向量法解立体几何的几个难点解读

■ 向正银

摘要:在立体几何问题中,通过建立恰当的空间直角坐标系,利用空间向量的坐标运算证明空间中的线、面的平行与垂直关系,计算空间角及空间距离,常与空间几何体的结构特征,空间线、面位置关系的判定定理与性质定理等综合,以解答题出现[1].有时个别点的坐标不能直接写出来,需要借助向量间的关系来转化;有时已知条件不能直接写坐标,需要借助参数来写坐标;有时结论是开放性问题,需要借助条件列方程,通过方程是否有解来判断结论是否成立;有时是折叠问题要注意折叠前后中变化与不变量,合理建系写坐标是解答此类问题的前提.

关键词:坐标系;法向量;二面角

利用空间向量求角与距离是高考的一个高频考点,关键是建立空间直角坐标系,在没有明显建系条件的,先要找到两两垂直的三条线,[2] 再选择合适的原点建系,有时个别点的坐标不能直接写出来,需要借助向量间的关系来转化;有时已知条件不能直接写坐标,需要借助参数来写坐标;有时结论是开放性问题,需要借助条件列方程,通过方程是否有解来判断结论是否成立;有时是折叠问题要注意折叠前后中变化与不变量,合理建系写坐标是解答此类问题的前提.

一、建系后个别点的坐标直接写不出,利用向量间的关系来转化

例1 (2017届高三北京海淀模拟试题)如图1,在三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中,侧面 ABB_1A_1 为矩形,$AB=2$,$AA_1=2\sqrt{2}$,D 是 AA_1 的中点,BD 与 AB_1 交于点 O,且 $CO\perp$ 平面 ABB_1A_1.

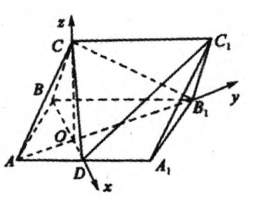

图1

(1)求证:平面 $BCD\perp$ 平面 AB_1C;

(2)若 $OC=OA$,求直线 C_1D 与平面 ABC 所成的角的正弦值.

解:(1)$AB=2$,$AA_1=2\sqrt{2}$,D 是 AA_1 的中点,$\triangle BAD\backsim\triangle AA_1B_1$,$\angle AB_1B=\angle ABD$,$\angle BAB_1+\angle ABD=90°$,$\angle BOA=90°$,$BD\perp AB_1$,$CO\perp$ 平面 ABB_1A_1,$CO\perp AB_1$,$BD\cap CO=O$,$AB_1\perp$ 平面 BCD,$AB_1\subset$ 平面 AB_1C,所以平面 $BCD\perp$ 平面 AB_1C.

(2)以 O 为原点,分别以 OD,OB_1,OC 所在的直线为 x 轴,y 轴,z 轴建立空间坐标系,

$A(0,-\frac{2\sqrt{3}}{3},0)$,$D(\frac{\sqrt{6}}{3},0,0)$,$B(-\frac{2}{3}\sqrt{6},0,0)$,$C(0,0,\frac{2\sqrt{3}}{3})$,$\overrightarrow{CC_1}=2\overrightarrow{AD}$,$\overrightarrow{AB}=(1,\sqrt{3},0)$,$\overrightarrow{DC}=(-\frac{\sqrt{6}}{3},0,\frac{2}{3}\sqrt{3})$,$\overrightarrow{CC_1}=(\frac{2}{3}\sqrt{6},\frac{4}{3}\sqrt{3},0)$,$\overrightarrow{DC_1}=\overrightarrow{DC}+\overrightarrow{CC_1}=(\frac{\sqrt{6}}{3},\frac{4}{3}\sqrt{3},\frac{2}{3}\sqrt{3})$,设平面的一个法向量为 $\boldsymbol{m}=(x,y,z)$,$\boldsymbol{m}\cdot\overrightarrow{AB}=0$,$\boldsymbol{m}\cdot\overrightarrow{AC}=0$,令 $x=1$,$\boldsymbol{m}=(1,\sqrt{2},-\sqrt{2})$.设直线 C_1D 与平面 ABC 所成的角为 α,$\sin\alpha=$

$|\cos\langle\boldsymbol{m},\overrightarrow{DC_1}\rangle|=\frac{3}{55}\sqrt{55}$.

