

圆锥曲线问题解答中的失分原因探究

●福建省永安市第一中学 江 冰

1 引言

圆锥曲线问题是考查学生运算推理、化归转化等能力的有效载体,是历年高考的必考内容.学生在处理问题时常因各种原因导致失分,笔者将这些问题进行汇总,整理出几种较为普遍的失分原因,并举例说明,供同行们参考.

2 失分原因

2.1 缺失检验

例 1 已知双曲线 $C: x^2 - \frac{y^2}{2} = 1$.

(1)求双曲线的离心率;

(2)是否存在过点 $A(1,1)$ 的直线 l 与双曲线 C 交于 M, N 两点,且点 A 为线段 MN 的中点? 若存在求出直线方程,若不存在请说明理由.

错解: (1)略;

(2)假设满足条件的直线 l 存在, $M(x_1, y_1)$, $N(x_2, y_2)$, 利用点差法可得

$$2(x_1 + x_2)(x_1 - x_2) - (y_1 + y_2)(y_1 - y_2) = 0,$$

因为 $x_1 + x_2 = 2, y_1 + y_2 = 2$, 所以 $\frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2} = 2$. 所

以 $k_l = 2, l$ 的方程为 $y - 1 = 2(x - 1)$, 即 $y = 2x - 1$.

剖析: 上述解法中在利用“点差法”求出中点弦的方程之后,忽略了对直线与双曲线能否相交的检验.

在上述(2)的基础上,增加如下步骤:

将 l 的方程 $y = 2x - 1$ 与双曲线方程联立

$$\begin{cases} y = 2x - 1, \\ x^2 - \frac{y^2}{2} = 1, \end{cases} \text{ 得 } 2x^2 - 4x + 3 = 0. \text{ 因为 } \Delta < 0, \text{ 所以满足}$$

条件的直线 l 不存在.

2.2 忽视定义

例 2 已知 $M\left(-\frac{\sqrt{6}}{2}, 0\right), N\left(\frac{\sqrt{6}}{2}, 0\right)$, 动点 P 满足

$$|PM| - |PN| = \sqrt{2}.$$

(1)求动点 P 的轨迹的方程;

(2)若直线 $l: y = kx + 1$ 与点 P 的轨迹有两个不同的交点 A, B , 求实数 k 的取值范围.

错解: (1) 因为 $|PM| - |PN| = \sqrt{2} < \sqrt{6}$, 所以 P 点轨迹为以 M, N 为焦点的双曲线: $\frac{x^2}{\frac{1}{2}} - y^2 = 1$, 即

$$2x^2 - y^2 = 1.$$

(2) 将直线方程与曲线方程联立 $\begin{cases} 2x^2 - y^2 = 1, \\ y = kx + 1, \end{cases}$ 消

去 y 可得 $(2 - k^2)x^2 - 2kx - 2 = 0$.

因为直线 l 与 P 点的轨迹有两个不同交点, 所以 $\begin{cases} 2 - k^2 \neq 0, \\ \Delta = 4k^2 + 8(2 - k^2) > 0, \end{cases}$ 解得 $k^2 < 4, k^2 \neq 2$. 所以 k 的取值范围为 $-2 < k < 2, k \neq \pm\sqrt{2}$.

剖析: 第(1)问出错原因是没有严谨把握双曲线的定义: 平面内到两个定点的距离之差的绝对值为定值的点的轨迹, 且该定值小于两个定点间的距离. 本题所给条件是 $|PM| - |PN| = \sqrt{2} < \sqrt{6}$ 的点 P 轨迹是以 M, N 为焦点的双曲线的右分支, 所以点 P 的轨迹方程为 $2x^2 - y^2 = 1 \left(x \geq \frac{\sqrt{2}}{2} \right)$.

第(2)问出错原因是受到了第(1)问的牵连, 直线 l 和双曲线的右支有两个不同交点时, 令 $A(x_1, y_1)$,

$$B(x_2, y_2), \text{ 则须满足 } \begin{cases} 2 - k^2 \neq 0, \\ \Delta = 4k^2 + 8(2 - k^2) > 0, \\ x_1 + x_2 = \frac{2k}{2 - k^2} > 0, \\ x_1 x_2 = \frac{-2}{2 - k^2} > 0, \end{cases} \text{ 进而可}$$

得 $-2 < k < -\sqrt{2}$.

2.3 遗漏判定

例 3 已知双曲线 $x^2 - \frac{y^2}{2} = 1$, 过点 $A(0, 1)$ 作斜率为 k 的直线 l 交双曲线于点 P_1, P_2 , 问 k 取何值时,



线段 P_1P_2 的中点在直线 $x = \frac{1}{2}$ 上.

