基于数学思维敏捷性与灵活性的数学运算素养的培养*

◉ 湖州师范学院教师教育学院　张天姿　韩祥临

摘　要：数学运算是依赖于数学思维的，通过对数学思维品质和数学运算素养的内涵以及它们之间的相互关系进行分析，就如何从数学思维品质的敏捷性与灵活性出发培养数学运算素养提出三点措施，并结合具体的实例进行剖析，为高中数学教学提供参考．

关键词：数学思维品质；敏捷性；灵活性；数学运算素养；高中

1 引言

数学思维品质是指数学思维的深刻性、数学思维的广阔性、数学思维的敏捷性、数学思维的灵活性、数学思维的批判性和数学思维的独创性．"数学是思维的体操"，思维不仅是数学教学的核心，也是数学核心素养培养的落脚点．《普通高中数学课程标准(2017 年版 2020 年修订)》把数学核心素养定义为"学生应具备的、能够适应终身发展和社会发展需要的、与数学有关的思维品质和关键能力．"所以，数学核心素养与数学思维品质有着密不可分的关系，从长远培养数学核心素养来看，数学教育应该注重帮助学生拥有高品质的数学思维．运算素养是数学六大学科核心素养之一，也是六个素养里面极其重要的一个．数学运算是数学的"童子功"，也是学生学习数学、应用数学的基础．虽然核心素养近几年逐渐被重视，但是目前的研究基本上集中于理论分析，缺少实践的探索，这就导致有关学生数学学科核心素养的相关成果很少能够具备可操作性，从而使数学学科核心素养由于缺乏明确、可行的指引而难以"落地"．基于目前的这一现状，我们从数学思维品质出发，分析数学思维品质的敏捷性、灵活性与数学运算素养之间的关系，并提出三点建议．

2 数学运算素养

2.1 数学运算素养的含义

数学运算在数学学习中起着重要的作用，基本上所有的数学知识都会涉及数学运算，它是解决数学问题的基本手段．《义务教育数学课程标准(2011 年版)》对数学运算能力的定义是"能够根据法则和运算律正确地进行运算的能力．"《普通高中数学课程标准(2017 年版 2020 年修订)》认为数学运算素养是指"在明晰运算对象的基础上，依据运算法则解决数学问题的素养．主要包括：理解运算对象，掌握运算法则，探究运算思路，选择运算方法，设计运算程序，求得运算结果等"．我们认为，数学运算能力应该对运算的正确性、灵活性、简洁性做出要求，即学生能理解题目并抽象出运算对象，能根据具体情境和问题特征灵活地选择出最简洁的运算方法，能在运算过程中不断反思、自我监控，最后根据运算律快速、正确地算出答案．需要注意，数学运算素养不等于数学运算能力，而是以数学运算能力为基础，又涉及了对学生思维品质、情感态度价值观的培育．

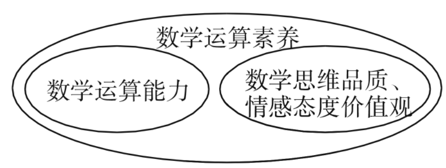

图 1

2.2 数学运算素养的三个水平

我们把数学运算素养按问题情境和知识技能这两个维度分别划分了三级水平．在问题情境这一维度，水平一要求学习者能在熟悉的情境中了解运算对象，提出运算问题；水平二要求学习者能在关联的情

* 湖州师范学院研究生科研项目(编号：YJGX20011)资助．通信作者：韩祥临，博士，教授，研究方向：数学教育．E－mail：xlhan@zjhu.edu.cn

境中了解运算对象，提出运算问题；水平三则要求学习者能在综合的情境中了解运算对象，提出运算问题.在知识技能这一维度，水平一仅要求学习者能了解运算法则及其适用范围，正确运算；水平二要求学习者掌握运算法则，然后选择出合适的运算方法进行正确运算；水平三则是前两个水平的进一步提升，要求运算必须具备正确性、简洁性、灵活性.

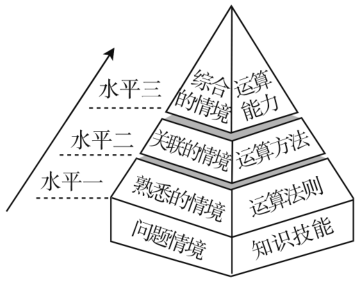

图2

可以看出，三个水平之间是一个相互联系的整体，只有完成了前一个水平，才能实现后面的水平，不同水平之间的难度也是逐级递增的.那么如何教学才能使学生的数学运算素养从水平一顺利过渡到水平三呢？我们可以从数学思维品质的敏捷性和灵活性出发，实现这一提升.

