

挖掘数学文化内涵,彰显数学育人价值*

——以“中国剩余定理”为例

●山西省太原师范学院 王保红 张瑶

摘要:将数学文化有效地融入高中数学课程内容,是普通高中2017年版新课标的基本理念之一.以“中国剩余定理”这一中国数学史上卓越的成就为切入点,论述了该定理的源起,着重讨论了该定理的古代解答与拓展,以及在高中教材中体现的现代程序化解法,以此透视出经典数学问题所具有的“古算今用”的现代意义,最后总结出“中国剩余定理”所蕴含的四种重要教育价值.

关键词:中国剩余定理;物不知数;文化价值

1 问题的提出

《普通高中数学课程标准(2017年版)》将体现数学的人文价值作为基本理念之一,课程性质中指出“数学承载着思想和文化,是人类文明的重要组成部分.”^[1]在教学建议中也明确指出:“在教学活动中,教师应有意识地结合相应的教学内容,将数学文化渗透在日常教学中,感悟数学的价值,提升学生的科学精神、应用意识和人文素养;将数学文化融入教学,还有利于激发学生的数学学习兴趣,有利于学生进一步理解数学,有利于开拓学生视野、提升数学学科核心素养”^[1].

“中国剩余定理”^[2]是我国古代数学史上的宝贵财富,同时是被西方人认同的我国古代数学伟大成就中较为典型的案例.在江苏、湖南教育出版社出版的高中数学必修教科书中,“中国剩余定理”都涉及其中.

笔者试图还原“中国剩余定理”的历史文化内涵,着力阐述该定理的历史证明与拓展,以及在现代算法中的体现,借此挖掘“中国剩余定理”所蕴含的多元教育价值,以为高中数学的教与学提供参考.

2 “中国剩余定理”的源起

《孙子算经》是古代的“算经十书”之一,是现存古算书中最早较详细的介绍筹算法并有算草的书.该书

共有上中下三卷,下卷最著名的问题是第26题,即“物不知数”问题^[3]:

“今有物,不知其数.三三数之剩二;五五数之剩三;七七数之剩二.问物几何?答曰:二十三”.

《孙子算经》提出“物不知数”问题后在民间流传很广.该题相当于解一个同余方程组,是后世“大衍求一术”的起源.

南宋著名数学家秦九韶于1247年把《孙子算经》中“物不知数”一题的方法拓展到更为普遍的情况,得出“大衍求一术”,并将此方法写入《数书九章》.

从“物不知数”问题到“大衍求一术”,中国的数学家在一次同余式方面的研究比西方早很多年,因而在数学史上,人们不容置疑地将求解一次同余组的定理叫作“中国剩余定理”.

3 “物不知数”问题的解答与拓展

3.1 “物不知数”问题的直接列举解法

“物不知数”问的是物体的个数,如果按照条件一个一个地数出来,把满足条件的数找到,似乎就可以寻找到答案,于是:

依“三三数之剩二”列出除以3余2的数:2, 5, 8, 11, 14, 17, 20, 23, 26, 29, ……

依“五五数之剩三”再列出除以5余3的数:3, 8, 13, 18, 23, 28, ……

* 基金项目:本文系山西省研究生教育改革研究课题“‘数学学科发展前沿’课程设计与教学改革研究”(编号:2020YJJG281);太原师范学院2020年度“课程思政”育人专项课题“数学专业课中思政元素的深度融合路径研究”(编号:KCSZ2009)的研究成果.

依“七七数之剩二”再列出除以7余2的数:2, 9, 16, 23, 30, …….

这样得到与题目条件契合的最小数为23.但由于列举的数字后面还有无穷多个数,因此解有可能不唯一,有可能有无穷多个解.

3.2 “物不知数”问题的古文本解法及现代符号表达

《孙子算经》中“物不知数”问题用同余式符号表示出来为:设 $N \equiv 2 \pmod{3} \equiv 3 \pmod{5} \equiv 2 \pmod{7}$, 求最小的整数 N , 答 $N = 23$.

《孙子算经》中给出的解答为^[3]:

“术曰:三三数之剩二,置一百四十;五五数之剩三,置六十三;七七数之剩二,置三十,并之,得二百三十三.以二百一十减之,即得.”

凡三三数之剩一,则置七十;五五数之剩一,则置二十一;七七数之剩一,则置十五.一百六以上,以一百五减之即得”.

