

数学教学中的“情境”：内涵解析及价值蕴藏^{*}

●西北师范大学教育学院 张定强 宿桂花

摘要：“情境”是发展学生核心素养的重要手段和工具，不同视域下探析“情境”的内涵与外延能更充分认知情境，从课程教学、学业质量、考试命题的视域审视情境的内涵特征及价值意蕴，有利于增润学生数学核心素养，有利于提高数学教学质量，有利于立德树人目标的实现。

关键词：情境；核心素养；学业质量要求；高考命题

1 问题提出

数学教学的初心和使命就是发展学生的数学核心素养，使之具备社会主义建设者和接班人必备的数学文化基础、自主发展能力和社会参与实力。为此在数学教学中要调动一切力量夯实学生的数学基本功，盘活教学中的一切资源，服务于学生的发展，一个重要而现实的途径就是挖掘数学教学中的情境。“情境”在辞海中的含义是指一个人在进行某种行动时所处的社会环境，是人们社会行为产生的具体条件。包含机体本身和外界环境有关因素，分为真实的情境、想象的情境和暗含的情境^[1]。数学教学中的情境就是数学教学共同体进行教学活动时所处的相关情境，数学教学中重大的活动主要有课程教学、学业质量测评和考试命题等，在这些活动中情境作为一个重要手段和工具被广泛应用，发挥着重要的价值和功能。本研究针对数学教学关键活动中“情境”的内涵与意蕴进行探析，以明晰情境在这些关键活动中的含义及价值，推动数学教学高质量发展。

2 数学教学中的情境：内涵解析

人们对数学教学中情境的内涵有不同的探析，本研究从数学教学中极为重要的活动：课程教学、学业质量、考试命题三个维度进行探析。

2.1 课程教学维度

数学课程教学中的“情境”既为数学文化知识的表征提供了适宜的场域，又为完成既定的教学任务创造了条件，所建构起来的具有数学韵味的数学表征和

教学场景，适宜于数学教学活动的开展^[2]。此维度的“情境”分为现实情境、数学情境、科学情境，这些情境具体就展现在教学活动中。

2.1.1 现实情境

现实情境是指学生在现实生活中遇到的问题情境，是社会文化与经济生活的实际情境，需将观察到的现象与数学知识、方法建立联系，应用数学工具解决问题^[3]。数学教材与教学惟有基于现实情境才能让学生体验数学的源与流，感悟数学知识建构的来龙去脉，一方面使数学理论具体化，成为学生易于接受的载体，另一方面使数学理论回归现实，增强数学理论的应用性。

例1 长江两岸之间没有大桥的地方，常常通过轮渡进行运输。假如一艘轮船从长江南岸某地出发，垂直于对岸航行，航行速度的大小为15 km/h，同时江水的速度为向东6 km/h。

(I)用向量表示江水速度、船速以及船实际航行的速度；

(II)求船实际航行的速度的大小与方向(用与江水速度间的夹角表示)。

此例是基于“平面向量的运算”的学习而设计，依托的知识点为“向量加法的平行四边形法则”“勾股定理”与“正切函数”；情境为船在河流中行驶。这种选取现实生活的场景，使向量的相关理论知识活化在现实的情境中，贴近学生现实，易于类比联想，进而用数学的方法与现实情境相结合去解决问题。

2.1.2 数学情境

数学情境是指用数学语言所建构的问题情境，需要在数学系统对数学问题进行分析 and 解决，包括表

^{*} 基金项目：本文系甘肃省教育科技创新项目“甘肃省城乡小学教辅材料使用现状及其优化策略研究”(2021CXZX-236)的研究成果。

征数学概念的情境、学习数学原理的情境、理解数学推理的情境等.一个显著特点是纯粹的数学问题与抽象的数学符号的呈现,学生在此情境中识别已知的数学条件,通过逻辑思维关联相关知识,利用一定的数学方法对问题进行分析解答.基于数学情境的学习过程要求学生有牢固的基础知识、较强的逻辑推理能力与数学运算能力,学生亦可从中体会数学的严谨性与文化价值.

例 2 北京召开的第 24 届国际数学家大会的会标是根据中国古代数学家赵爽的弦图设计的,颜色的明暗使它看上去像一个风车,代表中国人热情好客.你能在图 1 中找到相等关系和不等关系吗?

