例谈新高考数学结构不良问题的教育功能

323000 浙江省丽水市教育教学研究院 林建仁
315194 浙江省宁波市鄞州高级中学 叶琪飞

摘 要:笔者分析2020年新高考数学结构不良问题的设计特点,即既保留结构良好问题命题的检测功能,又给不同数学基础的人提供选择权.通过大量案例发掘新高考数学结构不良问题的教育功能,引导学生根据数学情境、科学情境、现实情境提出有意义的数学问题,培育学生数学思维的发散性.开发新高考数学结构不良问题的教学途径,营造数学思维创新、创造的环境,为学生的未来成长与创新发展奠基.

关键词:新高考;结构不良问题;教育功能

2020年新高考数学命题的突出特点在于稳中求变,主要表征之一就是引入结构不良问题等新题型.虽然过去高考数学命题也出现过结构不良问题,但2020年新高考在《普通高中数学课程标准(2017年版2020年修订)》评价体系下进行[1],在数学考试中引入、设置结构不良问题是考试内容改革的要求.这一变化对高中数学教学有着举足轻重的指导意义,引起一线教师与基础教育研究者的高度关注.

1 2020年新高考数学结构不良问题设计特点

1.1 保留结构良好问题的检测功能

案例1(2020新高考山东数学卷-17) 在①$ac=\sqrt{3}$,②$c\sin A=3$,③$c=\sqrt{3}b$这三个条件中任选一个,补充在下面问题中,若问题中的三角形存在,求c的值;若问题中的三角形不存在,说明理由.

问题:是否存在$\triangle ABC$,它的内角A,B,C的对边分别为a,b,c,且$\sin A=\sqrt{3}\sin B$,$C=\frac{\pi}{6}$,________?

注:如果选择多个条件分别解答,按第一个解答计分.

分析:

方案一 选条件①.由$C=\frac{\pi}{6}$和余弦定理得$\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}=\frac{\sqrt{3}}{2}$,由$\sin A=\sqrt{3}\sin B$及正弦定理得$a=\sqrt{3}b$,于是$\frac{3b^2+b^2-c^2}{2\sqrt{3}b^2}=\frac{\sqrt{3}}{2}$,由此可得$b=c$.由①$ac=\sqrt{3}$,解得$a=\sqrt{3}$,$b=c=1$.因此,选条件①时问题中的三角形存在,此时$c=1$.

方案二 选条件②.由$C=\frac{\pi}{6}$和余弦定理得$\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}=\frac{\sqrt{3}}{2}$,由$\sin A=\sqrt{3}\sin B$及正弦定理得$a=\sqrt{3}b$,于是$\frac{3b^2+b^2-c^2}{2\sqrt{3}b^2}=\frac{\sqrt{3}}{2}$,由此可得$b=c$,$B=C=\frac{\pi}{6}$,$A=\frac{2\pi}{3}$.由②$c\sin A=3$,所以$c=b=2\sqrt{3}$,$a=6$.因此,选条件②时问题中的三角形存在,此时$c=2\sqrt{3}$.

方案三 选条件③.由$C=\frac{\pi}{6}$和余弦定理得$\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}=\frac{\sqrt{3}}{2}$,由$\sin A=\sqrt{3}\sin B$及正弦定理得$a=\sqrt{3}b$,于是$\frac{3b^2+b^2-c^2}{2\sqrt{3}b^2}=\frac{\sqrt{3}}{2}$,由此可得$b=c$.由③$c=\sqrt{3}b$,与$b=c$矛盾.因此,选条件③时问题中的三角形不存在.

由以上解答可以看到,本题设计源于底角为30°的等腰三角形,若不补充其他条件,这样的三角形是存在的,只是三角的三边长度不确定,有无数种可能,三角形形状大小不确定,它们是相似的等腰三角形.分别补充条件①或②后,三角形的形状大小确定,而条件③显然不符合等腰三角形两腰长度相等的要求,补充条件③后就出现了矛盾,这样的三角形也就不存在了.

