生开始对数学产生厌学情绪.习题教学不应仅仅满足于教给学生一些结论、方法,而应该能给学生以更多的精神浸润.

2.3 习题选择关

2.3.1 针对性强,忌漫天撒网

“题海无边,精选是岸”.特别是高三的复习资料特别多,随便翻开一本,成千上万个习题便展现在面前.实践证明,题海战术是高耗低效的.学生要跳出“题海”,这就要求教师在平时的教学中,注意发现学生普遍存在知识缺陷,常犯错误的习题,将其归类.在习题课上,针对此类问题,多设计一些变式练习,增加习题的趣味性,多题归一.课后进行补偿性训练,反复强化,使困难迎刃而解.

如在复习圆这一专题习题课时,笔者选择了这样一道题:已知圆 $O: x^2 + y^2 = 1$, 定点 $A(3, 0)$, 过点 A 的直线 l 与圆 O 相交于 B, C 两点,且 B, C 两点均在 x 轴的上方,若 OC 平分 $\angle AOB$, 则直线 l 的斜率为_____.

这道题是在直线和圆位置关系等知识的交汇处命制,既考查了弦长公式、角平分线定理、向量共线定理、余弦定理、面积公式、三角函数的定义、两点斜率公式等基础知识的应用,又考查了直观想象、逻辑推理、数学运算等数学素养,突出了能力立意,彰显了数学思想方法.解题思路较多,从不同的角度去审视它可以得出系列优美解法,为学生提供了多样化的选择,是一道匠心独运的好题.在寻求解法的同时,领略考题的本质,挖掘其

深刻的内涵,作出一些必要的延伸,充分发挥试题的功能和作用.

变式1 直线 l 过点 $A(2, 1)$, 且与圆 $(x-3)^2 + (y-2)^2 = 16$ 相交于 M, N 两点, 且 $\frac{AM}{AN} = 2$, 则直线 l 的斜率为_____.

变式2 在平面直角坐标系 xOy 中, A 为直线 $l: y = 2x$ 上在第一象限内的点, $B(5, 0)$, 以 AB 为直径的圆 C 与直线 l 交于另一点 D . 若 $\overline{AB} \cdot \overline{CD} = 0$, 则点 A 的横坐标为_____.

2.3.2 典型性强, 忌多而不精

习题的选择要注意典型性, 使之“以一当十”, 既增加对知识的理解, 又使学生可以掌握其中的解题技巧和方法规律. 如为了促使学生掌握二元变量最值的求解方法, 笔者设计了这样一道习题: 设 $x, y \in \mathbf{R}_+$, 且 $\frac{1}{x} + \frac{2}{x+2y} = 1$, 求 $x+y$ 的最小值.

此题有七种解法之多: 可以用根的判别式; 可以代数换元结合基本不等式; 可以三角换元再结合基本不等式; 可以减元凑配再利用基本不等式; 可以直接凑配(又有两种)再运用“1”的代换; 也可以减元之后利用导数求最值. 而这些解法恰好都是求多元最值常用的方法. 稍微注意观察, 还可以发现: 这七种解法间有几种有一个共同点, 即“1”的代换结合基本不等式无非是如何凑配罢了. 此题的七种解法, 体现了“以一当十”的原则, 所以是一道典型题, 促使学生既练习了基本公式, 又练习了变形公式, 达到融会贯通的目的.

2.3.3 热点性强, 忌脱离实际

脱离生活实际的知识, 学生是不感兴趣. 学生只是迫于升学的压力才去学习, 学的被动、学的痛苦. 如果习题能够注重与现实生活的联系, 同时注重数学文化的渗透, 让学生学以致用, 则可以激发学生学习的积极性, 提升学生应用数学解决实际问题的能力, 并能取得良好的教学效果.

比如在学完数列知识后, 让学生利用所学的等差、等比数列解决存款和房贷问题; 在学完解三角形知识后, 问学生如何测量河两岸距离问题; 在学完线性规划知识后, 问学生如何合理地利用有限资源(如资金、劳力、材料、时间等), 以使消耗最小, 利润最大等.

2.3.4 可行性强, 忌脱离学情

只有切准学生“最近发展区”的教学,才是最有效教学.习题教学中,教师给出过难、过易的问题均不能激发学生兴趣、激活学生思维.在教学中,教师要会给学生“搭台支架”,让学生顺着教学预设的台阶和支架,一步步攀升,逐步找到解决问题的思路和方法.