点评:这道试题学生正确率很低,绝大多数学生在 C_1 的坐标上纠结,有的利用 C_1 在平面 ABB_1A_1 上的投影来写很麻烦,建系后 C_1 的坐标不好写,借助 $\overrightarrow{CC_1}=2\overrightarrow{AD}$,$\overrightarrow{DC_1}=\overrightarrow{DC}+\overrightarrow{CC_1}$ 写出 $\overrightarrow{DC_1}$ 的坐标,从而回避写 C_1 的坐标,使问题简单化.

二、题目已知数据太少无法写坐标,巧设多个参数求解

例2 (2017年武汉市四月高三联考试题)如图2,在三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中,平面 $A_1ACC_1\perp$ 平面 ABC,$AB=BC=2$,$\angle ACB=30°$,$\angle C_1CB=120°$,$BC_1\perp A_1C$.E 为 AC 中点,

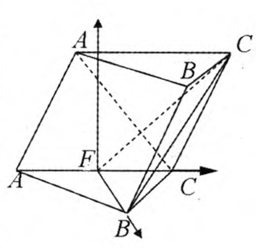

图2

(1)求证:$A_1C\perp$ 平面 C_1EB;

(2)求二面角 A_1-AB-C 的余弦值.

解:设 $A_1(0,t,h)$,$\overrightarrow{CC_1}=(0,t+\sqrt{3},h)$,$\overrightarrow{BC_1}=$

作者简介:向正银(1971-),男,湖北省兴山人,本科,中学高级教师,主要从事高中数学教学研究

$(-1,t+2\sqrt{3},h)$，$\angle C_1CB=120°$，$BC_1^2=BC^2+CC_1^2-2BC\cdot CC_1\cos120°$，$(t+2\sqrt{3})^2+h^2+1=4+(t+\sqrt{3})^2+h^2+2\times2\times\sqrt{(t+\sqrt{3})^2+h^2}\cos120°$，$h^2=2t^2+4\sqrt{3}+6$　　(1)

平面$A_1ACC_1\perp$平面C_1ABC，$AB=BC=2$，E为AC中点，所以$EC_1\perp CA_1$，$\overrightarrow{EC_1}\cdot\overrightarrow{CA_1}=t^2+\sqrt{3}t+h^2-6=0$　　(2)

联立(1)(2)解方程组得，$t=-\frac{5}{3}\sqrt{3}$，$h=\frac{2}{3}\sqrt{6}$，$A(0,-\sqrt{3},0)$，$B(1,0,0)$，$A_1(0,-\frac{5}{3}\sqrt{3},\frac{2}{3}\sqrt{6})$，$\overrightarrow{AB}=(1,\sqrt{3},0)$，$\overrightarrow{AA_1}=(0,-\frac{2}{3}\sqrt{3},\frac{2}{3}\sqrt{6})$，设平面$A_1AB$的一个法向量$\boldsymbol{m}=(x,y,z)$，由$\boldsymbol{m}\cdot\overrightarrow{AB}=0$，$\boldsymbol{m}\cdot\overrightarrow{AA_1}=0$，得一个法向量$\boldsymbol{m}=(-\sqrt{6},\sqrt{2},1)$，平面$ABC$的一个法向量$\boldsymbol{n}=(0,0,1)$，$\cos\langle\boldsymbol{m},\boldsymbol{n}\rangle=\frac{1}{3}$，二面角$A_1-AB-C$的余弦值为$\frac{1}{3}$.

点评：这道立体几何是一道难题，当时学生的正确率不到1%，因为建系后A_1的坐标不知道，标准答案是设$AA_1=t$，$\angle A_1AC=\alpha$两个参数，通过条件列两个方程，解出参数，写出A_1的坐标，使问题解决，实际上直接设A_1的坐标，更容易思考和计算.