错解: l 的方程 $y = kx + 1$, 将其与双曲线方程联立得 $\begin{cases} x^2 - \frac{y^2}{2} = 1, \\ y = kx + 1, \end{cases}$ 消去 y 得 $(2 - k^2)x^2 - 2kx - 3 = 0$,

由题意 $2 - k^2 \neq 0$, 令 $P_1(x_1, y_1), P_2(x_2, y_2)$, 则 $x_1 + x_2 = \frac{2k}{2 - k^2} = 1$, 解得 $k = -1 \pm \sqrt{3}$. 故当 $k = -1 \pm \sqrt{3}$

时, 线段 P_1P_2 的中点在直线 $x = \frac{1}{2}$ 上.

剖析: 消元后, 方程 $(2 - k^2)x^2 - 2kx - 3 = 0$ 的判别式为 $\Delta = 4k^2 + 12(2 - k^2) = 24 - 8k^2$, 由 $\Delta > 0$, 得 $-\sqrt{3} < k < \sqrt{3}$, 显然 $k = -1 \pm \sqrt{3}$ 时, 判别式小于 0, 直线与双曲线无交点. 错解中因忽视了判别式的判定, 产生增解. 正确答案为 $k = -1 \pm \sqrt{3}$.

2.4 用错方法

例 4 椭圆的中心在原点, 坐标轴为对称轴, 直线 $l_1: y = x + 1$ 截椭圆所得弦 AB 的长为 $2\sqrt{2}$, 且直线 $l_2: x + 2y = 0$ 过弦 AB 的中点 M , 求椭圆的方程.

错解: 由题意可知, 椭圆的焦点可能在 x 轴或 y 轴上, 故应分两种情况讨论如下:

当焦点在 x 轴上时, 椭圆方程为 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$, 将其与直线方程联立得 $\begin{cases} y = x + 1, \\ \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, \end{cases}$ 消去 y ,

整理之后, 再由根与系数的关系及弦长公式、中点坐标公式等, 联立解得 a, b 的值;

当焦点在 y 轴上时, 椭圆方程为 $\frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1 (a > b > 0)$, 同理得 a, b 的值.

剖析: 上述方法求解中运用了分类讨论法, 运算量较大, 易出错, 不是解决此类问题最好的方法. 正确解法如下:

据已知条件令椭圆的方程为 $\frac{x^2}{m} + \frac{y^2}{n} = 1 (m > 0, n > 0)$, 将直线方程与其联立得 $\begin{cases} y = x + 1, \\ \frac{x^2}{m} + \frac{y^2}{n} = 1, \end{cases}$ 消去 y

整理后可得 $(m + n)x^2 + 2mx + m - mn = 0$.

令 $A(x_1, y_1), B(x_2, y_2)$, 由根与系数的关系知

$x_1 + x_2 = \frac{-2m}{m + n}, x_1x_2 = \frac{m - mn}{m + n}$, 由 $|AB| = 2\sqrt{2}$, 可得

$$|AB| = \sqrt{2} \times \sqrt{(x_1 + x_2)^2 - 4x_1x_2} = 2\sqrt{2}, \text{ 即} \\ m^2n + mn^2 = m^2 + 3mn + n^2 \quad ①$$

又弦 AB 中点 $M\left(\frac{-m}{m + n}, \frac{n}{m + n}\right)$, 而 M 在直线 $x + 2y = 0$ 上, 故 $\frac{-m}{m + n} + 2 \frac{n}{m + n} = 0$, 即 $m = 2n$. 将 $m = 2n$

代入①式可得 $m = \frac{11}{3}, n = \frac{11}{6}$.

所以所求的椭圆的方程为 $\frac{3x^2}{11} + \frac{6y^2}{11} = 1$.

2.5 选错方向

例 5 已知椭圆 $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{2} = 1 (a > \sqrt{2})$ 的离心率为 $\frac{\sqrt{2}}{2}$, 左、右顶点分别为 A, B , 点 M 是椭圆 C 上异于 A, B 的一点, 直线 AM 与 y 轴交于点 P .

(1) 若点 P 在椭圆 C 的内部, 求直线 AM 的斜率的取值范围;

(2) 设椭圆 C 的右焦点为 F , 点 Q 在 y 轴上, 且 $AQ \parallel BM$, 求证: $\angle PFQ$ 为定值.

错解: (1) $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{2} = 1$ (过程略).

(2) 设 $M(x_0, y_0)$, 则 $\frac{x_0^2}{4} + \frac{y_0^2}{2} = 1$. 已知 $A(-2, 0)$,

所以直线 AM 的斜率为 $\frac{y_0}{x_0 + 2}$, 故直线 AM 的方程为

$y = \frac{y_0}{x_0 + 2}(x + 2)$, 当 $x = 0$ 时, $y = \frac{2y_0}{x_0 + 2}$, 即点

$P\left(0, \frac{2y_0}{x_0 + 2}\right)$.

直线 BM 的斜率为 $\frac{y_0}{x_0 - 2}$, 因为 $AQ \parallel BM$, 所以

直线 AQ 的斜率也是 $\frac{y_0}{x_0 - 2}$, 所以直线 AQ 的方程为

$y = \frac{y_0}{x_0 - 2}(x - 2)$, 当 $x = 0$ 时, $y = \frac{2y_0}{x_0 - 2}$, 即点

$Q\left(0, \frac{2y_0}{x_0 - 2}\right)$.

