$\frac{2s[2(s^2-4Rr-r^2)^2-8s^2r^2]+8Rrs(s^2-4Rr-r^2)}{2s(s^2+2Rr+r^2)}-\frac{s}{4Rrs}$
$\cdot[2s(s^2-6Rr-3r^2)]+\frac{2s[2s(s^2-6Rr-3r^2)]+8Rrs^2}{2s(s^2+2Rr+r^2)}=$
$s\cdot(\frac{1}{2Rr}\cdot\frac{s^4-6s^2r^2+r^4+16R^2r^2+8Rr^3-8Rrs^2}{s^2+2Rr+r^2}$
$-\frac{s^2-6Rr-3r^2}{2Rr}+\frac{3s^2-12Rr-7r^2}{s^2+2Rr+r^2})=s\cdot(1-\frac{2r}{R}+\frac{r^2}{R}\cdot$
$\frac{4R+4r}{s^2+2Rr+r^2}+\frac{2r^2}{s^2+2Rr+r^2})$.

定理 1 的证明:根据熟知的欧拉不等式 $R\geqslant 2r$ 可知 $18R^2-3Rr-2r^2\geqslant 16R^2+2R^2-3Rr-2r^2=16R^2+(R-2r)(2R+r)\geqslant 16R^2$,于是有 $18R^2-3Rr-2r^2\geqslant 16R^2$⑤. ⑤ 式等号成立当且仅当 $R=2r$,即 $\triangle ABC$ 为正三角形时成立时.

由引理 2 和引理 4 与⑤式,有 $\sum\frac{a^2}{b+c}\sin^2\frac{A}{2}=s\cdot(1-\frac{2r}{R}+\frac{r^2}{R}\cdot\frac{4R+4r}{s^2+2Rr+r^2}+\frac{2r^2}{s^2+2Rr+r^2})\leqslant s\cdot\left[1-\frac{2r}{R}+\frac{r^2}{R}\cdot\frac{4R+4r}{\frac{2r(4R+r)(2R-r)}{R}+2Rr+r^2}+\frac{2r^2}{\frac{2r(4R+r)(2R-r)}{R}+2Rr+r^2}\right]=s\cdot\left[1-\frac{2r}{R}+\frac{r^2}{R}\cdot\frac{R(4R+4r)}{r(18R^2-3Rr-2r^2)}+\frac{2Rr^2}{r(18R^2-3Rr-2r^2)}\right]=s\cdot\left[1-\frac{2r}{R}+\frac{r(4R+4r)}{18R^2-3Rr-2r^2}+\frac{2Rr}{18R^2-3Rr-2r^2}\right]=s\cdot(1-\cdot\frac{2r}{R}+\frac{6Rr+4r^2}{18R^2-3Rr-2r^2})\leqslant s\cdot(1-\frac{2r}{R}+\frac{6Rr+4r^2}{16R^2})=s\cdot(1-\frac{13r}{8R}+\frac{r^2}{4R^2})\leqslant\frac{3\sqrt{3}R}{2}\cdot(1-\frac{13r}{8R}+\frac{r^2}{4R^2})$,由引理 2 和引理 4 与⑤式等号成立的条件可知,不等式③等号当且仅当 $\triangle ABC$ 为正三角形时成立.

定理 2 的证明:根据熟知的欧拉不等式 $R\geqslant 2r$ 可知 $4R^3+6R^2r+3Rr^2+2r^3\leqslant 4R^3+6R^2\cdot\frac{R}{2}+3R\cdot\frac{R^2}{4}+\frac{2R^3}{8}=8R^3$,于是有 $4R^3+6R^2r+3Rr^2+2r^3\leqslant 8R^3$⑥,⑥式等号成立当且仅当 $R=2r$,即 $\triangle ABC$ 为正三角形时成立时.