3 数学思维品质

数学思维具有一般思维的特征，由于思维的深刻性、广阔性、敏捷性、灵活性、批判性、独创性这些品质在数学中可以充分体现出来，因而可将其称为数学的思维品质.本文论述的是数学运算素养的培养，所以这里只介绍与运算素养有突出关系的数学思维的敏捷性和灵活性.

3.1 数学思维的敏捷性

思维的敏捷性在数学活动中主要表现为能缩短运算环节和推理过程，"直接"得出结果，走非常规的路.需要指出的是，数学思维的敏捷性不仅追求速度，还追求正确率，如果一个学习者解决问题的速度虽快却不能保证正确性，就不能说其数学思维是敏捷的.

如有这样一道很经典的题.古希腊数学家丢番图的墓志铭记述了他的生平：过路人，这里埋葬着丢番图.他的幼年占一生的$\frac{1}{6}$；又过了$\frac{1}{12}$才长胡子；又过了$\frac{1}{7}$才结婚；5年之后才生子；子先父四年而卒，寿为其父之半.试问丢番图活了多少岁？

大部分学生拿到这道题后会采用列方程的方法去解决：设丢番图活了x岁，可列方程$\frac{1}{6}x+\frac{1}{12}x+\frac{x}{7}+5+\frac{1}{2}x+4=x$，然后去求解这个方程，但是有些思维敏捷的学生可能会快速准确地得出正确答案.原因是根据题意，求丢番图的年龄可以转变为求6，12，7，2的最小公倍数，6，12，7，2的最小公倍数可能是84，168，252…… 其中丢番图的年龄只可能是84.

3.2 数学思维的灵活性

在数学学习中，思维的灵活性表现在能对具体问题做具体分析.主要表现为能从不同的角度、不同的方面采取灵活多样的方法来思考问题.思维具有灵活性的人不会被形式拘泥，能根据条件的不同，及时调整自己的策略，灵活运用各种公式、法则、定理，找到解题的最优方法.

下面这道题就很好地解释了思维的灵活性：已知函数$f(x)=\frac{x^2}{1+x^2}$，那么$f(1)+f(2)+f(3)+f(4)+f\left(\frac{1}{2}\right)+f\left(\frac{1}{3}\right)+f\left(\frac{1}{4}\right)$的值是？

由$f(x)=\frac{x^2}{1+x^2}$，分别求出$f(1)$、$f(2)$、$f(3)$、$f(4)$、$f\left(\frac{1}{2}\right)$、$f\left(\frac{1}{3}\right)$、$f\left(\frac{1}{4}\right)$的值再相加固然可以，但是运算量大、耗时多而且容易出错，所以不能称之为是一个好方法.但是有些思维灵活的学生会发现，这道题里面，$f(x)=\frac{x^2}{1+x^2}$，$f\left(\frac{1}{x}\right)=\frac{1}{x^2+1}$，那么$f(x)+f\left(\frac{1}{x}\right)=1$，而$f(1)=\frac{1}{2}$，所以原式$=\frac{1}{2}+1+1+1=\frac{7}{2}$.

4 数学思维的灵活性、敏捷性与数学运算素养之间的关系

数学思维的灵活性、敏捷性与数学运算素养之间的关系如图3所示.前面提到了，数学运算素养包括数学运算能力，并在数学运算能力的基础上新加了对于学生数学思维品质与情感态度的培养.运算能力有三个特点，分别是正确性、简洁性、灵活性.思维的敏捷性指思维过程的简缩性和快速性，要求学生在选择出最简单的运算程序后还要保证运算结果的正确，所以通过培养数学思维的敏捷性可以提高运算能力的正确性和简洁性；思维的灵活性指能从不同的角度、不同的方面采取灵活多样的方法来思考问题，所以通过培养数学思维的灵活性可以提高数学运算能力的灵

活性.

数学思维的敏捷性、灵活性又与数学思维的其他品质密切相关.首先数学思维的敏捷性、灵活性是思维深刻性、广阔性、批判性的体现,也就是说,只有学习者对知识的理解具有了一定的深度、广度,并且能对思维活动自我认识、自我监控以后,数学思维的敏捷性和灵活性才能表现出来.其次,我们认为数学思维的独创性是数学思维品质中最高层次的品质,也是最难达到的,要以灵活、敏捷的思维为基础.另外,对于情感态度价值观这一层面,学生数学思维具备了敏捷性与灵活性后,会认为数学是一门有趣的学科,对数学的兴趣自然也会提高,在以后的学习中就会乐于发现、乐于思考、乐于探索.