1.2 给不同数学基础的学生提供选择机会

案例2(2020高考北京卷-17) 在$\triangle ABC$中,$a+b=11$,再从条件①、条件②这两个条件中选择一个作为已知,求:

(1)a的值;

(2)$\sin C$和$\triangle ABC$的面积.

条件①:$c=7$,$\cos A=-\frac{1}{7}$.条件②:$\cos A=\frac{1}{8}$,$\cos B=\frac{9}{16}$.

注:如果选择条件①和条件②分别解答,按第一

个解答计分.

分析:

方案一 选择条件①.(1)$\because c=7,\cos A=-\frac{1}{7}$, $a+b=11$. $\because a^2=b^2+c^2-2bc\cos A$, $\therefore a^2=(11-a)^2+7^2-2(11-a)\cdot 7\cdot\left(-\frac{1}{7}\right)$, $\therefore a=8$.

(2) $\because \cos A=-\frac{1}{7}, A\in(0,\pi)$, $\therefore \sin A=\sqrt{1-\cos^2 A}=\frac{4\sqrt{3}}{7}$. 由正弦定理得$\frac{a}{\sin A}=\frac{c}{\sin C}$, $\therefore \frac{8}{\frac{4\sqrt{3}}{7}}=\frac{7}{\sin C}$, $\therefore \sin C=\frac{\sqrt{3}}{2}$. $\therefore S=\frac{1}{2}ba\sin C=\frac{1}{2}(11-8)\times 8\times\frac{\sqrt{3}}{2}=6\sqrt{3}$.

方案二 选择条件②.(1)$\because \cos A=\frac{1}{8}$, $\cos B=\frac{9}{16}$, $A,B\in(0,\pi)$, $\therefore \sin A=\sqrt{1-\cos^2 A}=\frac{3\sqrt{7}}{8}$, $\sin B=\sqrt{1-\cos^2 B}=\frac{5\sqrt{7}}{16}$. 由正弦定理得$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}$, $\therefore \frac{a}{\frac{3\sqrt{7}}{8}}=\frac{11-a}{\frac{5\sqrt{7}}{16}}$, $\therefore a=6$.

(2) $\sin C=\sin(A+B)=\sin A\cos B+\sin B\cos A=\frac{3\sqrt{7}}{8}\times\frac{9}{16}+\frac{5\sqrt{7}}{16}\times\frac{1}{8}=\frac{\sqrt{7}}{4}$. $S=\frac{1}{2}ba\sin C=\frac{1}{2}(11-6)\times 6\times\frac{\sqrt{7}}{4}=\frac{15\sqrt{7}}{4}$.

三角形有三条边、三个内角,共六个元素.在内角和定理、正弦定理、余弦定理牵引下,给出三个条件就可以求解另外三个元素,不同的条件会有不同的求解途径,给不同知识储备的学生以更多的选择.

1.3 2020年新高考数学结构不良问题设计特征

美国学者Reitman从认知心理学的角度,把问题分为结构良好问题和结构不良问题,结构良好问题的初始状态(即问题的已知条件)、目标要求和算法都很明确,而上述三者中有一方面不明确的就属于结构不良问题.

2020年新高考数学结构不良问题有以下三个设计特征.

一是2020年新高考山东卷与北京卷设计了两道数学结构不良问题,两道题目初始状态都不明确,其区别在于山东卷的题目目标要求不定,而北京卷的题目目标要求确定.

二是两道结构不良问题均以解三角形为背景,从学生数学学习心理角度来看,问题解决者易于接受这样的背景,这使新高考数学命题形式能够平稳过渡.

三是结构不良问题“破土而出”,引领高中数学教学方向.按照《普通高中数学课程标准(2017年版2020年修订)》的评价进行教学,更加关注受教育者未来的思维需求.

