"同构法"巧解不等式问题

杨瑞强

(黄石市第一中学　湖北　黄石　435000)

摘　要:"同构法"巧解不等式问题是对原不等式同解变形,把不等式转化为左右两边是相同结构的式子,根据"相同结构"构造辅助函数,巧妙利用函数单调性解题.

关键词:同构法;不等式;单调性

把一个等式或不等式通过变形,使左右两边结构形式完全相同,可构造函数,利用函数的单调性进行处理,找这个函数模型的方法就是同构法.例如若$F(x)\geqslant 0$能等价变形为$f[g(x)]\geqslant f[h(x)]$,然后利用$f(x)$的单调性(如递增),再转化为$g(x)\geqslant h(x)$.

1　利用同构法巧解不等式

例题1　不等式$(x^2-1)^{1011}+x^{2022}+2x^2-1\leqslant 0$的解集为______.

解析　不等式可变形为$(x^2-1)^{1011}+x^2-1+(x^2)^{1011}+x^2\leqslant 0$,$(x^2)^{1011}+x^2\leqslant(1-x^2)^{1011}+1-x^2$.

设$f(x)=x^{1011}+x$,$f(x^2)\leqslant f(1-x^2)$,显然$f(x)$在$\mathbf{R}$上单调递增,所以$x^2\leqslant 1-x^2$,解得$-\frac{\sqrt{2}}{2}\leqslant x\leqslant\frac{\sqrt{2}}{2}$.

故不等式的解集为$\left[-\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{\sqrt{2}}{2}\right]$.

评析　本题主要考查构造函数法解不等式,合理构造函数是解题的关键,利用复合函数(或导数法)确定新函数的单调性,不等式转化为新函数的不等式,从而易求解.

2　利用同构法巧解双变量不等式问题

例题2　已知函数$f(x)=\cos x(x\in[0,\pi])$,若$\forall x_1,x_2\in[0,\pi]$,$x_1\neq x_2$,都有$|f(x_1)-f(x_2)|<k|x_1-x_2|$,则实数$k$的最小值是______.

解析　不妨设$0\leqslant x_1<x_2\leqslant\pi$,因为$f(x)=\cos x$在$[0,\pi]$上单调递减,则$f(x_1)>f(x_2)$.

所以$|f(x_1)-f(x_2)|<k|x_1-x_2|$.

即$f(x_1)-f(x_2)<k|x_1-x_2|<kx_2-kx_1$.

即$f(x_1)+kx_1<f(x_2)+kx_2$.

记$g(x)=f(x)+kx=\cos x+kx$,则$g(x)$在区间$[0,\pi]$上单调递增,所以$g'(x)=k-\sin x\geqslant 0$在$[0,\pi]$上恒成立.

所以$k\geqslant(\sin x)_{\max}=1$,故$k$的最小值为1.

评析　含有地位同等的两个变量x_1,x_2或x,y的等式或不等式,如果进行整理(即同构)后,等式或不等式两边具有结构的一致性,往往暗示应构造函数,应用单调性解决.

含有二元变量的函数,常见的同构类型有:

①$f(x_1)-f(x_2)>\lambda[g(x_2)-g(x_1)]\Leftrightarrow f(x_1)+\lambda g(x_1)>f(x_2)+\lambda g(x_2)$,构造函数$h(x)=f(x)+\lambda g(x)$;

②$\frac{f(x_1)-f(x_2)}{x_1-x_2}>k(x_1<x_2)\Leftrightarrow f(x_1)-f(x_2)<k(x_1-x_2)$,构造函数$h(x)=f(x)-kx$;

作者简介:杨瑞强(1979-),男,湖北黄冈人,本科,中学高级教师,研究方向:中学数学教学.

学思想除了上述提到的数形结合思想、方程思想、比较思想,还有分类讨论思想、化归与转化思想等.在解题过程中,灵活应用数学思想可以提高数学解题能力,架构良好的数学认知结构,更加清晰地进行逻辑推理,进而培养学生数学素养,形成良好的思维品质.

参考文献:

[1]李晶,孙雪梅,李德安.一题之探——以数形结合思想为例[J].数学通报,2019,58(04):60-63.

[2]杨孝斌,周国利,周娅.两道"解三角形"高考题的解法研究、比较分析及教学启示——以全国Ⅲ卷理科数学2017年第17题、2019年第18题为例[J].兴义民族师范学院学报,2020(01):112-116+124.