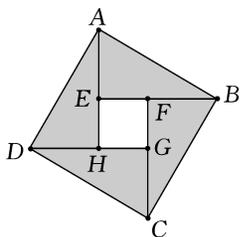


图 1

此例选取的素材是以国际数学家大会会标与弦图来引入问题,既有现实情境的意蕴,又充分体现了数学情境的意蕴.引导学生寻找相等关系和不等关系,需将图形问题转化为代数问题,以图形的面积切入,先将直角三角形看作一般的直角三角形,设 $DH=a$, $AH=b(a \neq b)$, $AD=c$, 此时 4 个直角三角形的面积和为 $2ab$, 正方形 $ABCD$ 的面积为 a^2+b^2 , 由此得到不等式 $a^2+b^2 > 2ab$; 考虑完一般情况, 接下来是特殊情况, 若直角三角形 AHD 为等腰直角三角形, 即 $a=b$, 此时正方形 $EFGH$ 缩为一个点, 此时 $a^2+b^2 = 2ab$. 于是便有 $a^2+b^2 \geq 2ab$. 得出: $\forall a, b \in \mathbf{R}$, 有 $a^2+b^2 \geq 2ab$, 当且仅当 $a=b$ 时等号成立.

2.1.3 科学情境

科学情境是远离日常生活的科学实验、科学活动中可能面临的场景所构成的情境, 包括命题推演、数学探究、数据分析、数学实验等问题情境, 与 21 世纪最新科学技术紧密相连. 科学情境的选取要紧贴数学概念, 以科学情境为载体培养学生的科学意识和精神, 养成严谨求实的科学态度.

例 3 物理学中的玻意耳定律 $p = \frac{k}{V}$ (k 为正常数) 告诉我们, 对于一定量的气体, 当其体积 V 减小时, 压强 p 将增大. 试对此用函数的单调性证明.

此情境以物理波意耳定律为载体, 是物理情境中抽象出的一类函数, 要求根据函数单调性的定义进行证明, 在证明的过程中认识压强与体积的关系: 在定量定温下, 理想气体的压强与体积成反比. 这种设计意图在于让学生学会用数学的眼光观察和解释科学现象、增长科学知识, 同时也可启发思考 k 究竟为何, 培

养科学探究的意识.

2.2 学业质量维度

在普通高中数学课程标准(2017年版, 2020年修订)“学业质量”部分, 将“情境”按难度划分为熟悉、关联、综合的情境^[4], 即现实情境之下可分为熟悉的现实情境、关联的现实情境、综合的现实情境, 数学情境与科学情境同理. 这样的界定使学业质量水平的检测有了可测的依据. 学业质量水平一是高中毕业应当达到的要求, 对应的就是熟悉的情境; 二是高考要求, 高考试题结构、特征必然要在熟悉的基础上更多体现关联的情境; 三是自主招生的要求, 要求更高, 对应的情境就是综合的情境.

2.2.1 熟悉的情境

熟悉的情境是指与学生学习生活紧密相连的情境, 相关知识与问题能直接从情境中抽象出来(或者是避开背景直接识别知识与问题), 且其中蕴含的数学关系单一, 是无需复杂的计算、推理的简单问题情境, 学生能运用或模仿所学的知识与方法对问题进行解答, 考查学生对基础知识的掌握.

例 4 学校宿舍与办公室相距 a m, 某同学有重要材料要送给老师, 从宿舍出发, 先匀速跑步 3 min 来到办公室, 停留 2 min, 然后匀速步行 10 min 返回宿舍. 在这个过程中, 这位同学行进的速度和行走的路程都是时间的函数, 画出速度函数和路程函数的示意图.

此例源于《普通高中数学课程标准》中附录 2 教学与评价案例, 解题知识依托于函数关系、函数图象, 学生能直接从日常生活的基本活动中抽象出具有数学特征的元素: 时间与速度, 依据常识确定每个时间段的速度大小, 套用画函数图象的方法画出准确的图象, 在考查基础知识掌握的同时, 检验学生在情境中的信息提取能力与数学抽象素养, 是学生通过高中数学学习应达到的水平.

2.2.2 关联的情境

关联的情境是指所选的情境源于已有的课程学习, 但解决材料问题所需的知识与方法之间联系不直接, 学生无法直接抽象出数量关系, 情境活动的进行需要将情境信息进行内化, 再利用所学知识解决问题. 这时的关联是指情境与已有的知识、方法的关联, 已有的知识可以推广至更一般的情形, 通过归纳类比的方法在新的情境中使用已有的方法, 解决问题不是对知识的简单回忆, 关键是在新情境中对原知识进行激活. 此种情境不仅要求学生掌握知识, 还要从情境中关联更多的知识点, 达到准确解决问题的目的.

例 5 在图 2 中, A, B, C 为山脚两侧共线的三点, 在山顶 P 处测得三点的俯角分别为 α, β, γ . 计划沿

直线 AC 开通穿山隧道,为求出 DE 的长度,你认为还需要直接测量出 AD, EB, BC 中哪些线段的长度? 根据条件,并把你认为需要测量的长度作为已知量,写出计算隧道 DE 长度的运算步骤.