三、点是平面内的动点，通过建立函数关系求最值

例3　(2017年高考荆州中学模拟冲刺试题)如图3，在直角梯形AA_1B_1B中，$\angle A_1AB=90°$，$A_1B_1\parallel AB$，$A_1B_1=1$，$AB=AA_1=2$. 直角梯形AA_1C_1C通过直角梯形AA_1B_1B以直线AA_1为轴旋转得到，且使得平面$AA_1C_1C\perp$平面AA_1B_1B.

(Ⅰ)求证：平面$CAB_1\perp$平面AA_1B_1B；

(Ⅱ)延长B_1A_1至点D_1，使$B_1A_1=A_1D_1$，E为平面ABC内的动点，若直线D_1E与平面CAB_1所成的角为α，且$\sin\alpha=\frac{2\sqrt{5}}{5}$，求点$E$到点$B$的距离的最小值.

解：(Ⅰ)直角梯形AA_1B_1B中，$\angle A_1AB=90°$，直角梯形AA_1C_1C通过直角梯形AA_1B_1B以直线AA_1为轴旋转得到，所以$AC\perp AA_1$，又平面$AA_1C_1C\perp$平面AA_1B_1B，所以$AC\perp$平面AA_1B_1B，因为平面$\subset$平面CAB_1，所以平面$CAB_1\perp$平面AA_1B_1B.

(Ⅱ)由(Ⅰ)可知AC，AB，AA_1两两垂直. 分别以AC，AB，AA_1为x轴、y轴、z轴建立空间直角坐标系如图3所示. 由已知$AB=AC=AA_1=2A_1B_1=2A_1C_1=2$，所以$A(0,0,0)$，$B(0,2,0)$，$C(2,0,0)$，$B_1(0,1,2,)$，$A_1(0,0,2)$，$D_1(0,-1,2)$，所以$\overrightarrow{AC}=(2,0,0)$，$\overrightarrow{AB_1}=(0,1,2)$，设$\boldsymbol{n}=(a,b,c)$是平面$CAB_1$的法向量，则

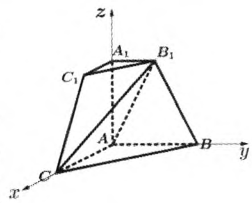

图3

$\begin{cases}\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{AC}=0,\\ \boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{AB_1}=0,\end{cases}$即$\begin{cases}2a=0,\\ b+2c=0.\end{cases}$取$c=1$，得$\boldsymbol{n}=(0,-2,1)$.

设E的坐标为$(x,y,0)$，则$\overrightarrow{D_1E}=(x,y+1,-2)$，由$\sin\alpha=|\cos\langle\overrightarrow{D_1E},\boldsymbol{n}\rangle|=\frac{2\sqrt{5}}{5}$，得$\frac{|-2(y+1)-2|}{\sqrt{5}\sqrt{x^2+(y+1)^2+4}}=\frac{2\sqrt{5}}{5}$，所以$x^2=2y-1$，因为$\overrightarrow{BE}=(x,y-2,0)$，所以$|\overrightarrow{EB}|=\sqrt{x^2+(y-2)^2}=\sqrt{2y-1+(y-2)^2}=\sqrt{y^2-2y+3}=\sqrt{(y-1)^2+2}$，所以，当$y=1$时，$|\overrightarrow{EB}|_{\min}=\sqrt{2}$，所以点$E$到点$B$的距离的最小值为$\sqrt{2}$.

点评：点E是平面ABC内的动点，建系后通过直线D_1E与平面CAB_1所成的角为α，且$\sin\alpha=\frac{2\sqrt{5}}{5}$这个条件建立函数关系式，把点$E$到点$B$的距离的表示成关于$y$的函数，通过求函数的最值求出$E$到点$B$的距离的最小值.