由引理 3 和引理 4 与⑥式有 $\sum\frac{a^2}{b+c}\sin^2\frac{A}{2}=s\cdot(1-\frac{2r}{R}+\frac{r^2}{R}\cdot\frac{4R+4r}{s^2+2Rr+r^2}+\frac{2r^2}{s^2+2Rr+r^2})\geqslant s\cdot\left[1-\frac{2r}{R}+\frac{r^2}{R}\cdot\frac{4R+4r}{\frac{2(2R^2+r^2)(R+r)}{R}+2Rr+r^2}+\frac{2r^2}{\frac{2(2R^2+r^2)(R+r)}{R}+2Rr+r^2}\right]=s\cdot\left[1-\frac{2r}{R}+\frac{r^2(4R+4r)}{4R^3+6R^2r+3Rr^2+2r^3}+\frac{2Rr^2}{4R^3+6R^2r+3Rr^2+2r^3}\right]\geqslant s\cdot\left[1-\frac{2r}{R}+\frac{r^2(4R+4r)}{8R^3}+\frac{2Rr^2}{8R^3}\right]=s\cdot(1-\frac{2r}{R}+\frac{3r^2}{4R^2}+\frac{r^3}{2R^3})\geqslant 3\sqrt{3}r\cdot(1-\frac{2r}{R}+\frac{3r^2}{4R^2}+\frac{r^3}{2R^3})$

由引理 3 和引理 4 与⑥式等号成立的条件可知,不等式④等号当且仅当 $\triangle ABC$ 为正三角形时成立.

参考文献

[1] 姜卫东. 关于 Milosevic 不等式的加强[J]. 中学数学教学,2019(1):71.

[2] 匡继昌. 常用不等式(第四版)[M]. 济南:山东科学技术出版社,2010,234.

[3] 郭要红,刘其右. 一个 Finsler – Hadwiger 型不等式的加强[J]. 数学通报,2017,56(1)60 – 61.

[4] 王洪燕,郭要红. Finsler – Hadwiger 型不等式推广再研究[J]. 数学通报,2019,58(7)54 – 55.

[5] 郭要红,关于 Milosevic 不等式的再研讨[J]. 数学通报,2020,59(2)60 – 61.

一个圆锥曲线双斜率问题的统一解法

浙江省宁波市北仑中学 (315800) 吴文尧

在圆锥曲线的定点、定值问题中,常涉及以下问题:过圆锥曲线 T 上一定点 Q 作曲线 T 的两动弦 QA,QB,若直线 QA,QB 的斜率积(和)为定值,则直线 AB 经过一个定点. 我们不妨称之为“双斜率”问题,笔者研究发现解决这个问题的统一解法,现介绍如下,供大家参考.

万方数据

一、引理和定理

引理　设 P_1,P_2 是曲线 $T:Ax^2+Cy^2+Dx+Ey=0$（其中 $A+C\neq 0$）上的两个动点，O 为坐标原点，直线 OP_1,OP_2 的斜率分别为 k_1,k_2，则

（1）当 $k_1\cdot k_2=q$（q 为定值，其中 $Cq\neq A$）时，直线 P_1P_2 过定点 $\left(\dfrac{D}{Cq-A},\dfrac{-Eq}{Cq-A}\right)$；

（2）当 $k_1+k_2=p$（p 为定值，其中 $Cp\neq 0$），直线 P_1P_2 过定点 $\left(-\dfrac{E}{pC},-\dfrac{D+pE}{pC}\right)$.

证明：设 $P_1(x_1,y_1),P_2(x_2,y_2)$，设直线 P_1P_2 的方程为 $mx+ny=1$，由 $\begin{cases}Ax^2+Cy^2+Dx+Ey=0,\\ mx+ny=1\end{cases}$ 可得 $Ax^2+Cy^2+(Dx+Ey)(mx+ny)=0$，即 $(C+En)y^2+(Dn+Em)xy+(A+Dm)x^2=0$，所以 $(C+En)\left(\dfrac{y}{x}\right)^2+(Dn+Em)\left(\dfrac{y}{x}\right)+(A+Dm)=0$，其中 $k_1=k_{OP_1}=\left(\dfrac{y_1}{x_1}\right),k_2=k_{OP_2}=\left(\dfrac{y_2}{x_2}\right)$.

（1）当 $k_1\cdot k_2=q$ 时，$k_1\cdot k_2=\left(\dfrac{y_1}{x_1}\right)\cdot\left(\dfrac{y_2}{x_2}\right)=\dfrac{A+Dm}{C+En}=q$，即 $A+Dm=q(C+En)$，所以 $Dm-qEn=qC-A$，所以 $m\cdot\dfrac{D}{qC-A}+n\cdot\left(\dfrac{-Eq}{qC-A}\right)=1$，由于直线 P_1P_2 的方程为 $mx+ny=1$，所以直线 P_1P_2 过定点 $\left(\dfrac{D}{Cq-A},\dfrac{-Eq}{Cq-A}\right)$.

