深度探究揭本质，高效思维促发展

◉广东梅县东山中学　孔鑫辉

课堂是学生学习数学知识的主要阵地，提升学生的学习力是当前课堂课程改革的核心目标之一，从而数学课堂教学的策略应指向学生学习力的提升.事实上，学习力的要素总是围绕数学思维来组织与构建的，数学思维是通往高效学习的桥梁."数学是思维的体操"，由此可见，通过可操作性的内容来训练学生的思维，达到思维方式的高效需要得到广泛的实践.鉴于此，教师需基于对数学本质清晰的认识，创新教学方式，引导学生深度探究，引领学生高效而深刻地思维，才能促进学生高效学习.本文仅就数学教学中高效的思维方式展开论述.

1 循序渐进，让思维走向深刻

既然数学教学是思维活动的教学，那么教师应基于学生的思维来展开教学.事实上，就题论题仅仅是对问题的浅层认识，在高效思维方式的大前提下，我们更需要做到的是对问题的深刻理解.所以，一方面，我们需要回避"题海战术"以减轻学生的负担；另一方面，我们需要在深化理解的层面上下足功夫，通过层层深入地研究一个问题，循序渐进地探到问题的本质，拓广解题思路，使得思维得以深化和优化.

例1　若将函数 $y=\cos\left(x+\frac{4\pi}{3}\right)+1$ 的图象向左平移 φ 个单位得到的图象所对应的函数为偶函数，则 φ 的最小正值是______.

师：读题后，谁来说一说解决本题的思路呢？

生1：将函数 $y=\cos\left(x+\frac{4\pi}{3}\right)+1$ 的图象向左平移 φ 个单位，可得 $y=\cos\left(x+\varphi+\frac{4\pi}{3}\right)+1$，进一步地，探求 φ 的最小正值.

师：思路的定位十分准确，进一步该如何求解呢？

生2：因为偶函数的对称轴是 $x=0$，也就是 y 轴，将其代入，可得 $\cos\left(\varphi+\frac{4\pi}{3}\right)+1=0$ 或 2，所以 $\cos\left(\varphi+\frac{4\pi}{3}\right)=1$ 或 -1，所以 $\varphi+\frac{4\pi}{3}=k\pi$，$\varphi=k\pi-\frac{4\pi}{3}(k\in\mathbf{Z})$，所以 φ 的最小正值是 $\frac{2\pi}{3}$.

师：非常棒！其他同学也是相同解法吗？

生3：由 $y=\cos\left(x+\frac{4\pi}{3}\right)+1$ 为偶函数，则有恒等式 $\cos\left(x+\frac{4\pi}{3}\right)+1=\cos\left(-x+\varphi+\frac{4\pi}{3}\right)+1$，化简可得 $2\sin x\sin\left(\varphi+\frac{4\pi}{3}\right)=0$.由于 $\sin x$ 不恒为0，从而 $\sin\left(\varphi+\frac{4\pi}{3}\right)=0$，则 $\varphi+\frac{4\pi}{3}=k\pi$，$\varphi=k\pi-\frac{4\pi}{3}(k\in\mathbf{Z})$，所以 φ 的最小正值是 $\frac{2\pi}{3}$.

师：刚才生2和生3呈现的都是一般解法，还存在更加简洁的解法吗？

学生陷入思考.

生4：如图1，作出函数 $y=\cos\left(x+\frac{4\pi}{3}\right)+1$ 图象，并根据图象得知，只需将图象向左平移 $\frac{2\pi}{3}$ 个单位，即可获解.

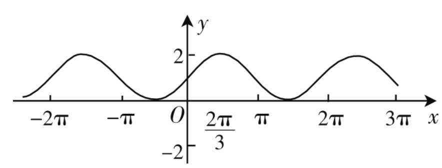

图1

师：抽象的函数问题往往使得我们的学生思维受阻，生4将抽象的问题直观化，通过数形结合完美解决了本题，非常棒！

至此，学生得出了三种解法，同时生4对于本题中的收获要旨是具有价值的.本题研究到这里似乎可以结束了，那么本题的探究价值已经发挥到了极致吗？

师：对于本题，你们还有什么想法或疑问呢？

生5：刚才研究的是函数图象的左右平移，倘若上下平移，哪些量会变化，哪些量不会变化呢？

师：生5在积极反思的情况下提出了一个非常深刻的问题，可见，他已经看清了本题的全貌.那我们一起再来思考一下.

生6：在上下平移的情况下，函数值有了变化，而

图象的形状不变,单调区间也不变……

数学解题活动中的思维过程是显性的,从而一题多解的训练是培养思维深刻性的有效途径,对于教师而言,需要站在学生的思维视角为学生提供有效的支架,并循序渐进进行引导,那么他们思维的深刻性就能得到提高;对于学生而言,需要深刻理解概念,深入思考问题,从而预见解题的发展过程,优化思维品质.