综上所述,数学思维的敏捷性、灵活性不仅能促进学生数学运算能力的发展,还能培养学生的数学思维品质,使学生具备良好的数学学习态度.所以,从发展学生数学思维品质的敏捷性与灵活性出发是可以培养数学运算素养的.

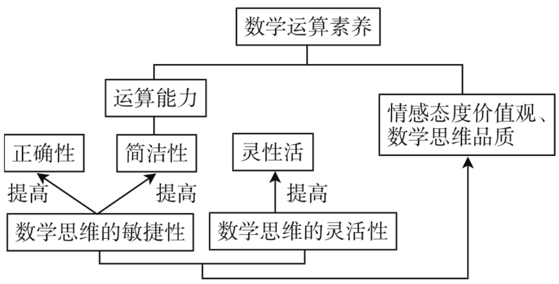

图3

5 如何从数学思维的敏捷性与灵活性入手培养数学运算素养

前面剖析了数学思维的敏捷性、灵活性与数学运算素养之间的关系,我们知道可以从发展学生数学思维品质的敏捷性与灵活性出发去培养学生的数学运算素养,那么在数学教学中教师要如何做才能使学生数学思维的敏捷性和灵活性得到发展从而使数学运算素养水平随之提高?我们试做如下探讨.

5.1 回归根本,重视基础知识的扎实性

数学基础知识与基本技能是数学核心素养生成的本原,应成为数学核心素养体系中的重要组成部分,数学核心素养中的思维品质也需要以扎实的基础知识为载体.如果缺少基础知识的支撑,学生的数学思维就很难具备敏捷性和灵活性,数学运算素养自然也谈不上提高.

如何使学生具备扎实的数学基础知识?首先,对于一些基本、重要的数学定义、定理、图形等,要使学生烂熟于心.例如代数中的乘法公式、基本不等式,几何中的基本图形、向量基本定理、三角恒等变换公式等等.其次,在教学中教师要重视知识的发生和发展过程,包括概念、法则的提出过程,数学结论的形成过程,数学思想方法的提炼及概括过程.建构主义认为,学习是学习者主动建构知识的过程,而不是被动接受,如果教学中只强调最后结果而忽视过程,学生就会“知其然而不知其所以然”,基础知识不扎实,也就不利于思维的发展和素养的培育.知识的发生和发展过程在数学教学中可以体现为下面四个阶段(如图4),现在以高中数列的概念为例,对教学过程进行设计.

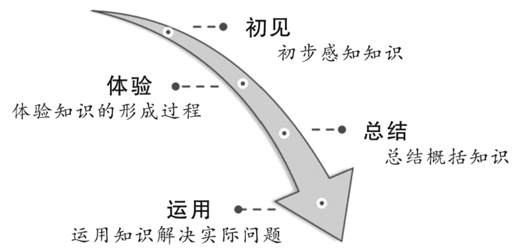

图4

教学环节1:初见.

师:同学们,今天我们一起来学习一下“数列”,看到“数列”这两个字,你们有什么想法,如何从字面上去理解?

教学环节2:体验.

情境1:从前有位宰相发明了64格象棋,国王很高兴问他想要什么奖赏,宰相说想要在象棋的第一格放一粒麦子,第二格放两粒,第三格放四粒,第四格放八粒,直到把所有的格子都放满.

情境2:今有蒲生一日,长三尺,莞生一日,长一尺,蒲生日自半,莞生日自倍,问几何日而长等?(《九章算术》)

情境3:哈雷彗星回归的时间分别为1531年、1607年、1682年、1758年、1834年、1910年、1986年.

在教师的引导下,学生概括出上面几组数的共同规律:都是一列数、都具有一定的次序.

教学环节3:总结.

教师给出数列的概念:按一定次序排列起来的一列数叫作数列,用数学符号表示为 a_1,a_2,a_3,……,a_n,……,简记为$\{a_n\}$.

教学环节4:应用.

判断正误:(1)数列2,3,4和4,3,2是同一数列.

(2)1,4,20,3不是数列.

实际教学中,很多老师会觉得数列的概念简单,不需要讲解,加上高中学业任务重,通常会直接给出

数列的概念,这样做无疑剥夺了学生对于数学知识形成过程的体验,“地基”不稳,后续知识的学习也不会顺利,只有让学生经历探索过程,学到的知识才是扎实的.