新时期的高考内容改革的重要特征就是从能力立意到素养导向的转变.“从能力立意到素养导向的转变,突出表现为考查目的从关注知识到关注人;考查目标从常规性问题的解决技能到创造性的探究能力,考查情境从学科知识化到真实情境化;试题条件从结构良好到结构不良;试题要素从单一因素到复合因素;试题结构从碎片到整体”[2].可以预见,在中国高考评价体系下,结构不良问题将会是今后高考中的常客,认识它的教育功能,摆正态度,调整教学,理应是当下一线教师的紧迫任务.

2 新高考数学结构不良问题的教育功能

2.1 提供初始状态的选择性

根据多元智能理论,人的学习智力优势具有多向性.为提供公平竞争环境设计的数学命题结构不良情境,可以给问题解决者提供多种选择,既反映问题的多角度思考,又显示不同的数学思维智慧.[3]

案例3(2020山东高考数学模拟题) 在①$b_1+b_3=a_2$,②$a_4=b_4$,③$S_5=-25$这三个条件中任选一个,补充在下面问题中,若问题中的k存在,求k的值;若k不存在,说明理由.

设等差数列$\{a_n\}$的前n项和为S_n,$\{b_n\}$是等比数列,________,$b_1=a_5$,$b_2=3$,$b_5=-81$,是否存在k,使得$S_k>S_{k+1}$且$S_{k+1}<S_{k+2}$?

分析:

选择条件,补充问题.

示例1 设等差数列$\{a_n\}$的前n项和为S_n,$\{b_n\}$是等比数列,$b_1+b_3=a_2$,$b_1=a_5$,$b_2=3$,$b_5=-81$,是否存在k,使得$S_k>S_{k+1}$且$S_{k+1}<S_{k+2}$?

示例2 设等差数列$\{a_n\}$的前n项和为S_n,$\{b_n\}$是等比数列,$a_4=b_4$,$b_1=a_5$,$b_2=3$,$b_5=-81$,是否存在k,使得$S_k>S_{k+1}$且$S_{k+1}<S_{k+2}$?

示例3 设等差数列$\{a_n\}$的前n项和为S_n,$\{b_n\}$是等比数列,$S_5=-25$,$b_1=a_5$,$b_2=3$,$b_5=-81$,是否存在k,使得$S_k>S_{k+1}$且$S_{k+1}<S_{k+2}$?

设计意图:本题命题思想与2020年新高考山东数学结构不良问题类似,问题情境背景为数列,问题解决的难度更大一些.

2.2 培育数学思维的发散性

结构不良问题的主要功能之一在于训练学生的发散性思维,培养学生数学思维的深刻性,引领学生

在数学学习时创新创造.

案例4 $\triangle ABC$中,$B(-2,0)$,$C(2,0)$,请对A点给出适当的条件,求$\triangle ABC$重心G的轨迹方程.

分析:

由A点的运动引起G点的变化,所以随着A点具备的条件不同,重心G的轨迹可能不一样,于是必须弄清楚A点与重心G坐标之间的关系,设重心$G(x,y)$,$A(x_1,y_1)$,则由重心的性质得$x_1=3x$,$y_1=3y$,因而给出点A的条件可以从边长、角度或点A在已知曲线上移动等方面思考.

示例1 添加条件"$|AB|+|AC|=6$",则A点轨迹在以B、C为焦点的椭圆上,设椭圆的方程为$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$,则$a=3$,$c=2$,$b^2=a^2-c^2=5$,所以$A$点轨迹方程为$\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{5}=1(y\neq 0)$,因此$G$的轨迹方程为$\frac{9x^2}{9}+\frac{9y^2}{5}=1$,即$x^2+\frac{9y^2}{5}=1(y\neq 0)$.

示例2 添加条件"$|AB|-|AC|=2$",则A点轨迹在以B、C为焦点的双曲线上(右支),设双曲线的方程为$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$,则$a=1$,$c=2$,$b^2=c^2-a^2=3$,所以$A$点轨迹方程为$x^2-\frac{y^2}{3}=1(x>1)$,从而$G$的轨迹方程为$9x^2-3y^2=1(x>\frac{1}{3})$.

