基于“自治自动”的数学教学实践与思考
——以“解三角形复习课”为例*

戚有建 (江苏省扬州中学 225009)

摘 要:“人格健全,自治自动”是扬州中学沿承百年的教育主张.文章以一节公开课“解三角形复习课”为例,谈如何继承和发扬“自治自动”的教育主张,如何将“自治自动”的教育主张与数学教学融合起来.

关键词:自治自动;解三角形;教学实践

文章编号:1004-1176(2022)02-0022-02

1 问题提出

上世纪二十年代,美国著名教育学家、心理学家杜威首先提出了“自治自动”教育思想,并于1919—1921年间来华访问和讲学.受杜威先生影响,陶行知、朱自清成为“自治自动”教育思想的积极传播者和实践者.陶行知先生撰文《学生自治问题之研究》对“自治自动”进行阐述:学生自己管理自己,自我评价,自己发挥主观能动,实现自我成长.朱自清先生的教育理念集中体现在他给母校扬州中学谱写的校歌中:“人格健全,学术健全,相期自治与自动,欲求身手试英豪,体育须兼重.”“人格健全,自治自动”也成了扬州中学沿承百年的教育主张.作为扬州中学的一名教师,笔者也在努力继承和发扬这一教育主张,并且将其与数学教学融合起来,充分发挥学生的主体作用,促进学生数学思维的提升,逐步实现用数学的眼光观察世界,用数学的方法研究世界,用数学的语言表达世界.

为了践行“自治自动”,笔者以“解三角形复习课”为题上了一节公开课,授课对象是扬州中学高一理科重点班的学生,他们基础扎实、思维敏捷、积极性高,有较强的合作精神和探究能力.本节课的设计定位是“问题由学生提、思路由学生想、方法由学生说、反思由学生悟”.新颖的教学设计、丰富的数学活动,催生了精彩的数学课堂,取得了良好的教学效果,受到听课教师们的一致好评.

2 教学案例

2.1 基本构想

解三角形是由已知的边角确定未知边角元素的过程.而正、余弦定理的作用就是将边角间的关系数量化,从而构建方程(或方程组),因此方程思想是解三角形的关键.如果已知的方程个数比未知的边角元素个数少,这样就变成不确定三角形,此时就可以研究三角形中的最值(范围)问题.

2.2 教学过程

(1) 学生自治自动提出问题

情境 三角形的6个元素(3条边和3个角)中知道几个就能解三角形?有哪些类型?

意图 此情境帮助学生回忆正、余弦定理的内容,思考正、余弦定理的作用及解三角形的几种常见类型.

问题 在$\triangle ABC$中,已知$b=7,B=60^\circ$,______,求______.(请填一个条件,然后解答问题)

意图 以开放题的形式呈现,让学生自己填写条件解答问题,可以激发学生兴趣,启发学生思考,让学生学会自己提出问题,从而实现自治自动,提升数学思维.

教学中,学生首先想到的是下面两种方案:给角求边、给边求角.学生根据这两种方案很容易编题,例如下面的题目1、题目2.

题目1 (给角求边)在$\triangle ABC$中,已知$b=7$,$B=60^\circ,\sin A=\dfrac{3}{7}$,求$a$.(答案:$2\sqrt{3}$)

题目2 (给边求角)在$\triangle ABC$中,已知$b=7$,$B=60^\circ,a=8$,求$\sin A$.$\left(\text{答案:}\dfrac{4\sqrt{3}}{7}\right)$

(2) 学生自治自动分析问题

追问 比较题目1和题目2,哪个问题值得进一步研究(哪个问题复杂点)?为什么?

意图 启发学生进一步深入思考,体会这两类问题的差异,虽然都是用正弦定理处理,但是题目2中三角形可能会有两解.此时学生很自然地会想到编写这方面的题目,例如下面的题目3、题目4.

*本文系江苏省十三期教研课题“指向数学思维的高中‘自治自动’教学研究”(编号:2019JK13-L319)的阶段性研究成果.

题目3 （判断三角形有几个解）在$\triangle ABC$中，已知$b=7$,$B=60°$,$a=8$,判断$\triangle ABC$有几个解？（答案:2个解）

题目4 （判断三角形有几个解）在$\triangle ABC$中，已知$b=7$,$B=60°$,$a=5$,判断$\triangle ABC$有几个解？（答案:1个解）

教学中还有学生想到了给边求边，例如：

题目5 （给边求边）在$\triangle ABC$中，已知$b=7$,$B=60°$,$a=8$,求c.（答案:3或5）

解析 本题可以用正弦定理处理，也可以用余弦定理处理，可启发学生体会其中的差异.实际上用余弦定理简单，因为它将原问题转化为二次方程问题，如果用正弦定理，则转化为三角方程问题，而且解题步骤会多一些.