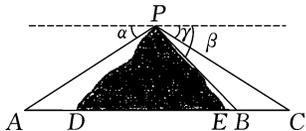


图 2

此情境以隧道测量为数学任务,考查学生运算能力与逻辑思维能力.依据情境信息画出图形,找出与情境关联的知识点“解三角形”.接下来依据运算法则与运算顺序设计运算程序,通过类比的方法利用余弦定理与正弦定理解决此题,所以此情境属于现实的关联情境.同时考查学生的数学运算素养与知识迁移能力,学生不仅要掌握知识方法更要学会运用,才可达到高考要求水平.

2.2.3 综合的情境

综合的情境是指情境中蕴含的知识、方法与能力的关联,较为隐性地源于学生已有学习体验或学习储备,情境依托的关联知识点多,此类情境中数学关系隐藏较深,考查学生用数学的思维与眼光去解决数学问题的能力.掌握这种程度的情境表明学生已形成统整思维,表现为特有的理解和分析问题的思维方式,说明学生能够领悟核心思想方法、体会数学价值观,达到自主招生所要求水平.

例 6 广场上有一盏路灯挂在高 10 m 的电线杆顶上,记电线杆的底部为 A ,把路灯看作一个点光源,身高 1.5 m 的女孩站在离点 A 5 m 的 B 处,回答下面问题:

(1)若女孩以 5 m 为半径绕电线杆走一个圆圈,人影扫过的是什么图形,求这个图形的面积;

(2)若女孩向点 A 前行 4 m 到达点 D ,然后从点 D 出发,沿着以 BD 为对角线的正方形走一圈,画出女孩走一圈时头顶影子的轨迹,说明轨迹形状.

例题呈现的情境所依托的突破性知识是中心投影,且关联圆环、相似三角形与正方形相关知识,需在已有活动经验的基础上发现问题,得出运动轨迹,利用相似知识求半径,结合面积知识对(1)进行解答;根据对空间几何体的整体观察入手,得出(2)的轨迹形状.解题过程需要综合多个知识点,自己发现问题、提出问题并解决问题,属于综合的情境.根据此情境问题可对博物馆涉及障碍物的监控问题提出有效解决方案,学以致用,解决现实中的问题.

2.3 考试命题维度

在中国高考评价体系说明中将“情境”界定为“问题情境”,指的是真实的问题背景,是以问题或任务为中心构成的活动场域.高考内容的问题情境是通过文字符号描述的方式即纸笔形式进行建构的,一般分为生活实践情境和学习探索情境,即选取适切的素材呈现试题,让学生在问题情境中运用已学过的知识与能力去解决实际问题,全面提高核心素养水平^[5].

2.3.1 生活实践情境

生活实践情境是指选取的情境来自于日常生活和生产实践活动(包括衣食住行、医疗卫生、文体娱乐、生产制造、经济发展、科学技术等方面),情境中隐含的数学知识、数学关系、解决问题需具备的数学方法与能力都来源于课程学习的知识储备.需要学生将问题情境与数学知识建立关联,应用数学工具解决问题;生活实践类情境关注数学与其他学科和社会实践的联系,是在基础性与应用性的层面上考查学生的能力与素养.

例 7 (2021年新高考 I 卷第 18 题)某学校组织“一带一路”知识竞赛,有 A, B 两类问题.每位参加比赛的同学先在两类问题中选择一类并从中随机抽取一个问题回答,若回答错误则该同学比赛结束;若回答正确则从另一类问题中再随机抽取一个问题回答,无论回答正确与否,该同学比赛结束. A 类问题中的每个问题回答正确得 20 分,否则得 0 分; B 类问题中每个问题回答正确得 80 分,否则得 0 分.

已知小明能正确回答 A 类问题的概率为 0.8 ,能正确回答 B 类问题的概率为 0.6 ,且能正确回答问题的概率与回答次序无关.

(1)若小明先回答 A 类问题,记 X 为小明的累计得分,求 X 的分布列;

(2)为使累计得分的期望最大,小明应选择先回答哪类问题? 并说明理由.

此例选取情境型材料来源于知识竞赛赛制,解题的关键是对离散型随机变量及其分布的掌握,求出期望对答题顺序进行决策.相应地,所选材料在基础性与应用性的基础上考查了逻辑思维、数学运算与解决问题等关键能力,以及离散型随机变量的概率分布列与数学期望等必备知识.从知识掌握、实践探索、思维方法各方面体现数学学科所蕴藏的素养.

2.3.2 学习探索情境

学习探索情境是涵盖数学探索与科学探究过程中所涉及问题的数学情境,源于真实的研究过程或实际的探索过程,依靠学生已有的学习经历、学习体验,学生要启动已有知识开展智力活动,同时也要创新思

思维方式,能创造性地解决问题.是在创新性与应用性的层面上考查学生提出问题、解决问题的能力.