示例3 添加条件"$|AB|=|AC|$",则A点轨迹在线段BC的中垂线上,轨迹方程为$x=0(y\neq 0)$,所以G点的轨迹方程为$x=0(y\neq 0)$.

示例4 添加条件"$\angle A=\frac{\pi}{2}$",则A点轨迹在以BC为直径的圆上,其轨迹方程为$x^2+y^2=4(y\neq 0)$,则G点的轨迹方程为$x^2+y^2=\frac{4}{9}(y\neq 0)$.

示例5 添加条件"$\angle ABC=2\angle ACB$",则可求得A点轨迹方程为双曲线的左支$\frac{(x-\frac{2}{3})^2}{\frac{16}{9}}-\frac{y^2}{\frac{16}{3}}=1$($x<\frac{2}{3}$,且$y\neq 0$),所以$G$点的轨迹方程为$\frac{(3x-\frac{2}{3})^2}{\frac{16}{9}}-\frac{9y^2}{\frac{16}{3}}=1(x<\frac{2}{9}$,且$y\neq 0)$.

示例6 添加条件"$\triangle ABC$面积为定值S",则可求得A点轨迹方程为$y=\frac{S}{2}$和$y=-\frac{S}{2}$,所以G点轨迹方程为$y=\frac{S}{6}$和$y=-\frac{S}{6}$.

示例7 添加条件"A点在曲线$y=3^x$上移动",则可求得A点轨迹方程为$y=3^{3x-1}$.

示例8 添加条件"A点在曲线$y=\sin x$上移动",则可求得A点轨迹方程为$y=\frac{1}{3}\sin 3x(y\neq 0)$.

设计意图:(1)将上述条件中的数字抽象成字母条件,如案例4中将条件抽象为$\angle A=\alpha(0<\alpha<\pi)$,则$A$点轨迹将是两段圆弧.(2)若条件抽象为$k_{AB}\cdot k_{AC}=m(m\neq 0)$,则要对$m$的情况进行分类讨论,可以留给学生进一步思考.(3)本题的开放性思考实际上是对平面解析几何相关内容进行梳理、总结或提炼,上述示例只体现其中的一小部分.

2.3 评价创新思维的闪光点

培养学生的创新意识是时代赋予数学教育的重要功能,数学结构不良问题为学生提出新想法、新解法、新结论和新思维打开新的空间,创造这种情境有利于发现学生思维的闪光点.

案例5 四棱锥上提问题,发散思维显智慧

问题 如图1,底面为菱形的四棱锥$P\text{-}ABCD$,$PA\perp$平面$ABCD$,$\angle ABC=\frac{\pi}{3}$,$PA=AB$.在此空间几何体中,提出一个直线与平面所成角问题和平面与平面所成角问题并解之.

分析:

提出的问题示例如下.

(1)PC与平面PAD所成角的正弦;

(2)PD与平面PAC所成角的正弦;

(3)若G为PC中点,求BG与平面PAB所成角的正弦;

(4)平面PCD与平面$ABCD$所成二面角的正切;

(5)平面PCD与平面PAD所成二面角的正切;

(6)平面PBC与平面PCD所成二面角的余弦.

问题解决

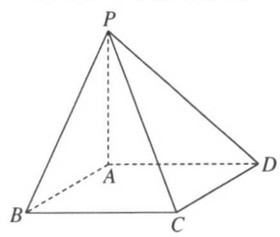

图1

(1)突出"一作、二证、三计算"的方法,取AD中点为E,联结CE,因为$CE\perp AD$,$CE\perp PA$,$AD\cap PA=A$,所以$CE\perp$平面PAD,又四边形$ABCD$为菱形,$\angle ABC=\frac{\pi}{3}$,故$AC=CD$,另$PA\perp$平面$ABCD$,$CE\subset$平面$ABCD$.所以$\angle CPE$为PC与平面PAD所成角,$\sin\angle CPE=\frac{CE}{CP}=\frac{\frac{\sqrt{3}}{2}AB}{\sqrt{2}AB}=\frac{\sqrt{6}}{4}$.

