



借助高考真题,落实探究意识

● 江苏省宜兴第一中学 陈寅文

历年的高考数学试题,都是我们平时数学教学与数学学习的一个极佳媒介.高考数学真题,往往立意新颖,内涵丰富,思想典型,科学创新,交汇融合,极具教学、学习、观摩、探究等多层面的价值,值得我们好好深入分析与探究.借助高考真题,合理渗透与落实探究意识,深入学习,有效提升思维的深度与广度,实现数学能力立意,合理培养学生敏锐的洞察力、系统的知识转化能力、灵活的思维能力、严密的逻辑推理能力以及自觉应用数学相关知识解决现实生活问题的能力等.

1 类比性探究

类比性探究是结合高考真题加以初步探究,从问题条件中的一个知识层面类比延展到另一个知识层面,初步形成举一反三的数学知识与数学能力的应用,形成灵活熟练的数学思想与数学能力.

例 1 (2020 年高考数学新高考 I 卷(山东卷)第 8 题)若定义在 $\mathbf{R}$ 的奇函数 $f(x)$ 在 $(-\infty, 0)$ 上单调递减,且 $f(2)=0$,则满足 $xf(x-1) \geq 0$ 的 x 的取值范围是().

- A. $[-1, 1] \cup [3, +\infty)$ B. $[-3, -1] \cup [0, 1]$
C. $[-1, 0] \cup [1, +\infty)$ D. $[-1, 0] \cup [1, 3]$

解析: 根据题意条件,作出满足条件的函数 $y=f(x)$ 的草图,如图 1 中的实线部分,那么函数 $y=f(x-1)$ 的

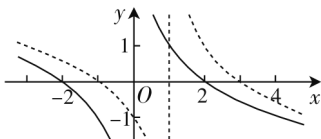


图 1

的图象是由函数 $y=f(x)$ 的图象向右平移 1 个单位长度得到的(如图 1 中的虚线部分),数形结合,可知满足 $xf(x-1) \geq 0$ 的 x 的取值范围是 $[-1, 0] \cup [1, 3]$. 故选 D.

点评: 根据题目条件作出抽象函数的草图,数形结合,借助抽象函数图象的平移变换,进而结合图形的直观来直接确定抽象不等式的解集问题.抓住本质,合理平移,巧妙转化,直观破解.平移法也是破解此类问题中效益极佳的一种方法,为问题的进一步类比性探究奠定基础.

探究 1: 若偶函数 $f(x)$ 在 $(-\infty, 0]$ 单调递减,且 $f(2)=0$,则满足 $xf(x-1) > 0$ 的 x 的取值范围是().

- A. $(-1, 0) \cup (3, +\infty)$ B. $(-\infty, -1) \cup (0, 1)$
C. $(-1, 0) \cup (1, +\infty)$ D. $(-\infty, 0) \cup (1, 3)$

解析: 根据题目条件,作出满足条件的函数 $y=f(x)$ 的草图,如图 2 中的实线部分,那么函数 $y=f(x-1)$ 的图象是由函数 $y=f(x)$ 的图象向右平移 1 个单位长度得到的(如图 2 中的虚线部分),数形结合,可知满足 $xf(x-1) > 0$ 的 x 的取值范围是 $(-1, 0) \cup (3, +\infty)$. 故选 A.

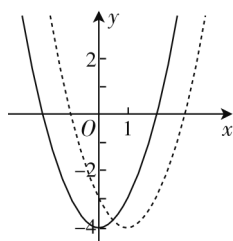


图 2

点评: 通过改变原来抽象函数的奇偶性进行类比性探究,在此背景下求解抽象不等式的解集,考查的数学知识与数学能力与原来高考真题相差无几,难度也基本相当,都是通过平移法来处理问题的进一步尝试与综合.类比性探究经常用于数学运算、函数的基本性质、数列的不同类型、圆锥曲线的不同曲线等加以类比与延展.

2 拓展性探究

拓展性探究是结合高考真题加以探究,从特殊到一般,从基础到深奥,从点到面,符合我们学习、认知与思维的一般性过程.通过拓展性探究,可以有效加深数学知识的理解与掌握层次,合理形成数学思维与数学能力.

例 2 (2020 年高考数学浙江卷第 11 题)我国古代数学家杨辉、朱世杰等研究过高阶等差数列的求和问题,如数列 $\left\{ \frac{n(n+1)}{2} \right\}$ 就是二阶等差数列.数列 $\left\{ \frac{n(n+1)}{2} \right\} (n \in \mathbf{N}^*)$ 的前 3 项和是_____.

解析: 由题可知, $S_3 = a_1 + a_2 + a_3 = 1 + 3 + 6 = 10$. 故填答案:10.

点评: 该题以数学文化并结合数列知识为背景,

通过给出数列的通项公式来确定相应的求和问题,以简单题作为填空题的第一题,比较简单.进一步加以深入探究,深入数学知识与数学能力的层面,可以有不少的收获.

探究2:我国古代数学家杨辉、朱世杰等研究过高阶等差数列的求和问题,如数列 $\left\{\frac{n(n+1)}{2}\right\}$ 就是二阶等差数列.数列 $\left\{\frac{n(n+1)}{2}\right\}$ ($n \in \mathbf{N}^*$)的前 n 项和是_____.