（2）当 $k_1+k_2=p$ 时，$k_1+k_2=\left(\dfrac{y_1}{x_1}\right)+\left(\dfrac{y_2}{x_2}\right)=-\dfrac{Dn+Em}{C+En}=p$，即 $Dn+Em=-p(C+En)$，所以 $mE+n(D+pE)=-pC$，所以 $m\cdot\left(-\dfrac{E}{pC}\right)+n\cdot\left(-\dfrac{D+pE}{pC}\right)=1$，由于直线 P_1P_2 的方程为 $mx+ny=1$，所以直线 P_1P_2 过定点 $\left(-\dfrac{E}{pC},-\dfrac{D+pE}{pC}\right)$.

定理　设 $Q(x_0,y_0)$ 是圆锥曲线 $T:Ax^2+Cy^2+Dx+Ey+F=0$ 上的定点，P_1,P_2 是曲线 T 上的两个动点，直线 QP_1,QP_2 的斜率分别为 k_1,k_2，则

（1）当 $k_1\cdot k_2=q$（q 为定值，其中 $Cq\neq A$）时，直线 P_1P_2 过定点 $\left(\dfrac{D+(A+Cq)x_0}{Cq-A},\dfrac{-Eq-(A+Cq)y_0}{Cq-A}\right)$；

（2）当 $k_1+k_2=p$（p 为定值，其中 $Cp\neq 0$）时，直线 P_1P_2 过定点 $\left(-\dfrac{2Cy_0-Cpx_0+E}{pC},-\dfrac{2Dx_0+pCy_0+D+pE}{pC}\right)$.

证明：因为 $Q(x_0,y_0)$ 是曲线 T 上的点，所以 $Ax_0^2+Cy_0^2+Dx_0+Ey_0+F=0$，作坐标系的平移：$\begin{cases}x=x'+x_0,\\ y=y'+y_0,\end{cases}$ 则在新坐标系 $x'o'y'$ 中，点 Q 的坐标为 $Q(0,0)$，曲线 T 的方程为 $A(x'+x_0)^2+C(y'+y_0)^2+D(x'+x_0)+E(y'+y_0)+F=0$，即 $A(x')^2+C(y')^2+(2Ax_0+D)x'+(2Cy_0+E)y'=0$.

（1）当 $k_1\cdot k_2=q$ 时，由引理可知，直线 P_1P_2 过定点 $\left(\dfrac{D+2Ax_0}{Cq-A},\dfrac{-Eq-2Cqy_0}{Cq-A}\right)$，所以在原坐标系中，直线 P_1P_2 过定点 $\left(\dfrac{D+2Ax_0}{Cq-A}+x_0,\dfrac{-Eq-2Cqy_0}{Cq-A}+y_0\right)$，即直线 P_1P_2 过定点 $\left(\dfrac{D+(A+Cq)x_0}{Cq-A},\dfrac{-Eq-(A+Cq)y_0}{Cq-A}\right)$.

（2）当 $k_1+k_2=p$ 时，由引理可知直线 P_1P_2 过定点 $\left(-\dfrac{2Cy_0+E}{pC},-\dfrac{2Ax_0+D+p(2Cy_0+E)}{pC}\right)$，所以在原坐标系中，直线 P_1P_2 过定点 $\left(-\dfrac{2Cy_0+E}{pC}+x_0,-\dfrac{2Ax_0+D+p(2Cy_0+E)}{pC}+y_0\right)$，即直线 P_1P_2 过定点 $\left(-\dfrac{2Cy_0-Cpx_0+E}{pC},-\dfrac{2Ax_0+pCy_0+D+pE}{pC}\right)$.

二、应用举例

例 1　（2017 年高考全国 I 卷理科数学第 20 题第（2）小题）设直线 l 不经过椭圆 $T:\dfrac{x^2}{4}+y^2=1$ 的上顶点 P，且与椭圆 T 相交于 A,B 两点，若直线 PA,PB 的斜率分别为 k_1,k_2，且 $k_1+k_2=-1$，求证：直线 l 经过一个定点.

分析：由于椭圆的方程为 $x^2+4y^2-4=0$，点 $P(0,1)$，即 $A=1,C=4,D=E=0,x_0=0,y_0=1,p=-1$，由定理可知，直线 AB 经过一个定点 $(2,-1)$，若掌握引理及定理的证明方法，则不难得到以下解法.