例8 (2021年高考全国乙卷理科第19题)设 S_n 为数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和, b_n 为数列 $\{S_n\}$ 的前 n 项积,已知 $\frac{2}{S_n} + \frac{1}{b_n} = 2$.

- (1)证明:数列 $\{b_n\}$ 是等差数列;
- (2)求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式.

此例来源于“数列”一章,学生需要将课本知识与方法内化,在掌握等差数列定义的基础上创新方法证明数列 $\{b_n\}$;根据已有的学习经验,由 $\{b_n\}$ 与条件求出 S_n ,因此本题的情境属于学习探索情境.整个情境活动中,学生思维清晰是认知加工的关键构件也是解决数学探索问题最重要的一点,以数学知识为基础对问题进行分析,在基础性和应用性的层次上考查了理性思维、数学探索、逆向思维等学科素养和关键能力.

站在不同的视角审视“情境”,会有不同的认知,无论哪种维度的“情境”都以载体的身份在不同的场域下发挥着作用.都是对数学知识、原理、问题进行表征与分析不可或缺的元素.

3 数学教学中的情境:价值蕴藏

数学教学的发展不能缺失“情境”,情境所表征的问题及解决问题所需的思维以及在解决问题过程中所体现的素养使得情境在数学教学中具有重要的理论价值和实践价值.

3.1 有利于增润学生数学核心素养

新课标提出了六大数学核心素养,就要在情境中去实现.一是要让学生在现实情境中增强社会参与的意识,运用所学的数学知识分析和解决现实问题,强化数学建模和数据分析素养;二是要让学生深度介入数学情境,通过归纳、类比、猜测等方式发展数学理性思维、培育数学探究精神,增强数学抽象和数学推理素养;三是要让学生接触科学情境,更深切地感悟数学与自然科学和社会科学的密切关系,明晰当代科学日益数学化的趋势,增强直观想象和数学建模素养.正是由于数学的知识、原理、问题就依存于情境中,通过两者关联性分析,增润学生学习数学的情感、态度和价值观,使学生在情境中近距离触摸数学的本质,真正实现数学核心素养的发展.

3.2 有利于提高数学教学质量

提高数学教学质量是数学教育界的共同期盼,而建构良好的情境是提高数学教学质量的根本保障.正是因为情境在数学教学中起着活化知识,增进情感的

作用,所以无论数学概念的学习还是数学原理的掌握,都不能离开情境的创设.因此根据所教授的数学知识与原理,依据学情等为学生创设熟悉、关联、综合等不同形态的情境,让学生在适宜的情境中学习数学知识,透过包裹在情境之中的数学知识、原理、思想的挖掘更好地辨识知识与原理,更进一步发展学生发现问题、提出问题、分析问题和解决问题的能力,进而让学生在不同的情境中学所需学,掌握应当掌握的数学知识,达到应当达到的数学学业水平.

3.3 有利于立德树人目标的实现

“立德树人”是教育的根本任务,也是数学教学的根本任务,而情境在立德树人的实现中有着功不可没的作用.无论是设置生活实践情境还是再现学习探索情境,都是全员、全程、全方位育人所需要的,都能将学生带入到学习和应用数学的天地,透过情境载体,将数学的文化价值与科学价值蕴含其中,通过情境丰富学生学习数学的情感,真正让学生在生活实践与学习探索情境中不断熟悉、关联、综合知识的来龙去脉,进而让学生感受数学的现实性与理论性之间的关联,数学的基础性与综合性之间的特质,培养学生的高阶思维,夯实学生数学的素养,使情境更好地服务于数学的教与学,服务于立德树人的根本任务.

4 结语

情境已经深度渗透到数学教学的方方面面,是课程建构、教学发展、评价有效、命题高效的重要载体和途径,是促进“教、学、考、评”关系完善的增润剂,情境紧密对接育人方式改革,助力于教学革新.为此,需要更加精细化地研究情境与情感及其教学考评之间的关系,探析课程建设中、教学实施中、评价检测中情境的育人功能与价值,从整体上提升数学教学质量.

参考文献:

- [1]夏征农.辞海[M].上海:上海辞书出版社,1999:1198.
- [2]张定强,张元媛,王彤.数学情境教学:理解现状与增润课堂[J].中小学教师培训,2017(5):58-61.
- [3]雷沛瑶,胡典顺.提升学生的数学核心素养:情境与问题的视角[J].教学探索,2018(6):23-27.
- [4]中华人民共和国教育部.普通高中数学课程标准(2017年版2020年修订)[M].北京:人民教育出版社,2020:8,75.
- [5]教育部考试中心.中国高考评价体系说明[M].北京:人民教育出版社,2020:36. 