(收稿日期:2021-09-11)

③$\frac{f(x_1)-f(x_2)}{x_1-x_2}>\frac{k}{x_1x_2}(x_1<x_2)\Leftrightarrow f(x_1)-f(x_2)<k(\frac{1}{x_2}-\frac{1}{x_1})$，构造函数 $h(x)=f(x)+\frac{k}{x}$.

3 利用同构法巧解不等式恒成立问题

3.1 积型 $ae^a\leqslant b\ln b$ 同构

例题3 若对任意的实数 $x\geqslant1$，不等式 $e^{kx}-\frac{\ln x}{k}\geqslant0$ 恒成立，则正数 k 的取值范围是______.

解析 因为 $x\geqslant1,k>0$，所以 $e^{kx}-\frac{\ln x}{k}\geqslant0$.

所以 $ke^{kx}\geqslant\ln x$. 所以 $(kx)e^{kx}\geqslant x\ln x$.

方法1 (构造同左 $ae^a\leqslant(\ln b)e^{\ln b}$ 形式) $(kx)e^{kx}\geqslant x\ln x\Leftrightarrow(kx)e^{kx}\geqslant(\ln x)e^{\ln x}$.

令 $f(t)=te^t,t\geqslant0,f'(t)=(t+1)e^t>0$，即 $f(t)$ 在 $[0,+\infty)$ 上单调递增.

则 $\forall x\geqslant1,e^{kx}-\frac{\ln x}{k}\geqslant0\Leftrightarrow f(kx)\geqslant f(\ln x)\Leftrightarrow kx\geqslant\ln x\Leftrightarrow k\geqslant\frac{\ln x}{x}$.

令 $g(x)=\frac{\ln x}{x},x\geqslant1$，则 $g'(x)=\frac{1-\ln x}{x^2}$. 当 $1<x<e$ 时，$g'(x)>0$，当 $x>e$ 时，$g'(x)<0$，所以 $g(x)$ 在 $(1,e)$ 上单调递增，在 $(e,+\infty)$ 上单调递减，所以 $x=e$ 时，$g(x)_{\max}=\frac{1}{e}$，即 $k\geqslant\frac{1}{e}$.

故正数 k 的取值范围是 $\left[\frac{1}{e},+\infty\right)$.

方法2 (构造同右 $e^a\ln e^a\leqslant b\ln b$ 形式) $(kx)e^{kx}\geqslant x\ln x\Leftrightarrow e^{kx}\ln e^{kx}\geqslant x\ln x$.

令 $f(x)=t\ln t,t\geqslant1$，则 $f'(t)=1+\ln t>0$，即 $f(x)$ 在 $[1,+\infty)$ 上单调递增.

则 $\forall x\geqslant1,e^{kx}-\frac{\ln x}{k}\geqslant0\Leftrightarrow f(e^{kx})\geqslant f(x)\Leftrightarrow e^{kx}\geqslant x\Leftrightarrow k\geqslant\frac{\ln x}{x}$. 下同解法1.

方法3 (取对数 $a+\ln a\leqslant\ln b+\ln(\ln b)$ 形式) $(kx)e^{kx}\geqslant x\ln x\Leftrightarrow kx+\ln(kx)\geqslant\ln x+\ln(\ln x)$.

令 $f(x)=t+\ln t,t>0$，则 $f'(x)=1+\frac{1}{t}>0$，即 $f(t)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增.

则 $\forall x\geqslant1,e^{kx}-\frac{\ln x}{k}\geqslant0\Leftrightarrow f(kx)\geqslant f(\ln x)\Leftrightarrow kx\geqslant\ln x\Leftrightarrow k\geqslant\frac{\ln x}{x}$. 下同解法1.

评析 三种同构途径：①同左 $ae^a\leqslant(\ln b)e^{\ln b}$，构造函数 $f(x)=xe^x$；②同右 $e^a\ln e^a\leqslant b\ln b$，构造函数 $f(x)=x\ln x$；③取对数 $a+\ln a\leqslant\ln b+\ln(\ln b)$，构造函数 $f(x)=x+\ln x$. 为了实现不等式两边"结构"相同的目的，需要对已知的指对式进行"改头换面"，常见的同构变形有：$x=e^{\ln x}=\ln e^x$，$x\ln x=e^{\ln x}\cdot\ln x$，$xe^x=e^{\ln x+x}=e^x\cdot\ln e^x$，$\frac{e^x}{x}=e^{x-\ln x}$ 等.