解答：椭圆的方程为 $x^2+4y^2-4=0$，其上顶点为 $P(0,1)$，作坐标系的平移：$\begin{cases}x=x',\\ y=y'+1,\end{cases}$ 则在新坐标系 $x'o'y'$ 中，点 P 的坐标为 $P(0,0)$，椭圆的方程为 $(x')^2+4(y')^2+8y'=0$，设直线 AB 的方程为 $mx'+ny'=1$，由 $\begin{cases}(x')^2+4(y')^2+8y'=0,\\ mx'+ny'=1\end{cases}$ 可得 $(x')^2+4(y')^2+8y'(mx'+ny')=0$，即 $(4+8n)\cdot(y')^2+8my'x'+(x')^2=0$，所以 $(4+8n)\left(\dfrac{y'}{x'}\right)^2+8m\left(\dfrac{y'}{x'}\right)+1$

万方数据

$=0$,设 $A(x'_1,y'_1),B(x'_2,y'_2)$,则 $k_1=\left(\frac{y'_1}{x'_1}\right),k_2=\left(\frac{y'_2}{x'_2}\right)$,所以 $k_1+k_2=\left(\frac{y'_1}{x'_1}\right)+\left(\frac{y'_2}{x'_2}\right)=\frac{-8m}{4+8n}=-1$,所以 $m\cdot 2+n\cdot(-2)=1$,因为直线 AB 的方程为 $mx'+ny'=1$,所以直线 AB 过定点 $T(2,-2)$. 所以在原坐标系中,直线 AB 过定点 $T(2,-1)$.

评注:由本题的解法,可总结得到解决这类问题的解题程序如下:

(1)平移——作坐标系的平移,使曲线 T 上的定点恰为新坐标系的原点. 曲线 T 的方程必是常数项为零的二元二次方程.

(2)构造——在新坐标系中,设目标直线的方程为 $mx'+ny'=1$,与曲线 T 的方程联立,得到关于 x',y' 的齐次方程,从而得到关于 $\frac{y'}{x'}$ 的一元二次方程.

(3)使用——运用韦达定理及两动弦斜率的关系得到关于 m,n 的一个方程.

(4)定点——由直线方程 $mx'+ny'=1$ 结合 m,n 的关系式得到目标直线经过的定点在新坐标系中的坐标.

(5)回归——利用坐标平移公式,得到目标直线经过的定点在原坐标系中的坐标.

例 2　(2020 年高考山东数学卷第 22 题第(2)小题)已知点 $A(2,1)$是椭圆 $T:\frac{x^2}{6}+\frac{y^2}{3}=1$ 上的定点,M,N 是椭圆 T 上的两动点,且 $AM\perp AN,AD\perp MN,D$ 为垂足,求证:存在定点 Q,使得 $|DQ|$ 为定值.

分析:由定理可知直线 MN 经过一个定点 P,由于椭圆 T 的方程为 $x^2+2y^2-6=0$,点 $A(2,1)$,即 $A=1,C=2,D=E=0,x_0=2,y_0=1$,又注意到 $AM\perp AN$,所以 $k_1\cdot k_2=q=-1$,由定理可得 $P\left(\frac{2}{3},-\frac{1}{3}\right)$,$AD\perp MN$ 于 D 可知,点 D 在以 AP 为直径的圆上,故所求定点 Q 恰为 AP 的中点.

解答:椭圆的方程为 $x^2+2y^2-6=0$,作坐标系的平移:$\begin{cases}x-2=x',\\y-1=y',\end{cases}$ 即 $\begin{cases}x=x'+2,\\y=y'+1,\end{cases}$ 则在新坐标系 $x'o'y'$ 中,点 A 的坐标为 $A(0,0)$,椭圆的方程为 $(x'+2)^2+2(y'+1)^2-6=0$,即 $(x')^2+2(y')^2+4(x'+y')=0$,设直线 MN 的方程为 $mx'+ny'=1$,由 $\begin{cases}(x')^2+2(y')^2+4(x'+y')=0,\\mx'+ny'=1\end{cases}$ 可得 $(x')^2+2(y')^2+4(x'+y')(mx'+ny')=0$,即 $(2+4n)(y')^2+4(m+n)y'x'+(1+4m)(x')^2=0$,所以 $(2+4n)\left(\frac{y'}{x'}\right)^2+4(m+n)\left(\frac{y'}{x'}\right)+1+4m=0$,设 $M(x'_1,y'_1),N(x'_2,y'_2)$,则 $k_1=\left(\frac{y'_1}{x'_1}\right),k_2=\left(\frac{y'_2}{x'_2}\right)$,所以 $k_1\cdot k_2=\left(\frac{y'_1}{x'_1}\right)\left(\frac{y'_2}{x'_2}\right)=\frac{1+4m}{2+4n}=-1$,即 $m\cdot\left(-\frac{4}{3}\right)+n\cdot\left(-\frac{4}{3}\right)=1$,因为直线 MN 的方程为 $mx'+ny'=1$,所以直线 MN 过定点 $P\left(-\frac{4}{3},-\frac{4}{3}\right)$,所以在原坐标系中,直线 MN 过定点 $P\left(-\frac{4}{3}+2,-\frac{4}{3}+1\right)$,即 $P\left(\frac{2}{3},-\frac{1}{3}\right)$. $AD\perp MN$ 于 D 可知,点 D 在以 AP 为直径的圆上,故所求定点 Q 恰为 AP 的中点,所以 $Q\left(\frac{4}{3},\frac{1}{3}\right)$.