如在一次校内听课时,上课教师给出这样一道题:设 x, y 为实数,若 $4x^2 + y^2 + xy = 1$,则 $2x + y$ 的最大值是_____.

这位教师给的解法是:由 $4x^2 + y^2 + xy = 1$,得 $1 = \frac{5}{8}(2x + y)^2 + \frac{3}{8}(2x - y)^2$,则 $1 \geq \frac{5}{8}(2x + y)^2$,当且仅当 $2x = y$ 时取等号,即 $-\frac{2\sqrt{10}}{5} \leq 2x + y \leq \frac{2\sqrt{10}}{5}$,所以 $2x + y$ 的最大值是 $\frac{2\sqrt{10}}{5}$.

上述解法非常简洁,但是技巧性太强,第一步“配方”的过程犹如“神来之笔”,如同波利亚所谓的“从帽子里跑出一只兔子”,学生除了赞叹方法的巧妙,只能望题兴叹:我怎么想不到?

如果我们能将 $4x^2 + y^2 + xy = 1$ 利用完全平方公式化成 $(2x + y)^2 = 1 + 3xy$,再结合基本不等式,有这些中间过程铺垫学生就容易理解和掌握了.

2.3.5 参与性强,忌教师独揽

习题是枯燥无味且没有生命,所以很多学生对它没有感情.为了培养学生对习题的感情,每学完一单元(一章节)或一个新的题型后,笔者都要求学生向老师投稿,即每人出3~5道习题(重点是自己易错的、不太理解的或自己认为重要的知识).在每个单元的检测中,80%的题目都来自于学生的投稿,学生看到自己命的题目,自然感到亲切.长此以往,学生对习题的感情也逐渐培养起来.

下面是笔者复习完利用基本不等式求多元最值后,让学生投稿的部分改编或自编题:

题1 已知 $x, y \in \mathbf{R}_+$,且 $x + y = 5$,求 $\frac{x^2 + 3}{x} + \frac{y^2}{y - 2}$ 的最小值.

题2 已知 $a, b \in \mathbf{R}$,求 $3a^2 - \frac{1}{ab} + \frac{4}{a(3a - b)}$ 的最小值.

题3 已知 $a > b > 0$, $\frac{1}{a + b} + \frac{a}{a - b} = 3$,求 $2a + b$ 的最大值.

2.4 学生讨论关

在习题讲评中,如果有一些问题需重点巩固,而班级中大多数的学生已经会了,教师可以“偷懒”一些,就可采用“生教生”的办法,让不会的学生主动请教会的学生,“一对一”进行讲解.教师则可以巡视,对个别还不会的学生进行单独讲解,体现“精准施策”“精准施教”的教学策略.实践证明:“生教生”的办法比教师自己苦口婆心讲解的效果要好得多,同时,因为教师的单独讲解,拉近了师生之间的心理距离,尤其是学困生,他们学习变得更自信、更主动,成绩进步更明显.

如在一次周练中有这样一道填空题:已知函数 $f(x) = \begin{cases} x^2 + 1, & x \geq 0, \\ 1, & x < 0, \end{cases}$ 则满足不等式 $f(1 - x^2) > f(2x)$ 的 x 取值范围是_____.

在笔者任教的班级54人中就有16名学生出现同样是“ $0 \leq x < \sqrt{2} - 1$ ”的错误答案,不免引起笔者的警觉.如何揭示与剖析隐藏在错误背后的真正原因呢?解铃还须系铃人,在笔者的指导下,学生在积极和谐的氛围中分组讨论,他们各执一词,你争我辩,不甘示弱,争论得很激烈.最后,小组代表发言得到错误的原因.生生互动不仅使试卷讲评课兴趣盎然,充满生机活力,而且培养了学生敢于质疑问难、敢于批判否定及胆大思考的批判性思维.

2.5 教师讲解关

2.5.1 少而精炼

心理学研究表明,普通高中课堂有效注意时间是15分钟左右,且是波动起伏式的.这意味着什么?在习题课上,教师讲解的时间不可过多,一定要少而精.否则学生注意力分散、做小动作、打瞌睡……教师就请不必再责怪学生了,而应该从自身上去寻找原因,检讨自己.