由余弦定理得 $\cos \angle PFQ = \frac{|PF|^2 + |QF|^2 - |PQ|^2}{2|PF| \cdot |QF|}$,

进而需求 $|PF|, |QF|, |PQ|$ 的长度. 因计算繁琐, 使解题无法继续.

剖析: $\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{3}$ 虽然是我们熟悉的角,但在圆锥曲线中这些角并不特殊,要证某一角为定值,这个角除了 $\frac{\pi}{2}$ 以外,别无他选.因此欲证 $\angle PFQ$ 为定值,可利用 $k_{FP} \cdot k_{FQ} = -1$,或 $\overrightarrow{FP} \cdot \overrightarrow{FQ} = 0$,进而明确了解题的方向.第(2)问的正确解法如下:

设 $M(x_0, y_0)$, 则 $\frac{x_0^2}{4} + \frac{y_0^2}{2} = 1$.

已知 $A(-2, 0)$, 所以直线 AM 的斜率为 $\frac{y_0}{x_0+2}$,

故直线 AM 的方程为 $y = \frac{y_0}{x_0+2}(x+2)$, 当 $x=0$ 时,

$y = \frac{2y_0}{x_0+2}$, 即点 $P\left(0, \frac{2y_0}{x_0+2}\right)$.

直线 BM 的斜率为 $\frac{y_0}{x_0-2}$, 因为 $AQ \parallel BM$, 所以

直线 AQ 的斜率也是 $\frac{y_0}{x_0-2}$, 所以直线 AQ 的方程为

$y = \frac{y_0}{x_0-2}(x+2)$, 当 $x=0$ 时, $y = \frac{2y_0}{x_0-2}$, 即点 $Q\left(0, \frac{2y_0}{x_0-2}\right)$.

因为 $F(\sqrt{2}, 0)$, 所以 $\overrightarrow{FP} = \left(-\sqrt{2}, \frac{2y_0}{x_0+2}\right)$, $\overrightarrow{FQ} =$

$\left(-\sqrt{2}, \frac{2y_0}{x_0-2}\right)$, $\overrightarrow{FP} \cdot \overrightarrow{FQ} = \left(-\sqrt{2}, \frac{2y_0}{x_0+2}\right) \cdot$

$\left(-\sqrt{2}, \frac{2y_0}{x_0-2}\right) = 2 + \frac{4y_0^2}{x_0^2-4} = \frac{2x_0^2+4y_0^2-8}{x_0^2-4}$.

又 $2x_0^2+4y_0^2-8=0$, 所以 $\overrightarrow{FP} \cdot \overrightarrow{FQ} = 0$, 即 $\angle PFQ = \frac{\pi}{2}$, 为定值.

3 结束语

总之,错误并不可怕,只要我们能够弄清楚错误的类型,探究出错误的原因,严谨思考、规范解答,即可将错误消灭在萌芽状态. **2**

(上接第 87 页)

在第一象限内各个函数图象的变化趋势,如图 11.

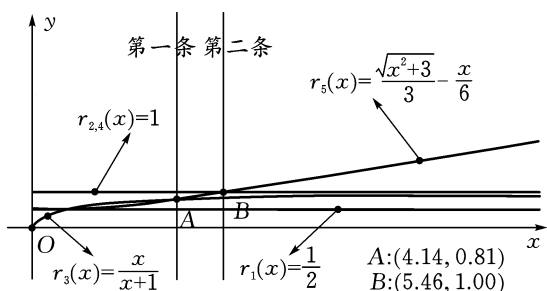


图 11

由图 11 可知,当 $\beta \leq x < (2+2\sqrt{3})$ 时,即在第一条和第二条垂线之间,五个函数的函数图象变化为: $r_1(x) < r_3(x) \leq r_5(x) < r_2(x) = r_4(x)$. 所以当 $\beta x \leq y < (2+2\sqrt{3})x$ 时, $r_1 < r_3 \leq r_5 < r_2 = r_4$.

当 $x \geq (2+2\sqrt{3})$ 时,即从第二条垂线往右,五个函

数的函数图象变化为: $r_1(x) < r_3(x) < r_4(x) = r_2(x) \leq r_5(x)$. 所以当 $y \geq (2+2\sqrt{3})x$ 时, $r_1 < r_3 < r_4 = r_2 \leq r_5$.

方案六: 把矩形木板碾碎,高温压成一个等厚度的

圆面,则捏出的圆面半径为 $r_6 = \sqrt{\frac{xy}{\pi}}$,显然方案六求出圆的半径是这六种方案中最大,因为所有木板废料都利用上了.

3 结束语

本文的研究结果表明一个矩形长与宽的比例不同时,各个方案切出最大圆面是各不相同的,切出最大圆的优化策略也不同,六种方案的优劣情况随着矩形的长与宽的变化而变化,优化结果的多样性也是值得品味的.值得注意的是每个方案中的各半径函数都是连续函数. **2**