教学中，还有学生想到了给面积求周长，或者给周长求面积，例如下面的题目6、题目7.

题目6 （给面积求周长）在$\triangle ABC$中，已知$b=7$,$B=60°$,$S=\frac{17\sqrt{3}}{4}$,求$\triangle ABC$的周长.（答案:17）

题目7 （给周长求面积）在$\triangle ABC$中，已知$b=7$,$B=60°$，周长为17，求$\triangle ABC$的面积.$\left(答案:\frac{17\sqrt{3}}{4}\right)$

解析 题目6、题目7旨在帮助学生体会正余弦定理的作用是将边角间的关系数量化，从而构建方程（或方程组），而在具体处理方程时可以一解到底，也可整体处理、设而不求.

(3) 学生自治自动解决问题

学生的主动性被激活了之后就愿意思考、乐于思考.以上面的题目3为例，在“有几个解”这个重难点上，学生经过思考想到了很多好的解法：

解法1 （交轨法）先作$\angle B=60°$,然后在一条边上取$BC=8$,再以C为顶点、7为半径画圆（图1），因为圆与$\angle B$的另一条边有两个交点，所以$\triangle ABC$有2个解.

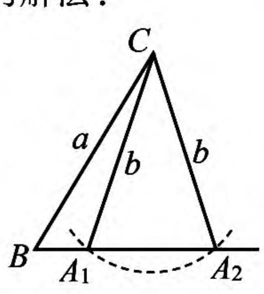

图1

解法2 （估算法）由$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}$得$\sin A=\frac{4\sqrt{3}}{7}$.当$A$为锐角时，$A\in\left(\frac{\pi}{3},\frac{\pi}{2}\right)$，符合要求；当$A$为钝角时，$A\in\left(\frac{\pi}{2},\frac{2\pi}{3}\right)$，符合要求.所以$\triangle ABC$有2个解.

解法3 （余弦定理法）在$\triangle ABC$中，由余弦定理得$c^2-8c+15=0$,解得$c=3$或$c=5$,所以$\triangle ABC$有2个解.

(4) 学生进一步提出问题

如果已知的方程个数比未知的边角元素个数少，则三角形不确定，此时就可以研究三角形中的最值（范围）问题.例如下面的题目8、题目9.

题目8 在$\triangle ABC$中，已知$b=7$,$B=60°$,求$S_{\triangle ABC}$的最大值.$\left(答案:\frac{49\sqrt{3}}{4}\right)$

题目9 在$\triangle ABC$中，已知$b=7$,$B=60°$,求$\triangle ABC$周长的最大值.（答案:21）

题目9实际上可以归结为题目8，题目8的处理方法很多.

解法1 构建基本不等式求最值

$S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}ac\cdot\sin B=\frac{\sqrt{3}}{4}ac$,由余弦定理得$a^2+c^2-ac=49$,又由基本不等式得$49=a^2+c^2-ac\geqslant ac$,故$ac\leqslant 49$,所以$S_{\triangle ABC}=\frac{\sqrt{3}}{4}ac\leqslant\frac{49\sqrt{3}}{4}$（当且仅当$a=c=7$时取等号），所以$S_{\triangle ABC}$的最大值为$\frac{49\sqrt{3}}{4}$.

解法2 构建目标函数（三角函数）求最值

由正弦定理得$\frac{a}{\sin A}=\frac{c}{\sin C}=\frac{14}{\sqrt{3}}$，故$a=\frac{14}{\sqrt{3}}\sin A$,$c=\frac{14}{\sqrt{3}}\sin C$,所以$S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}ac\cdot\sin B=\frac{49\sqrt{3}}{3}\sin A\sin C=\frac{49\sqrt{3}}{6}\left[\sin\left(2A-\frac{\pi}{6}\right)+\frac{1}{2}\right]$,所以当$A=\frac{\pi}{3}$时，$S_{\triangle ABC}$的最大值为$\frac{49\sqrt{3}}{4}$.

解法3 借助轨迹求最值

由于$b=7$,$B=60°$,所以动点B的轨迹为一段优弧，移动点B不难发现，当$\triangle ABC$的高最大时，对应面积最大，此时$\triangle ABC$是等边三角形，所以$S_{\triangle ABC}$的最大值为$\frac{49\sqrt{3}}{4}$.