四、开放性问题通过方程是否有解来判断

例4　(2017年齐鲁名校联考试题)如图4，在四棱锥$P-ABCD$中，底面$ABCD$为直角梯形，$PA=AB=AD=\frac{1}{2}BC=2$，且$\angle BAD=90°$，$AD\parallel BC$，$PA\perp$平面$ABCD$，点M满足$\overrightarrow{PM}=\overrightarrow{MC}$，

(1)求证：平面$DPC\perp$平面BPC；

(2)若点E为BC边上的动点，且$\frac{BE}{BC}=\lambda$，是否存在实数λ，使得二面角$P-DE-B$的余弦值为$\frac{2}{3}$，若存在，求出实数λ的值；若不存在，请说明理由.

解析：(1)如图4，取PB中点N，连结MN，AN.

因为M是PC中点，所以$MN\parallel BC$，$MN=\frac{1}{2}BC=2$. 又因为$BC\parallel AD$，$AD=2$，

所以$MN\parallel AD$，$MN=AD$，所以四边形$ADMN$为平行四边形.

因为 $AP\perp AD, AB\perp AD$，$AP\cap AB=A$，所以 $AD\perp$ 平面 PAB.

因为 $AN\subset$ 平面 PAB，所以 $AD\perp AN$，所以 $AN\perp MN$. $AP=AB$，

所以 $AN\perp PB$，$MN\cap PB=N$，所以 $AN\perp$ 平面 PBC.

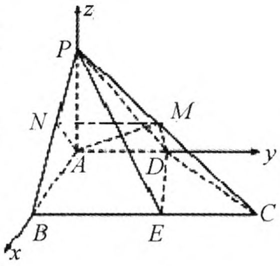

图 4

因为 $AN\parallel DM$，所以 $DM\perp$ 平面 PBC. 从而平面 $DPC\perp$ 平面 BPC

(2) 存在符合条件的 λ. 以 A 为原点，AB 方向为 x 轴的正方向，AD 方向为 y 轴的正方向，AP 方向为 z 轴的正方向，建立如图所示的空间直角坐标系.

设 $E(2,t,0)(0\leqslant t\leqslant 4)$，$P(0,0,2)$，$D(0,2,0)$，$B(2,0,0)$，则 $\overrightarrow{PD}=(0,2,-2)$，$\overrightarrow{DE}=(2,t-2,0)$. 设平面 PDE 的法向量 $\boldsymbol{n}_1=(x,y,z)$，则 $\boldsymbol{n}_1\cdot\overrightarrow{PD}=0$，$\boldsymbol{n}_1\cdot\overrightarrow{DE}=0$，

所以 $\begin{cases}2y-2z=0,\\2x+(t-2)y=0.\end{cases}$

令 $y=2$，则 $z=2$，$x=t-2$，取平面 PDE 的一个法向量为 $\boldsymbol{n}_1=(2-t,2,2)$

平面 DEB 即为 xAy 平面，故其一个法向量为 $\boldsymbol{n}_1=(0,0,1)$，$\overrightarrow{AD}=(\sqrt{3},1,0)$，$\cos\langle\boldsymbol{n}_1,\boldsymbol{n}_2\rangle=\dfrac{2}{\sqrt{(2-t)^2+4+4}}=\dfrac{2}{3}$. 解得 $t=3$ 或 $t=1$，所以 $\lambda=3$ 或 $\lambda=\dfrac{1}{3}$.

点评：立体几何中开放性试题，应用向量法写坐标是学生的一个难点，因为学生见到题目中的含参问题有一种恐惧感，合理利用题目条件，巧设坐标，尽可能减少运算是解决这类问题的关键所在.