解析:由于 $a_n = \frac{n(n+1)}{2} = \frac{1}{6}[n(n+1)(n+2) - (n-1)n(n+1)]$, 可得 $S_n = \frac{1}{6}\{(1 \times 2 \times 3 - 0 \times 1 \times 2) + (2 \times 3 \times 4 - 1 \times 2 \times 3) + (3 \times 4 \times 5 - 2 \times 3 \times 4) + \cdots + [n(n+1)(n+2) - (n-1)n(n+1)]\} = \frac{1}{6}[n(n+1)(n+2) - 0 \times 1 \times 2] = \frac{1}{6}n(n+1)(n+2)$.

故填答案: $\frac{1}{6}n(n+1)(n+2)$.

点评:根据以上探究问题,当 $n=3$ 时, $S_3 = \frac{1}{6} \times 3 \times (3+1) \times (3+2) = 10$, 与原高考真题的答案吻合.其实,通过对应数列中的通项公式进行裂项处理,转化为相应的连续三个自然数的积的差式,进而结合求和公式进行裂项相消法处理.破解的关键是根据数列的通项公式的特征,固定 $n(n+1)$, 利用 $n(n+1) = \frac{1}{3}n(n+1)(n+2) - \frac{1}{3}(n-1)n(n+1)$ 进行作差裂项.

3 规律性探究

规律性探究是结合高考真题加以系统化探究,从一般性问题中归纳出规律性的结论,从而为问题的进一步学习与研究提供条件,提升知识的交汇与综合能力.通过规律性探究,可以有效融合数学知识的理解与掌握,高效形成数学思维与数学能力.

例3 (2020年高考数学全国卷I理科第20题,文科第21题)已知 A, B 分别为椭圆 $E: \frac{x^2}{a^2} + y^2 = 1$ ($a > 1$) 的左、右顶点, G 为 E 的上顶点, $\overrightarrow{AG} \cdot \overrightarrow{GB} = 8$, P 为直线 $x=6$ 上的动点, PA 与 E 的另一交点为 C , PB 与 E 的另一交点为 D .

(1) 求 E 的方程;

(2) 证明: 直线 CD 过定点.

解析: (1) 由题设得 $A(-a, 0), B(a, 0), G(0, 1)$,

则 $\overrightarrow{AG} = (a, 1), \overrightarrow{GB} = (a, -1)$.

由 $\overrightarrow{AG} \cdot \overrightarrow{GB} = 8$, 得 $a^2 - 1 = 8$, 即 $a = 3$.

所以椭圆 E 的方程为 $\frac{x^2}{9} + y^2 = 1$.

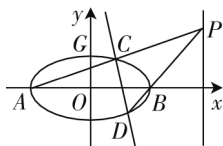


图3

(2) 证明: 设直线 AC 的方程为 $x = k_1 y - 3$, 直线 BD 的方程为 $x = k_2 y + 3$, 直线 CD 的方程为 $x = m y + n$, 直线 AB 的方程为 $y = 0$, 那么以 A, C, B, D 四点构成的曲线系方程为 $(x - k_1 y + 3)(x - k_2 y - 3) + \lambda y(x - m y - n) = \mu \left(\frac{x^2}{9} + y^2 - 1 \right)$, 比较关系式两边的系数, 知 $x y$ 项的系数 $-k_1 - k_2 + \lambda = 0$, y 项的系数 $3k_1 - 3k_2 - \lambda n = 0$, 联立以上两式, 可得 $\begin{cases} k_1 + k_2 = \lambda, \\ k_1 - k_2 = \frac{\lambda n}{3}, \end{cases}$ 联立 $\begin{cases} x = k_1 y - 3, \\ x = k_2 y + 3, \end{cases}$ 可得 $x = \frac{3(k_1 + k_2)}{k_1 - k_2} = \frac{9}{n} = 6$, 解得 $n = \frac{3}{2}$. 故直线 CD 过定点 $\left(\frac{3}{2}, 0 \right)$.

点评:此题以平面直角坐标系中相关的点、直线、椭圆为问题背景, 结合平面向量的数量积关系式来确定对应的椭圆方程, 在此基础上, 借助定直线上的动点的“动”、产生的新直线的“动”、以及动直线所过定点的“静”这一系列的动静结合的元素, 来构造一幅完美和谐、辩证统一的美妙“画卷”. 进而通过规律性探究, 得到一般性问题的相关结论.

结论: 已知 A, B 分别为椭圆 $E: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ ($a > b > 0$) 的左、右顶点, P 为直线 $x = \lambda a$ ($\lambda > 1$) 上的动点, PA 与 E 的另一交点为 C , PB 与 E 的另一交点为 D . 则直线 CD 过定点 $\left(\frac{a}{\lambda}, 0 \right)$.

点评:以上结论的证明可参照以上高考真题的破解加以证明, 这里不再加以叙述. 在高考真题中, $a = 3, \lambda = 2$, 则知直线 CD 过定点 $\left(\frac{3}{2}, 0 \right)$.

一些典型的高考真题, 是数学教材与数学知识的进一步挖掘、融合与拓展, 合理渗透与落实探究意识, 可以充分把数学知识、数学思想与数学能力等加以融合与提升, 举一反三, 融会贯通, 有效考查学生的数学知识与数学能力, 培养学生优良的数学品质, 培育学生良好的人文精神, 启迪学生丰富的数学思想, 进而塑造数学情境, 拓展创新能力与思维能力, 开启充满数学智慧与数学应用的精彩人生. **F**