2 抓住本质,让思维越发简洁

简洁性思维就是指当思维活动到达一个较高的水平时,可以瞬间抓住事物本质,创造简单而便捷的解决方法,主要表现在能够深入思考和分析问题,并透过纷繁复杂的现象,发现事物的本质.因此,在解题教学中,教师引导学生进行数学思维活动的全过程,让学生通过深入探究牢牢抓住问题本质,让思维越发简洁.

例2 已知函数 $f(x)=\frac{ax}{x^2+1}$,$g(x)=\sin^4 x-\cos^4 x$,若对于任意 $x_1\in\mathbf{R}$ 都有 $x_2\in\mathbf{R}$ 使得 $g(x_2)=f(x_1)$,则实数 a 的取值范围是______.

分析:经过分析,学生易得 $g(x)=\sin^4 x-\cos^4 x=-\cos 2x\in[-1,1]$,从条件可知函数 $f(x)$ 的值域为函数 $g(x)$ 的值域的子集,下面只需求出函数 $f(x)$ 的值域即可获解.该如何探求呢?可知的是 $f(x)$ 的定义域为 $\mathbf{R}$,所以,可得以下两种策略:

方法1:(分类讨论)

当 $x=0$ 或 $a=0$ 时,有 $f(x)=0$;

当 $x>0$ 时,$f(x)=\frac{ax}{x^2+1}=a\cdot\frac{1}{x+\frac{1}{x}}$.若 $a>0$,则 $0<f(x)\leqslant\frac{a}{2}$;若 $a<0$,则 $-\frac{a}{2}\leqslant f(x)<0$.

当 $x<0$ 时,若 $a>0$,则 $-\frac{a}{2}\leqslant f(x)<0$;若 $a<0$,则 $0<f(x)\leqslant\frac{a}{2}$.

综上,$|f(x)|\leqslant\left|\frac{a}{2}\right|$,所以实数 a 的取值范围为 $[-2,2]$.

方法2:(导数法)

据导数知识,可得 $f'(x)=\frac{a(1-x^2)}{(x^2+1)^2}$.再就 $a>0$、$a=0$、$a<0$ 三种情况研究函数的最值,并借助 $f(x)$ 与 $g(x)$ 的值域关系,最终得出实数 a 的取值范围为 $[-2,2]$.

由于本题是一道难度适中的填空题,以上两种解法似乎略显烦琐,且在时间的把握上无法得以更好地把控.是否还有更简洁的思路呢?此时,教师可以引导学生观察函数 $f(x)$ 解析式的结构特征.学生经过深入观察易联想到基本不等式 $a^2+b^2\geqslant 2ab(a,b\in\mathbf{R})$ 的强化形式 $a^2+b^2\geqslant 2|a||b|(a,b\in\mathbf{R})$,从而得出可以这样探求函数 $f(x)$ 的值域:

当 $a=0$ 或 $x=0$ 时,则有 $f(x)=0$,符合题意;

当 $a\neq 0$ 且 $x\neq 0$ 时,$|f(x)|=|a|\cdot\frac{1}{|x|+\frac{1}{|x|}}\leqslant\frac{|a|}{2}$.

综上 $|f(x)|\leqslant\left|\frac{a}{2}\right|$,所以实数 a 的取值范围为 $[-2,2]$.

此时,教师还需进一步追问:“还能更加简洁吗?”学生基于以上思路稍加思考,则可发现 $f(x)=\frac{ax}{x^2+1}=a\cdot\frac{1}{x+\frac{1}{x}}$,可得 $\left|\frac{x}{x^2+1}\right|\leqslant\frac{1}{2}$,进一步得出 $|f(x)|\leqslant\left|\frac{a}{2}\right|$.

显然,经过这样的深思熟虑,在不断调整和修正思维方向的过程中,为学生节约了更多的思维空间.为达到培养简洁性思维这一目标,我们只有将数学思维方法与具体的数学解题紧密结合起来,将这种思维品质的培养贯穿于解题过程中,以具体问题的分析带动和促进简洁性思维的形成,并形成稳固的思维方式.总之,只有通过深入地研究数学问题背后的思维方式,我们才能让学生感受到具体的思维方式,只有在简单方法上下足功夫,我们才能真正做到让学生的思维更简洁,让简洁性思维实现数学的再创造.

让思维变得更加严谨的过程,不仅可以真正意义上掌握知识和发展能力,更重要的是可以通过思维方法的展现让学生更加清楚地认识自身的思维过程,并在此基础上及时进行调整和修改,在积极主动地进行自我反馈和剖析的过程中,透过现象,探及本质,真正达到理解和运用.更重要的是,通过不断改进思维方式,促使学生不断总结和吸收解题过程中的经验和教训,使得思路更加开阔,进而高效思维.

总之,解题教学中,教师应以具体数学问题为载体,善于以题带面,多方设疑,循序渐进地加以指导,挖掘学生思维的深刻性、简洁性和严谨性,使得学生用尽可能少的时间获取最大效益的解题方式.在解题过程中,能够达到高效率和高质量,才能促进学生思维方式的高效,才能提升学生的学习力,使学生获得高效发展,那么学生的数学学习自然会充分高效,在高考中数学解题也会充分高效.W