(2)联结AC与BD交于点O,$PA\perp$面$ABCD$,

又 $DO\subset$ 面 $ABCD$，$PA\perp DO$，四边形 $ABCD$ 为菱形，所以 $DO\perp AC$，$AC\cap PA=A$，$DO\perp$ 面 PAC. 所以 $\angle DPO$ 为 PD 与平面 PAC 所成角，$\sin\angle DPO=\frac{OD}{PD}=\frac{\frac{\sqrt{3}}{2}AB}{\sqrt{2}AB}=\frac{\sqrt{6}}{4}$.

（3）如图 2，过 G 作 GH 垂直平面 PAB 于 H 点，联结 BH，则 $\angle GBH$ 为 BG 与平面 PAB 所成角，由 $V_{G\text{-}PAB}=V_{B\text{-}PAG}$，即 $\frac{1}{3}\times GH\times S_{\triangle PAB}=\frac{1}{3}\times BO\times S_{\triangle PAG}$，所以 $GH\times\frac{1}{2}AB^2=\frac{1}{4}\times\frac{\sqrt{3}}{2}AB\times AB^2$，$GH=\frac{\sqrt{3}}{4}AB$. 又 $BG^2=PB^2+PG^2-2PB\times PG\times\cos\angle BPG=2AB^2+\frac{1}{2}AB^2-2\sqrt{2}AB\times\frac{\sqrt{2}}{2}AB\times\frac{2+2-1}{2\times\sqrt{2}\times\sqrt{2}}=AB^2$，所以 $BG=AB$，$\sin\angle GBH=\frac{GH}{BG}=\frac{\sqrt{3}}{4}$.

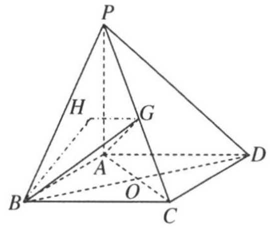

图 2

（4）如图 3，取 CD 中点为 E，联结 AE，PE，则 $\angle PEA$ 为平面 PCD 与平面 $ABCD$ 所成二面角的平面角，$\tan\angle PEA=\frac{PA}{AE}=\frac{AB}{\frac{\sqrt{3}}{2}AB}=\frac{2\sqrt{3}}{3}$.

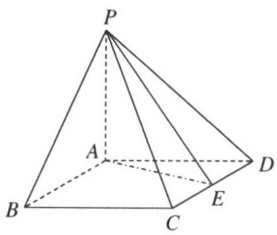

图 3

（5）如图 4，取 AD 中点为 F，过点 F 作 PD 垂线交 PD 于 G，联结 CG，则 $\angle CGF$ 为平面 PCD 与平面 PAD 所成二面角的平面角，$CF=\frac{\sqrt{3}}{2}AB$，在 $\triangle PAD$ 中，$\triangle FGD\backsim\triangle PAD$，所以 $\frac{FG}{AP}=\frac{FD}{PD}=\frac{1}{2\sqrt{2}}$，$FG=\frac{\sqrt{2}}{4}AB$，$\tan\angle CGF=\frac{CF}{FG}=\sqrt{6}$.

（6）如图 5，过直线 BD 作 PC 的垂面 BDH，$\angle BHD$ 为平面 PBC 与平面 PCD 所成二面角的平面角. 因为 $BH\times PC=BC\times\sqrt{PC^2-(\frac{1}{2}BC)^2}$，所以 $BH=DH=\frac{AB\times\sqrt{\frac{7}{4}}AB}{\sqrt{2}AB}=\frac{\sqrt{7}}{2\sqrt{2}}AB$，$\cos\angle BHD=\frac{BH^2+DH^2-BD^2}{2BH\cdot DH}=\frac{\frac{7}{8}AB^2+\frac{7}{8}AB^2-3AB^2}{2\times\frac{7}{8}AB^2}=-\frac{5}{7}$.