3.2 商型 $\frac{e^a}{a}\leqslant\frac{b}{\ln b}$(或 $\frac{a}{e^a}\leqslant\frac{\ln b}{b}$)同构

例题4 若对任意的实数 $0<x<1$，不等式 $\frac{a\ln x}{x}<\frac{x+\ln a}{e^x}$ 恒成立，则实数 a 的取值范围是______.

解析 由已知可得 $a>0$.

当 $a\geqslant1$ 时，不等式左边小于0，右边大于0，不等式显然成立.

当 $0<a<1$ 时，$\frac{a\ln x}{x}<\frac{x+\ln a}{e^x}\Leftrightarrow\frac{\ln x}{x}<\frac{x+\ln a}{ae^x}$.

方法1 $\frac{\ln x}{x}<\frac{x+\ln a}{ae^x}\Leftrightarrow\frac{\ln x}{e^{\ln x}}<\frac{x+\ln a}{e^{x+\ln a}}$.

设 $g(t)=\frac{t}{e^t}(t<1)$，则 $g'(t)=\frac{e^t-te^t}{e^{2t}}=\frac{1-t}{e^t}>0$，所以 $g(t)$ 在 $(-\infty,1)$ 上单调递增.

因为 $0<x<1,0<a<1$，所以 $\ln x<0,x+\ln a<0$，于是原不等式等价于 $g(\ln x)<g(x+\ln a)\Leftrightarrow\ln x<x+\ln a\Leftrightarrow\ln a>\ln x-x$ 在 $(0,1)$ 上恒成立.

令 $h(x)=\ln x-x(0<x<1)$，则 $h'(x)=\frac{1}{x}-1=\frac{1-x}{x}>0$，所以 $h(x)$ 在 $(0,1)$ 上单调递增，于是 $\ln a\geqslant h(1)=-1$，即 $\frac{1}{e}\leqslant a<1$.

综上所述，实数 a 的取值范围是 $\left[\frac{1}{e},1\right)$.

方法2 $\frac{\ln x}{x}<\frac{x+\ln a}{ae^x}\Leftrightarrow\frac{\ln x}{x}<\frac{\ln(ae^x)}{ae^x}$.

令 $g(t)=\frac{\ln t}{t}(0<t<e)$，则 $g'(t)=\frac{1-\ln t}{t^2}>0$，所以 $g(t)$ 在 $(0,e)$ 上单调递增.

原不等式等价于 $g(x)<g(ae^x)\Leftrightarrow x<ae^x\Leftrightarrow a>\frac{x}{e^x}\Leftrightarrow\ln a>\ln x-x$ 在 $(0,1)$ 上恒成立. 下同解法1.

评析 三种同构途径：①同左 $\frac{e^a}{a}\leqslant\frac{e^{\ln b}}{\ln b}$(或 $\frac{a}{e^a}\leqslant$

$\frac{\ln b}{e^{\ln b}}$)，构造函数 $f(x)=\frac{e^x}{x}$(或 $f(x)=\frac{x}{e^x}$)；②同右 $\frac{e^a}{\ln e^a}\leqslant\frac{b}{\ln b}$(或 $\frac{\ln e^a}{e^a}\leqslant\frac{\ln b}{b}$)，构造函数 $f(x)=\frac{x}{\ln x}$(或 $f(x)=\frac{\ln x}{x}$)；③取对数 $a-\ln a\leqslant\ln b-\ln(\ln b)$(或 $\ln a-a\leqslant\ln(\ln b)-\ln b$)，构造函数 $f(x)=x-\ln x$(或 $f(x)=\ln x-x$). 指数和对数混合的导数题，直接使用同构的题目并不多，许多情况下，需要凑出同构的形式，因为指数和对数之间可以互相转换，尽量转换为常见的 $ae^a\leqslant b\ln b$，$\frac{e^a}{a}\leqslant\frac{b}{\ln b}$，$e^a\pm a\leqslant b\pm\ln b$ 三种同构形式.

3.3 和差型 $e^a\pm a\leqslant b\pm\ln b$ 同构

例题 5 已知函数 $f(x)=ae^{x-1}-\ln x+\ln a$，若 $f(x)\geqslant 1$，求 a 的取值范围.

解析 将 $f(x)\geqslant 1$ 按照左右结构相同、变量移至一边的原则进行变形：

由 $f(x)=ae^{x-1}-\ln x+\ln a\geqslant 1$，移项，得 $ae^{x-1}+\ln a\geqslant\ln x+1$. 即 $e^{\ln a+x-1}+\ln a\geqslant\ln x+1$.