3 教学思考

3.1 “自治自动”是践行课标理念的有效途径

新课标强调，教师要更新教育观念，改变教学方式，让学生由被动学习转变为主动学习，由被动接受者转变为主动建构者.而自治自动的教育主张可以充分发挥学生的主体性，帮助学生自己主动发现问题、分析问题、解决问题，并且能及时地对自己的思维过程进行自我调控.自治自动可以促进高中数学教师教学方式和教学理念的转变，实现教学策略的

新版教材体系下独立事件的再认识

吴明德 （江苏省泰兴市第一高级中学 225400）

摘 要:新版苏教版高中数学教材将相互独立事件移到了条件概率之前.面对新变化的应对措施是增加实例强化感性认识,突出独立事件的概率等式的判断效用,加深概念的理解;通过探讨事件的独立性具有相互性,凸显直接用积事件的概率来定义独立事件的优势;透过条件概率看独立事件,给出并灵活运用判断独立事件的多种方法.

关键词:独立事件;相互独立;条件概率;高中数学

文章编号:1004-1176(2022)02-0024-02

新版苏教版高中数学教材先讲独立事件后讲条件概率,改变了旧教材中演绎推理给出定义的方式,在逻辑上是不顺的;改用举例归纳的方法给出独立事件的定义,学生不易理解和掌握,在教学上是有挑战的.这些改变,需要我们认真应对.

1 多举实例增加感性认识

苏教版新教材必修 2 中通过具体事例这样给出随机事件 A 与 B 相互独立的定义:对于两个随机事件 A 与 B,如果 $P(AB)=P(A)P(B)$,那么称事件 A,B 为相互独立事件.人教版由积事件的概率给出定义,侧重于事件的相互独立性是特殊的事件关系,抽象程度高;苏教版则降低抽象度,增加了一种直观判断方法,即分别计算事件 A 发生、不发生时事件 B 的概率,若相等就独立,若不相等就不独立.

需要指出的是,既然事件的独立性是概率下的等式判断,因而这种独立性更准确的名称应该是"概率独立性",不能把事件间没有影响或事件的结果没有影响等同于概率没有影响.凭生活经验,学生可以判断一些简单事件的独立性,在直观理解无法判断事件的独立性时,定义中的概率等式就需担当大任了,相对于定义的等式判断,直觉判断的有效性显然是很弱的,有时甚至是错误的.

总体来说,将独立事件提到条件概率之前讲授,由于缺少表象的支撑,直观感知少,学生的可接受程度相对较低.我们专门做过调查,在 2 512 名四星级高中高一学生中,表示自己完全认可独立性定义、感觉自己深刻理解概念的人不足 50%,在 2 371 名普通高中高一学生中这一比例更低,只有 29%.相较而言,定义的必要性好理解一些,而定义的充分性则不太容易接受.

反思教学过程,我们不能因循守旧,只抱怨教材的改变,更不应期望等学习了条件概率后串联起新旧知识,化解学生的困惑.正确的做法是要重视相互独立事件的概念教学,适当增加实例情境让学生加深感受,突出独立事件的概率等式,加深概念的理解.

2 对"事件的独立性具有相互性"的解读

首先,由独立性的定义,显然可得到 A 与 B 独立,即为 B 与 A 独立.下面,我们从条件概率的角度

改进,从而促进高中生数学学习方式的转变,实现数学思维能力的提升.

3.2 要努力培养学生发现问题和提出问题的能力

新课标中明确提出了"四基"和"四能"两大课程目标,"四能"具体是指提高学生从数学角度发现和提出问题的能力、分析和解决问题的能力.爱因斯坦曾指出:"发现一个问题往往比解决一个问题更重要,因为提出新问题,需要创造性的想象力".顾明远教授说:"新世纪的教育要求学生独立思考,敢想敢做,勇于创新,不能提出问题的学生不是一个好的学生".可见,发现问题和提出问题是创新的开始.教学中,教师可以从问题的联想和类比、问题的延伸和推广等方面启发学生去发现问题和提出问题.

3.3 要让学生经历探究的过程,体验过程的艰辛

教学方式、学习方式的转变是新课标的本质要求,新课标倡导通过各种形式的数学活动,让学生亲身体验数学知识的发生、发展和形成过程.波利亚说过"学习任何知识的最佳途径都是由自己去发现,因为这种发现理解最深刻,也最容易掌握其内在规律".现在的学生都是在"顺利"中长大的,生活中缺乏挫折和磨练,而通过一些"不顺利"的数学探究之路,可以让学生对探究历程的艰辛有深刻的认识,对科学道路的曲折有深刻的理解,同时也能培养学生坚强的毅力与不服输的精神.