评注:解决本题的关键是能否看清问题的本质所在,从结论出发,不难发现只需证明点 D 恰在一个以定点 Q 为圆心的定圆上,若对定理比较熟悉,则从条件出发很容易发现动直线 MN 必经过一个定点,从而实现条件与结论的“无缝对接”,解题的思路就显得自然,解题的过程也显得简洁.

例 3　(2020 年高考全国Ⅰ卷理科数学第 20 题第(2)小题)如图 1,已知 A,B 是椭圆 $T:\frac{x^2}{9}+y^2=1$ 的左、右顶点,P 为直线 $x=6$ 上的动点,直线 PA 与椭圆的另一交点为 C,直线 PB 与椭圆的另一交点为 D. 求证:直线 CD 过定点.

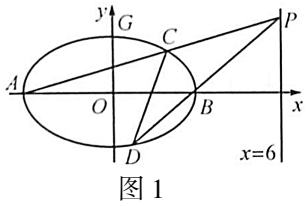

图 1

分析:不难发现当点 P 在直线 $x=6$ 上运动时,直线 $PA,PB(DB)$斜率的比值为定值,又注意到直线 DB,DA 斜率的积为定值,所以可得直线 AC,AD 的斜率的积为定值,从而问题就化归为运用定理可解决的问题了.

解答:易得 $A(-3,0),B(3,0)$,设 $P(6,u)$,则 $k_{AC}=k_{AP}=\frac{u}{9},k_{BD}=k_{BP}=\frac{u}{3}$,所以 $k_{BD}=3k_{AC}$,因为 D 在椭圆 T 上,所以可设 $D(3\cos\theta,\sin\theta)$,设直线 AC,AD 的斜率分别为 k_1,k_2,则 $k_{AD}=\frac{\sin\theta}{3\cos\theta+3},k_{BD}=\frac{\sin\theta}{3\cos\theta-3},k_{AD}\cdot k_{BD}=\frac{\sin^2\theta}{9\cos^2\theta-9}=-\frac{1}{9}$,所以 $k_1\cdot k_2=k_{AC}\cdot k_{AD}=\frac{1}{3}k_{BD}\cdot k_{AD}=-\frac{1}{27}$. 作坐标系的平移:

万方数据

$\begin{cases} x+3=x', \\ y=y', \end{cases}$ 即 $\begin{cases} x=x'-3, \\ y=y', \end{cases}$ 则在新坐标系 $x'o'y'$ 中，点 A 的坐标为 $A(0,0)$，椭圆的方程为 $(x'-3)^2+9y'^2-9=0$，即 $(x')^2+9(y')^2-6x'=0$，设直线 CD 的方程为 $mx'+ny'=1$，由 $\begin{cases} (x')^2+9(y')^2-6x'=0, \\ mx'+ny'=1 \end{cases}$ 可得 $(x')^2+9(y')^2-6x'(mx'+ny')=0$，即 $9(y')^2-6ny'x'-(6m-1)(x')^2=0$，所以 $9\left(\frac{y'}{x'}\right)^2-6n\left(\frac{y'}{x'}\right)-(6m-1)=0$，设 $C(x'_1,y'_1)$，$D(x'_2,y'_2)$，则 $k_1=\frac{y'_1}{x'_1}$，$k_2=\frac{y'_2}{x'_2}$，所以 $k_1\cdot k_2=\frac{y'_1}{x'_1}\cdot\frac{y'_2}{x'_2}=\frac{-6m+1}{9}=-\frac{1}{27}$，所以 $m=\frac{2}{9}$，故有 $m\cdot\frac{9}{2}+n\cdot 0=1$，因为直线 CD 的方程为 $mx'+ny'=1$，所以直线 CD 过定点 $\left(\frac{9}{2},0\right)$，所以在原坐标系中，直线 CD 过定点 $P\left(\frac{3}{2},0\right)$.