两边同时加 $x-1$，得

$e^{\ln a+x-1}+x+\ln a-1\geqslant\ln x+x$.

即 $e^{\ln a+x-1}+(x+\ln a-1)\geqslant\ln x+e^{\ln x}$.

设 $g(x)=x+e^x$，则 $g'(x)=1+e^x>0$.

所以 $g(x)$ 单调递增.

所以 $\ln a+x-1\geqslant\ln x$.

即 $x-\ln x+\ln a-1\geqslant 0$.

设 $h(x)=x-\ln x+\ln a-1$，则 $h'(x)=1-\frac{1}{x}$.

所以 $h(x)$ 在 $(0,1)$ 上单调递减，在 $(1,+\infty)$ 上单调递增.

所以 $h(x)_{\min}=h(1)=\ln a-1\geqslant 0$，故 $a\geqslant 1$.

评析 两种同构途径：①同左 $e^a\pm a\leqslant e^{\ln b}\pm\ln b$，构造函数 $f(x)=e^x\pm x$；②同右 $e^a\pm\ln e^a\leqslant b\pm\ln b$，构造函数 $f(x)=x\pm\ln x$. 对原不等式同解变形，如移项、通分、取对数、系数升指数等，有时也需要对两边同时加、乘某式等，把不等式转化为左右两边是相同结构的式子，根据“相同结构”构造辅助函数.

4 利用同构法巧求零点或证明不等式问题

例题 6 已知函数 $f(x)=x(x-\ln\frac{x^2}{a})$ 关于 x 的方程 $f(x)=a$ 存在四个不等实数根，则实数 a 的取值范围是(   ).

A. $(0,1)\cup(1,e)$ B. $(0,\frac{1}{e})$

C. $(\frac{1}{e},1)$ D. $(0,1)$

解析 首先由 $f(x)$ 的定义域可知，$\frac{x^2}{a}>0\Rightarrow a>0$.

由 $f(x)=a$ 可得 $a(x-\ln\frac{x^2}{a})=a$，$x-\ln\frac{x^2}{a}-\frac{a}{x}=0$.

设 $g(x)=x-\ln\frac{x^2}{a}-\frac{a}{x}$，当 $x<0$ 时，$g(x)$ 在 $(-\infty,0)$ 上单调递增，且 $g(-\sqrt{a})=0$，故 $g(x)$ 在 $(-\infty,0)$ 上有唯一实数根；

当 $x>0$ 时，由 $x-\ln\frac{x^2}{a}-\frac{a}{x}=0$，得 $x-\ln\frac{x^2}{a}=\frac{a}{x}$，所以 $x+\ln\frac{a}{x^2}=\frac{a}{x}$，即 $x-\ln x=\frac{a}{x}-\ln\frac{a}{x}$.

令 $h(x)=x-\ln x$，则 $h'(x)=\frac{x-1}{x}$，所以 $h(x)$ 在 $(0,1)$ 上单调递减，在 $(1,+\infty)$ 上单调递增.

当 $x=\frac{a}{x}$ 即 $x=\sqrt{a}$ 时，满足题意；

当 $x\neq\frac{a}{x}$ 时，由 $x-\ln x=\frac{a}{x}-\ln\frac{a}{x}$，得 $1=\frac{x-\frac{a}{x}}{\ln x-\ln\frac{a}{x}}>\sqrt{x\cdot\frac{a}{x}}=\sqrt{a}$，所以 $0<a<1$，故选 D.

评析 同构思想在求函数的零点或证明不等式等问题中有着巧妙应用，尤其所涉及函数包含指数、对数函数混合的类型，这种方法关键在于化函数式为结构相同的式子，再构造函数进一步解决问题.

同构法构造函数是高中数学解题的一种常见方法，在解题实践过程中，若能通过观察、分析、整理等变形手段，看清题中函数结构的共性或等式(或不等式)两侧同构，则可轻松构造函数，巧妙利用函数单调性解题. 尤其是遇到“指数函数和对数函数”同时出现的试题时，我们可考虑采用“同构”的方法变形转化构造函数，从而达到化难为易，删繁就简的功效.

参考文献：

[1]张志刚. 例谈不等式中的同构变形策略[J]. 中学数学研究(华南师范大学版)，2021(03)：27－29.

[2]方明生. 聚焦问题本质，培养解题能力——从一道联考试题的多角度分析看“同构法”解决不等式恒成立问题的求解策略[J]. 数学教学研究，2020，39(05)：33－35＋39.

(收稿日期：2021－07－28)