按照前半段术文(术文即算法),问题的解为:

$$N = 70 \times 2 + 21 \times 3 + 15 \times 2 - 2 \times 105 = 23.$$

按照后半段术文,相当于解一次同余组 $N \equiv R_1 \pmod{3} \equiv R_2 \pmod{5} \equiv R_3 \pmod{7}$. 问题的解为: $N = 70R_1 + 21R_2 + 15R_3 - 105P$, P 为正整数.按原文理解,则 $R_1 = R_2 = R_3 = 1$, 那么 N 和 P 均等于1.

3.3 “物不知数”问题解法的歌诀记忆法

《孙子算经》中给出“物不知数”解答的后半段术文,实为推广了的“物不知数”新问题,其关键是要记住70, 21, 15, 105这几个数.于是在古代出现了与此密切相关的诗词歌诀,如宋朝周密编写的诗歌《志雅唐杂钞》中提到:

“三岁孩儿七十稀,五留廿一事尤奇;七度上元重相会,寒食清明便可知”.诗中上元指正月十五,即指15,古代称冬至百六是清明,寒食为清明节的前一天,所以寒食节指的是105.

在明代,数学家程大位运用诗词描写此算法,可谓绝伦美妙,诗词写道:

“三人同行七十稀,五树梅花廿一枝,七子团圆正半月,除百零五便得知”.

此诗的大意为:用3除得到的余数乘以70,加上用5除得到的余数乘上21,再加上用7除得到的余数乘以15,得数若大于105则减去105的倍数,所求数即可得知.运用此种方法,便可很快得出答案.

4 “中国剩余定理”的现代程序框图解法

古典的“中国剩余定理”到了计算机信息化时代仍然彰显着它的生命力.“物不知数”问题的通用解法

相当于解一个不定方程组的正整数解,解决它的算法思路如下:

假定所求的数为 m , 分别计算被3, 5, 7除所得的余数 a, b, c 即 $a = m \bmod 3, b = m \bmod 5, c = m \bmod 7$, 可以从开始检验三个条件 $a = 2, b = 3, c = 2$ 是否同时成立,若三个条件中有任何一个不成立,则 m 递增1, 当三个条件同时成立时,则输出 m 的值(程序框图如图1所示).

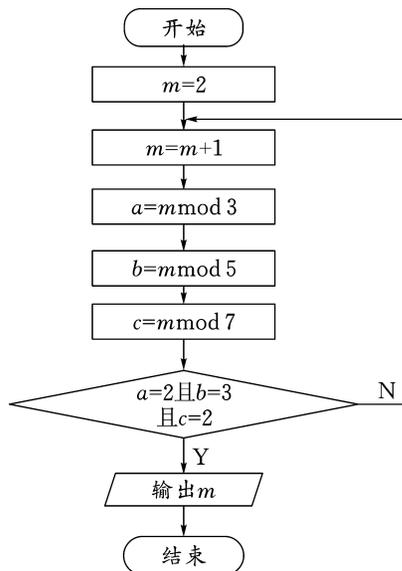


图1

5 “中国剩余定理”蕴含的教育价值

5.1 具有传承数学文化的教育价值

“中国剩余定理”具有丰富的人文精神,蕴含深厚的数学文化,能够激发学生对数学学习的浓厚兴趣.同时,对“中国剩余定理”的深入学习,有利于学生了解数学史的发展历程,理解数学思想方法的形成过程,有益于拓宽数学视野.一道数学问题经过层层探索与研究,最终成为了数学史上的华丽篇章,对推动文化传承与民族振兴也有着十分重要的意义.

5.2 具有培养学生数学运算素养的价值

“中国剩余定理”的内容较为基础,其算法具有具体化与程序化的特点,学生容易理解并能够接受.在学习和运算过程中,学生不仅可以感受到运用如今发达的信息技术手段去思考并解决古代问题的奇妙,还能体味优秀传统文化的魅力,增强其民族自豪感和对中国传统文化的自信.通过运算促进学生数学思维发展,养成程序化思考问题的习惯,对学生数学运算素养的培养具有重大意义,同时可以激发学生的爱国主义情怀以及科学理性精神.