5.2 孕育素养,把握思想方法的实质性

为了能使数学思维具有敏捷性和灵活性从而推动数学运算素养的养成,要让学生掌握一些基本的数学思想方法,如一题多解、正难则反、数形结合等,一题多解就是从不同的角度分析问题,用不同的方法求解;正难则反是指当从正面去思考问题遇到阻碍时,可通过逆向思维,从问题的反面出发,逆向地应用某些知识去解决问题;数形结合思想是数学中的一个重要思想,是通过数和形之间的对应关系和相互转化来解决问题的思想方法.下面以一题多解为例,说明数学思想方法在提高思维敏捷性与灵活性上的功能.

例1 已知 $x,y\in\mathbf{R}$,满足 $x>0,y<0,\frac{1}{x}+\frac{2}{y}=1$,求 x,y 的最小值.

法1:基本不等式.

因为 $x>0,y>0$,所以 $\frac{2}{x}+\frac{3}{y}\geqslant 2\sqrt{\frac{6}{xy}}$,即 $2\sqrt{\frac{6}{xy}}\leqslant 1$,解得 $xy\geqslant 24$.当且仅当 $x=4,y=6$ 时取到等号,所以 xy 的最小值是24.

评析:这是学生最容易想到的一种方法,直接运用基本不等式,然后化简就能得出答案.

法2:巧用“1”.

因为 $x>0,y>0,\frac{2}{x}+\frac{3}{y}=1$,所以 $xy=\left(\frac{2}{x}+\frac{3}{y}\right)xy=2y+3x\geqslant 2\sqrt{6xy}$.

解得 $xy\geqslant 24$,当且仅当 $x=4,y=6$ 时取到等号,所以 xy 的最小值是24.

评析:巧妙运用“1”进行代换,将 $\frac{2}{x}+\frac{3}{y}=1$ 左右两边同乘 xy 进行处理,得到一个关于 xy 的不等式.

法3:三角变换.

令 $\frac{2}{x}=\cos^2\alpha,\frac{3}{y}=\sin^2\alpha$,所以,$x=\frac{2}{\cos^2\alpha},y=\frac{3}{\sin^2\alpha}$,所以,$xy=\frac{6}{\cos^2\alpha\sin^2\alpha}=\frac{24}{\sin^2 2\alpha}\geqslant 24$.当且仅当 $\sin^2 2\alpha=1$,即 $x=4,y=6$ 时取到等号,所以 xy 的最小值是24.

评析:用同角三角函数的平方关系完成三角代换,学生思维得到发散的同时,思维的灵活性、敏捷性也可以得到提高.

法4:构造函数.

因为 $x>0,y>0,\frac{2}{x}+\frac{3}{y}=1$,所以 $y=\frac{3-x}{x-2}>0$,显然 $x>2$,故 $xy=\frac{3x^2}{x-2}$.构造函数 $f(x)=\frac{3x^2}{x-2}(x>2)$,则 $f'(x)=\frac{3x(x-4)}{x-2}$,令 $f'(x)=0$,得 $x=4$,所以,当 $x\in(2,4)$ 时,$f'(x)<0$,此时 $f(x)$ 单调递减;$x\in(4,+\infty)$ 时,$f'(x)>0$,$f(x)$ 单调递增,所以 $f(x)_{\min}=f(4)=24$.

评析:这个方法是学生很难想到的,先构造函数,化二元为一元,再把不等式问题转化为用导数求函数的最值问题,促进了知识的迁移.

上面的例题讲评过程就充分体现了一题多解的教学功能,前两种解法可以夯实学生关于“不等式”的基础知识,后两种解法突破了思维定式,拓展了学生的思维空间.这一过程中,学生对一个数学问题从多个角度、不同的方面去思考,得出多种解题方法,思维的灵活性就会提高;通过对不同方法的比较、分析,从中总结出一个最简洁、快速的方法,思维的敏捷性就得到了提高.

5.3 思维导航,关注元认知能力的监控性

元认知简单来讲就是对“认知的认知”.数学元认知是对数学思维、数学认知过程的认知,所以元认知和数学思维品质有着密不可分的关系.元认知被视作数学思维的内在组织形式,因为它对数学思维活动有着积极的监控、调节作用,从而使主体能迅速达到预期的目标;数学思维品质可以看作数学思维的外在表现形式,我们知道,思维有快慢、深浅、灵活和呆板之分,这都是思维品质的表现,造成这些差异的原因归根结底还是由于思维内在组织形式(元认知)的差异,所以,在教学中我们应该关注到学生的元认知能力,用元认知为思维导航,激发学生数学思维品质的敏捷性、灵活性,提高学生的数学运算素养.波利亚的“怎样解题表”给出了解题的四个步骤(如图4),通过一系列的问题串,引导学生自我提问、自我监控、自我反思,就可以在很大程度上提升学生的元认知能力.下面就举例说明,教师应该如何根据波利亚的解题思想进行习题教学.