评注：复杂的问题往往是由若干个简单的问题组合而成的，所以把复杂问题进行必要的分解是解决复杂问题的有效途径之一，上述解法从“直线 AC 和直线 BD 的斜率的比为定值”、“直线 AD 和直线 BD 的斜率的积为定值”到“直线 AC 和直线 AD 的斜率的积为定值”，最终化归为基本类型的问题，从而使问题得到解决.

圆锥曲线问题成为难点的一个重要原因是学生过不了“运算关”，造成这一现象不外乎以下两方面的原因，其一是运算能力，特别是字母演算能力有待提高；其二是由于方法选择不恰当，把简单问题复杂化，陷入繁杂的运算而不能自拔. 所以在提高运算能力的基础上，掌握一些简化运算的招式，缩短解题的“长度”显得很有必要，上述介绍的构造齐次方程、利用坐标平移是简化运算重要手段之一.

再探圆锥曲线过准线上一点的切线性质

江苏省常州市第二中学　(213000)　许　兵

著名数学家波利亚认为：“好的问题如同某种蘑菇一样，它们都是成堆地生长的，找到一个以后，你应该在周围找一找，很可能附近就有好几个”. 这种比喻形象而生动地说明了数学问题之间存在着紧密联系. 文[1]介绍了圆锥曲线过准线上一点切线的两个性质，在此基础上，文[2]得出了更一般性的结论，本文通过一道高三模考题中，介绍另一个与圆锥曲线准线上一点的切线有关的性质，并对其进行探究，与读者分享.

试题　(江苏省苏锡常镇四市 2021 届第一次模拟考试题)已知 O 为坐标系原点，椭圆 $C:\frac{x^2}{4}+y^2=1$ 的右焦点为 F，右准线为直线 n. 已知直线 l 上有且只有一个点到 F 的距离与到直线 n 的距离之比为 $\frac{\sqrt{3}}{2}$. 直线 l 与直线 n 交于点 N，过 F 作 x 轴的垂线，交直线 l 于点 M，求证：$\frac{|FM|}{|FN|}$ 为定值.

在分析试题后得到 $\frac{|FM|}{|FN|}$ 为定值 $\frac{\sqrt{3}}{2}$，而椭圆的离心率也刚好是 $\frac{\sqrt{3}}{2}$，这难道是巧合？笔者通过 GeoGebra 数学软件的探究，得到另一个与圆锥曲线准线上一点的切线有关的性质，并给出证明.

性质　已知直线 l 是圆锥曲线 Γ 的焦点 F 对应的准线，过 l 上一点 P 作曲线 Γ 的两条切线 PA，PB，过焦点 F 作直线 l' 与准线 l 平行，并且分别与 PA，PB 分别交于点 G、H，则 $\frac{GF}{PF}=\frac{FH}{PF}=e$，$e$ 为圆锥曲线 Γ 的离心率，当曲线 Γ 为抛物线时，$GF=FH=PF$.

下证圆锥曲线 Γ 为椭圆 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 的情况，当曲线 Γ 为双曲线或抛物线时，证法类似，略.

证法一：如图 1，设切线 PA 的方程为 $y=kx+m$，则 $y_P=-\frac{a^2k}{c}+m$，$y_G=-kc+m$，联立 $\begin{cases} y=kx+m, \\ b^2x^2+a^2y^2-a^2b^2=0, \end{cases}$ 消去 y 得 $(a^2k^2+b^2)x^2+2kma^2x+a^2m^2-a^2b^2=0$，由题意知 $\triangle=0$，整理得 $m^2=a^2k^2+b^2$，所以 $\frac{GF^2}{PF^2}=\frac{(-kc+m)^2}{(-\frac{a^2k}{c}+m)^2+(\frac{a^2}{c}-c)^2}=\frac{k^2c^2-2ckm+m^2}{\frac{a^4}{c^2}k^2-\frac{2a^2}{c}km+\frac{b^4}{c^2}+m^2}$

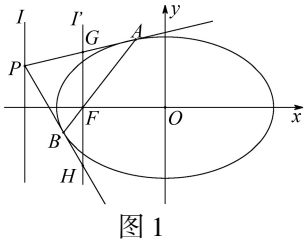

图 1

万方数据