5.3 具有独特的数学审美价值

“中国剩余定理”在我国历史上和民间流传十分广泛,有着如同数学游戏一般的表述,如“隔墙算”“剪管术”“秦王暗点兵”等,表达了普通大众对数学的喜爱。“中国剩余定理”是数学发展历史长河中一笔宝贵的财富,古今中外的数学家对它解法的探究都深刻反映了内在的审美情趣,它在数学和现实中的广泛应用,蕴含着丰富的美学价值。

5.4 具有丰富的数学学科的德育价值

“中国剩余定理”被世界公认是中国人最早发现的,将该定理融入基础教育,能切实地实现中国优秀传统文化的教育,将中国文化自信融入到数学学科实践中,实现数学课程的知识性、人文性,提升数学学科的开放性和时代性,教育工作者应结合自身的教

学经验,多挖掘像“中国剩余定理”一样的著名数学历史和习题,注重德育元素的引入,培养学生的数学情怀,提高学生的数学意识,只有这样才能逐步完善德育元素的教学课堂,有效激发学生的数学兴趣,带给学生不一样的学习感受和学习体验,帮助他们全面发展和提高。

参考文献:

- [1]中华人民共和国教育部.普通高中数学课程标准[M].人民教育出版社,2017:1,82.
- [2]史保怀,乔南.中国剩余定理[J].中学数学教学参考,2007(7):61-63.
- [3]钱宝琮主编.中国数学史[M].北京:科学出版社,1981:77. 

(上接第76页)班级划分为几个小组,鼓励各小组对问题进行分析,探求解决问题的不同方法并发表自己的看法.一个好的课堂教学应该是生动有趣、富于思考的,教师在教学过程中要善于引导学生主动参与课堂活动,勤于思考,鼓励学生发表自己的看法,培养学生分析问题的能力以及合作与交流的能力。

4.2 需注重渗透数学思想方法

数学思想对于数学解题起着重要的作用,教师应适时将数形结合、转化与化归、分类讨论、函数与方程等思想应用到数学解题当中.例如解法2中利用换元法将该问题转化成了一个二元二次方程根的问题,这其中渗透的转化与化归的思想在解决该问题中起着重大作用,下次再遇到同一类型的题目也可以引导学生联想到转化与化归的思想加以解决。

4.3 需注重培养学生的反思能力

数学反思主要指通过数学活动,对已经习得的数学知识和数学方法进行归纳、总结、再加工和创造,不断完善自身知识结构的一种学习方式.学生通过数学反思将知识不断内化,能够有效提高自身的自主学习能力、自主探究能力、解题能力和综合素质.教师可以鼓励学生尽可能自己发现一道题的背景、解法以及变式等,从而培育学生的数学精神,发展学生的核心素养^[2].

5 结语

探求一道优质问题的一题多解,不仅可以有效巩固学生在同一知识体系中学到的基础知识,训练

基本技能,而且还能帮助学生跳出这一知识体系,到其他知识体系中寻求相关性.过去很多教师在教学过程中往往只采用一种方法解答问题,学生也缺乏对问题的深入思考,导致了优质例题的浪费,而在新课程理念的推动下,教师越来越注重解题方法的多样性研究.通过探究上述六种解法,可以帮助学生将方程、函数、不等式等知识融会贯通,不仅让学生真正参与到数学学习中,而且学生在探索解题思路的过程中也能感受到探究学习的乐趣,激发了学生数学学习的动机。

面对非常规的问题,教师可以引导学生化“陌生”为“熟悉”,化繁为简,将复杂问题转换成利用学生已有知识能够解决的简单问题,学生在一题多解的过程中将知识灵活运用,触类旁通,从不同角度探寻解决问题的思路,能够拓宽学生的视野,锻炼学生的逻辑思维能力.除了数学能力的提升之外,还发展了逻辑推理、数学运算等数学核心素养,有利于学生综合素质的提高.教师在教学过程中应当从解法出发,倡导一题多解的策略,拓宽学生的知识面,让学生核心素养真正的落地^[3].

参考文献:

- [1]孙旭花.“一题多解”之再升华 螺旋变式课程设计理论介绍[J].数学教育学报,2008(6):21-28.
- [2]张慧.“小题大做”促提高“一题多解”涵素养[J].中学数学教学,2020(6):61-63.
- [3]于云霞,徐玲玲.践行一题多解 拓展思维深度[J].初中数学教与学,2020(24):36,38. 