理解题目 → 拟定方案 → 执行方案 → 回顾

图5

例2 已知奇函数 $f(x)$ 在 $(-\infty,0)$ 上为减函数,且 $f(3)=0$,则不等式 $(x-1)f(x-1)<0$ 的解集

是？

第一步：理解题目．

已知条件是什么？你之前是否遇到过类似题？

第二步：拟定方案．

问题1：你有什么想法？想怎么做？

问题2：能不能根据已知条件画出函数图象？

问题3：观察图象，你发现了什么？可不可以求出$xf(x)<0$的解集？

问题4：接下来会求了吗？试着做一下！

评析：学生可能之前没见过$(x-1)f(x-1)<0$这种形式，所以在拟定方案这一阶段会陷入瓶颈，这时候教师就要给学生提供一个“支架”，通过一系列问题串，引导学生自我反思、自我监控，找到解题的正确思路．

第三步：执行计划．

当$x>0$时，$f(x)<0$，所以$x>3$；

当$x<0$时，$f(x)>0$，所以$x<-3$．

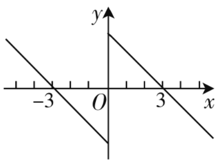

图6

所以$xf(x)<0$的解为：$x<-3$或$x>-3$；

所以$(x-1)f(x-1)<0$的解为：$x<-2$或$x>4$．

综上，$(x-1)f(x-1)<0$的解集为：$\{x \mid x<-2$或$x>4\}$．

第四步：回顾．

这道题用了什么数学思想？你能把这种方法推广到其他问题中吗？

评析：这道题用到的主要数学思想方法就是数形结合，通过最后的回顾，让学生认识到数学方法的巧妙，还能引导学生把数形结合思想迁移到其他问题情境中．

目前，关于数学思维和数学核心素养的文章比较多，但是把数学思维品质与数学核心素养结合起来的却比较少．上文论述了数学思维品质与数学核心素养的关系，提出了从思维的敏捷性与灵活性出发，培养数学运算素养的具体措施．我们提倡在教学中关注到学生的数学思维品质，传授给学生扎实的数学知识、引导学生掌握数学思想方法、培养学生的元认知能力，使学生获得思维的敏捷性和灵活性，数学运算素养也将会得到培养．F

（上接第10页）

问题二：设函数$f(x)=e^{t(x-1)}(t>0)$．求证：$f(x)\geqslant t\ln x$．

问题三：已知函数$f(x)=e^{x-a}-\ln x$．求证：当$a\leqslant 2$时，$f(x)>0$．

设计意图：以上问题二、问题三的求解利用了常见不等式，采用“导数几何意义”的求解思路相对于常规解法显得要便捷多了，这正是“导数几何意义”的巧妙之处．当然，在运用这些常见不等式（如$e^x\geqslant x+1$，$x-1\geqslant\ln x(x>0)$，$x\leqslant\sin x(x\geqslant 0)$，$x\leqslant\tan x\left(0\leqslant x<\frac{\pi}{2}\right)$）时要先证明，再用来解决具体的实践问题．

问题四：已知函数$f(x)=2x^3-3x$，若过点$P(1,t)$存在3条直线与曲线$y=f(x)$相切，求t的取值范围．

设计意图：以上基于一体化视域的整体设计思路，也正好契合了诺曼·韦伯的DOK理论，通过概念与技能、策略性思维、延展性思维再到回忆与再现，让学生回归到“导数几何意义”的主要应用上，求此类问题通常要准确理解三个方面：切点在曲线上、切点在切线上和切点处函数的导数值为切线的斜率．让学生体验从基本应用、能力提升和思维拓展，再到对概念的深入理解，形成一个一体化、整体化和系统化螺旋上升的思辨过程．笔者认为，这样的整体设计思路也是契合“学习罗盘2030”中强调教师要帮助学生实现“在陌生环境中的自定航向”．

一体化视域下高中数学单元教学是“学习罗盘2030”引领下的一个变革能力、富有生机的课题，其整体设计充分体现了数学知识的关联性、系统性和结构性，也体现了数学教学的创新性和学生认知的建构性．要让单元教学更好地助力发展核心素养，笔者认为，还需从以下三个方面开展后续研究：一是做好宏观建构微观把握的思想准备，明白整体设计的价值和意义；二是做好教学活动和科学研究的有效结合，对相应理论和教学实践提炼更有效的教学范式；三是做好师生实际与现有资源的优化融合，把“单元教学”作为“幸福育人”的一种理念和追求．F