2.5.2 时间分散

一节课教师不宜长时间的集中讲解,而要把讲解与学生讨论交叉进行.要让学生全方位“参与”习题的解决,通过学生多动口、多动手、多动脑,有效减轻他们的“疲劳”.否则在学生大脑处于“疲劳”期时,教师若不注意调节,仍口若悬河讲个不停,

则教师的劳动也只能算作是无效劳动,学生早已左耳进右耳出了.

2.5.3 提炼方法

习题课,尽量不要就题讲题,答案出来便完成任务,而应当尽量从题目中提取出解决此类问题的方法或者是思维的策略.这样,将来学生才会举一反三,达到解一题会一片的目的.

例如在复习基本不等式求最值时,笔者还是利用上面给出的例子:设 $x, y \in \mathbf{R}_+$,且 $\frac{1}{x} + \frac{2}{x+2y} = 1$,求 $x+y$ 的最小值.

询问学生,利用基本不等式求最值必须满足哪些条件(一正、二定、三相等)?然后指出在这些条件中正数是前提条件,等号是否成立容易验证,而定值条件常常需要根据代数式进行凑配,如何凑配是关键,通过此例引导学生得出凑配的几种常用方法.于是学生掌握了解决此类问题的一般方法.无论形式如何变换,学生总能顺利求解.

2.5.4 拓展延伸

艾宾浩斯遗忘曲线告诉我们,克服遗忘的最佳办法就是马上进行强化.习题课上教师都要完成重难点突破,训练学生思维、总结解题规律,在此基础上可设计一些拓展练习,适时巩固所学的知识,以期效果的长效性.如:已知圆 $O: x^2 + y^2 = 1$,若 P 是直线 $l: x + 3y - 8 = 0$ 上任意一点,过 P 作圆 O 的切线 PA, PB ,切点为 A, B ,则四边形 $OAPB$ 面积的最小值是_____.

在学生答完此题后,教师适当拓展延伸几问:

(1) 题目条件不变,结论改为求 $\overline{PA} \cdot \overline{PB}$ 的最小值.

(2) 已知圆 $O: x^2 + y^2 = 1$,若 P 是直线 $l: mx + 3y - 8 = 0$ ($m > 0$)上任意一点,过 P 作圆 O 的切线 PA, PB ,切点为 A, B ,四边形 $OAPB$ 面积的最小值是2,则 m 的值为_____.

这样,通过一系列的拓展、延伸,学生对于有关圆的知识有了更为清晰的认识.特别是对于原图和拓展中学生最容易混淆的地方,通过拓展、辨析,对消除学生的困惑将有很大帮助.

3 结束语

以上笔者就上好数学习题课需过的“五关”,谈了自己的一点粗浅认识和做法.但我们做任何事,均不能“邯郸学步”.希望教师读者可以结合自身本校、本班学生的实际情况,制定出最适合自己学生的“教学策略”,让“习题课”这一课型成为学生最喜欢的课型之一,更让学生爱上数学习题课.

参考文献

- [1]王飞.基于核心素养下高中数学导学案的实践与思考[J].中学数学研究,2018(8):1-3
- [2]王飞.核心素养视域下高中数学试卷讲评课[J].中学数学研究,2018(4):1-3
- [3]殷长征.有效问题的特征及其建构策略[J].中小学数学,2017(1-2下):50-52
- [4]张春莉,刘怡.基于学生学习路径分析的教学路径研究[J].中小学教师培训,2015(9):39-43

基于“四基”的初中数学单元作业设计与评价

李生华 许凤娇

厦门五缘第二实验学校(361000)

作业在教学中扮演着重要的角色,它不仅与教师的“教”和学生的“学”有着千丝万缕的关系,而且对其的研究是深化课程改革的关键^[1].近年来,随着中小学生减负进一步受到重视,作业设计的研究不断在推进.2019年6月中共中央、国务院印发的《关于深化教育教学改革全面提高义务教育质量的意见》明确指出要提高作业设计质量.对于学校和教师来说,要提高校本作业设计质量,首先思考

怎样的校本作业设计才有效呢?如何评价?通过实践以核心素养为指导,以构建整体性的单元为核心目标开展作业设计,能够从宏观的角度提高作业设计质量.

1 单元作业的界定

《教育大辞典》把完成学习任务的作业分为课堂作业和课外作业两大类,单元校本作业属于课外作业范畴.从时间维度来看,作业有课时作业,单