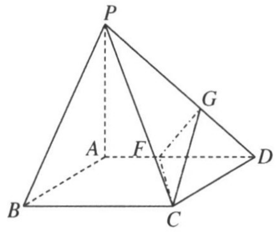

图 4

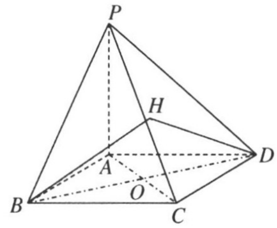

图 5

设计意图：我国教育家陶行知先生写过一首诗《每事问》："发明千千万，起点在一问，禽兽不如人，过在不会问，智者问的巧，愚者问的笨，人力胜天工，只在每事问."[4] 在教学评价中引入提问环节，是评价创新思维的良好载体.

3　新高考数学结构不良问题的教学途径

3.1 为问题解决提供多种可能

案例 6　根据给定部分条件，添加一个条件，提出一个有意义的数学问题.

问题　$\triangle ABC$ 的内角 $\angle A$，$\angle B$，$\angle C$ 的对边分别为 a，b，c，已知 $\cos^2(\frac{\pi}{2}+A)+\cos A=\frac{5}{4}$. (1)求 $\angle A$.

完成问题(1)的求解，在问题(2)中添加一个条件，提出一个有意义的数学问题.

分析：

提出的问题示例如下.

①若 $b-c=\frac{\sqrt{3}}{3}a$，证明：$\triangle ABC$ 是直角三角形.

②若 $\angle B=45°$，$a=2$，求 b，c.

③若 $\cos B=\frac{\sqrt{5}}{5}$，$b=\frac{4\sqrt{15}}{5}$，求 $\triangle ABC$ 的面积.

④若 $a=2\sqrt{3}$，$\triangle ABC$ 面积为 $\sqrt{3}$，求 $\triangle ABC$ 的周长.

⑤若 $\triangle ABC$ 的面积为 $5\sqrt{3}$，$b=5$，求 $\sin B\sin C$ 的值.

⑥当 $\sin B+\sqrt{3}\sin(C-\frac{\pi}{6})$ 取得最大值时，试判断 $\triangle ABC$ 的形状.

⑦若 $2a=b+c$，且 $\triangle ABC$ 的外接圆半径为 1，求 $\triangle ABC$ 的面积.

⑧若 $AB=3$，AC 边上的中线 BD 的长为 $\sqrt{13}$，求 $\triangle ABC$ 的面积.

⑨已知 $a=3$，求 $\triangle ABC$ 周长的取值范围.

⑩已知 $\triangle ABC$ 的面积为 $3\sqrt{3}$，求 $\triangle ABC$ 周长的取值范围.

（下转第 81 页）

C 点为图形展开前图中的 C 点).

如图12,联结 OG,并过 G 点作 $GF\perp AD$,垂足为 F,由题可知 $OG=OC=l$,$GF=h$,$OB=b$,由 $\overset{\frown}{AD}$ 的长为 a 得展开后的线段 $AD=a$. 设线段 GC 的长为 x,则 $\overset{\frown}{GC}$ 的长也为 x,由母线长为 l 可求出 $\angle COG$. 作 $BE\perp OG$,垂足为 E,因为 $OB=b$,可由三角函数求出 OE 和 BE,从而得到 GE,利用勾股定理表示出 BG. 接着由 $FD=CG=x$,得到 $AF=a-x$,利用勾股定理可以求出 AG,将 AF,BE 相加即得到 AH,将 EG,GF 相加即得到 HB. 因为两点之间线段最短,所以 A,G,B 三点共线,利用勾股定理可以得到 $AB^2=AH^2+BH^2$,进而得到关于 x 的方程,即可解出 x,将 x 的值回代到 BG 和 AG 中,求出它们的和即可得到最短路径的长.

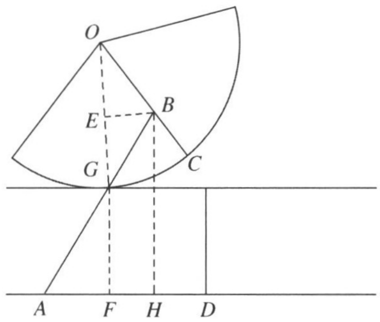

图12

教师提问:你能看出本解法的问题所在吗?