五、折叠问题注意折叠前后变中抓不变

例 5 (2014 年广州高三模拟试题) 如图 5，圆 O 直径 $AB=4$，点 C,D 为圆 O 上的两点，且 $\angle CAB=45^\circ$，$\angle DAB=60^\circ$，点 F 为 BC 弧的中点，沿直径 AB 折起，使两个半圆所在的平面互相垂直

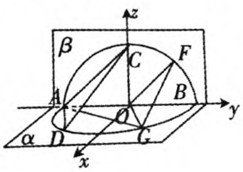

图 5

(1) 求证：$OF\parallel$ 平面 ACD；

(2) 求二面角 $C-AD-B$ 的余弦值；

(3) 在 BC 弧上是否存在点 G，使得 $FG\parallel$ 平面 ACD? 若存在，试指出点 G 的位置，并求直线 AG 与平面 ACD 所成角的正弦值；若不存在，请说明理由.

解：(1) 如图，以 AB 所在的直线为 x 轴，以 OC 所在的直线为 z 轴，以 O 为原点，作空间直角坐标系 $O-xyz$，则，点 F 为 BC 弧的中点，则点 F 的坐标为 $(0,\sqrt{2},\sqrt{2})$，$\overrightarrow{OF}=(0,\sqrt{2},\sqrt{2})$，即 $\overrightarrow{OF}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}\overrightarrow{AC}$，则 $OF\parallel AC$，所以 $OF\parallel$ 平面 ACD.

(2) $\angle DAB=60^\circ$，$D(\sqrt{3},-1,0)$，$\overrightarrow{AD}=(3\sqrt{3},1,0)$，设二面角 $C-AD-B$ 的大小为 θ，平面 ACD 的一个法向量为 $\boldsymbol{n}_1=(x,y,z)$. $\boldsymbol{n}_1\cdot\overrightarrow{AC}=0$，$\boldsymbol{n}_1\cdot\overrightarrow{AD}=0$，令 $x=1$，得 $\boldsymbol{n}_1=(1,-\sqrt{3},\sqrt{3})$，取平面 ADB 的一个法向量为 $\boldsymbol{n}_1=(0,0,1)$.

$\cos\theta=\cos\langle\boldsymbol{n}_1,\boldsymbol{n}_2\rangle=\dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{7}}=\dfrac{\sqrt{21}}{7}$，由图知二面角 $C-AD-B$ 为锐角二面角 $C-AD-B$ 的余弦值为 $\dfrac{\sqrt{21}}{7}$.

(3) 设在 BC 弧上存在点 G，使得 $FG\parallel$ 平面 ACD. 因为 $OF\parallel$ 平面 ACD，

若平面 $OFG\parallel$ 平面 ACD，则 $OG\parallel AD$，设 $\overrightarrow{OG}=\lambda\overrightarrow{AD}(\lambda>0)$，因为 $\overrightarrow{AD}=(\sqrt{3},1,0)$.

所以 $\overrightarrow{OG}=(\sqrt{3}\lambda,\lambda,0)$. 因为 $|\overrightarrow{OG}|=2$，所以 $\lambda=1$，所以 $\overrightarrow{OG}=(\sqrt{3},1,0)$，$G$ 为 BD 弧的中点.

所以在 BC 弧上存在点 G，使得 $FG\parallel$ 平面 ACD，这时 G 为 BD 弧的中点.

设直线 AG 与平面 ACD 所成角为 α，$\overrightarrow{AG}=(\sqrt{3},3,0)$，平面 ACD 的一个法向量为 $\boldsymbol{n}_1=(1,-\sqrt{3},\sqrt{3})$，$\sin\alpha=|\cos\langle\boldsymbol{n}_1,\overrightarrow{AG}\rangle|=\dfrac{\sqrt{7}}{7}$.

点评：由平面图形经过折叠在空间中得到立体图形，由这个图形产生立体几何中的基本问题在试题设计中十分常见，此类题求解时，一定要注意折叠前平面图形中各线条之间的关系及量的大小，要注意折叠前后中变化与不变量，变中抓不变是解决这类问题的关键.

参考文献：

[1] 马金花. 向量法解立体几何问题[J]. 新课程，2008(2).

[2] 陈雪梅. 中学向量课程与教学的研究[D]. 华东师范大学，2007.

[湖北省兴山县第一中学 (443700)]