(解析从略).

在解题中摆脱简单接受教师或其他资源的解释,更多关注批判性反思,如方法是如何被发现的,为什么步骤是按照所呈现的方式组织的等. 这只是批判性思维的初级阶段. 批判性思维形成的最终目标是在自学和后续学习过程中,基于深刻的思考和判断,主动地、习惯性地提出相关的批判性问题,如是否所有条件都是必要的,问题能否以不同的方式解决,解决方案是否可行等. 在整个学习过程中,需要不断问"为什么"和"如何去做",如定理是如何推导出来的,为什么选择这种方法等. 学生批判性思维的培养任重而道远.

(上接第55页)

设计意图:教学中,通过对三角形各元素的分析,增加一个条件,提出一个新的数学问题,既可以将解三角形知识体系完整复习一遍,又赋予创新意识的观察与锻炼.

3.2 营造数学思维创新、创造的环境

给定一些限制条件来提出一个有意义的数学问题,即命制数学题,需要学生既懂得相关的数学概念,又能够创造性地提出有意义且数学思维层次较高的数学问题,真正体现学生的数学素养.

案例7　给定一个隐藏着奇偶性与单调性的具体函数 $f(x)$,构造不等式 $f(g(x))>$(或 $<$ 或 $\geqslant$ 或 $\leqslant$)$f(h(x))$,需要应试者首先判断给定函数的奇偶性与单调性,然后利用函数的奇偶性与单调性求解不等式.

分析:

示例1　设函数 $f(x)=\dfrac{1-4^x}{2^x}-x$,则不等式 $f(1-x^2)+f(5x-7)<0$ 的解集为________.

示例2　设函数 $f(x)=2\ln(x+\sqrt{x^2+1})+3x^3(-2<x<2)$,则不等式 $f(2x)+f(4x-3)>0$ 的解集为________.

示例3　设函数 $f(x)=2019^x-2019^{-x}+\log_{2019}(\sqrt{x^2+1}+x)+2$,则关于 x 的不等式 $f(3x+1)+f(x)>4$ 的解集为________.

设计意图:(1)检测应试者对函数奇偶性、单调性概念的理解力;(2)检测应试者的逻辑推理与运算能力;(3)检测应试者的数学语言表达能力. 总之,以检测应试者的数学核心素养为基本点.

评价水平:

(1)能够在熟悉的情境中,用归纳或类比的方法发现数量或图形的性质,数量关系或图形关系;

(2)能够对与已学知识有关联的数学命题,通过对其条件与结论的分析,探索论证的思路,选择合适的论证方法予以证明,并能用准确的数学语言表述论证过程;

(3)能够掌握常用逻辑推理方法的规则,理解其中所蕴含的思想,对于新的数学问题,能够提出不同的假设前提,推断结论,形成数学命题.

开发数学结构不良问题有三种教学途径. 一是从命题角度,在探究数学结构良好问题的求解中,转化为结构不良问题,以扩大数学思维空间,有利于培养学生的发散性思维. 二是从解题角度,对于命题的初始状态、目标要求和算法进行充分的思考,让学生学会系统地思考解决数学问题. 三是从评价角度,给予不同数学思维水平的学生更多的选择,使学生在求解成功中获得幸福感,提高学习数学的兴趣与自信心,从而提升学生的数学核心素养.

参考文献

[1] 中华人民共和国教育部. 普通高中数学课程标准:2017年版2020年修订[S]. 北京:人民教育出版社,2020:48-50.

[2] 任子朝. 从能力立意到素养导向[J]. 中学数学教学参考(上旬),2018(5):1.

[3] 余继光. 高考数学"举例题"的评价思考[J]. 数学教学研究,2018(3):12-17.

[4] 陶行知. 陶行知全集:第四卷[M]. 长沙:湖南教育出版社,1985.