

编者按:为密切编辑部与中学的联系,本刊编委第26次“走进课堂”,于2021年10月20日赴常州市第五中学听课交流.常州市第五中学创办于1906年,2000年通过国家级示范性普通高中省级验收,2008年被评为江苏省四星级高中.学校历百余年变迁,始终与时代共命运、与社会同呼吸,始终秉承“诚敬”校训,始终铭记“培植地方青年、养成有用人才,服务社会,担任复兴国家重任”的办学传统,积极践行“诚敬知行 悦美臻善”的办学理念和“综合发展、文理兼修、艺术见长”的发展策略,努力“为现在创造富有意义的校园生活,为未来创造丰富多元的美好可能”.

基于教材,扎根课堂,发展学生的思维能力 ——“双曲线及其标准方程”课堂实录与反思

冯 刚 (江苏省奔牛高级中学 213131 江苏省高中数学名师工作室 213001)



文章编号:1004-1176(2022)02-0042-04

作者简介:冯刚,江苏省奔牛高级中学教研组长,常州市中学数学学科带头人.2010年获江苏省中学数学青年教师基本功大赛二等奖,2017年课例“圆与圆的位置关系”被评为教育部“一师一优课、一课一名师”活动“优课”,2021年在《江苏省名师空中课堂》指导了6节课.在省级以上刊物上发表论文十多篇.

1 学情分析

教学对象是四星级高中的高二普通班学生,基础知识、自主学习能力、运算能力和综合运用知识解决问题的能力都为中等.

2 教学内容分析

所用教材为人教A版选择性必修第二册^[1],教学内容是“3.2.1 双曲线及其标准方程”,它是在学生学习了椭圆及其标准方程、几何性质之后,继续学习的第二种圆锥曲线,也为抛物线的学习作铺垫和方法引导,因此起到了承上启下的作用.

教学目标 (1)经历双曲线轨迹的探索过程,体验双曲线的形状特征,并归纳其定义;(2)经历双曲线标准方程的推导过程,并能根据条件求标准方程,能解决一些简单的实际应用问题;(3)通过定义及标准方程的挖掘与探究,进一步体验类比、数形结合、等价转化等思想方法的运用,提高观察、归纳、探究等能力.

教学重点 理解和掌握双曲线的定义及其标准方程.

教学难点 双曲线标准方程的推导及变形化简的等价性问题.

3 过程实录

3.1 师生共同探究

在直线 l 上取两个定点 A, B , P 是直线 l 上的动点.在平面内,取两个定点 F_1, F_2 ,以点 F_1 为圆心、

线段 PA 为半径作圆,以点 F_2 为圆心、线段 PB 为半径作圆.

• 探究1 当 $F_1F_2 < AB$ 时,(1)点 P 在线段 AB 上运动时,两圆交点的轨迹是什么?(2)点 P 在线段 AB 外运动时,存在交点轨迹吗?

师:(让学生自己阅读前提和探究问题,但是反应不明显,教师给出提示)我们分析一下这个问题,交点 M 是需要研究的动点, F_1, F_2 是两个定点,结合前面所学的知识,你能猜想交点 M 的轨迹吗?

生1:我猜想是椭圆.

l A P B

师:椭圆定义中的确涉及“动点到两定点的距离”,那这里是不是椭圆呢?

生2:我发现 $MF_1 + MF_2$ 是一个定值,这个和等于 $PA + PB = AB$,而且 AB 是一个常数.

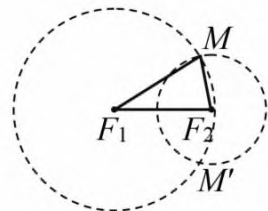


图1

师:非常棒!但你再想想满足刚才的条件就能说交点 M 的轨迹是椭圆了吗?

生3:还要满足定值 $AB > F_1F_2$.

师:这样根据椭圆的定义就可以说明交点 M 的轨迹是以 F_1, F_2 为焦点的椭圆(教师用GeoGebra动态演示,如图1).再看第(2)问.

生4:点 P 在线段 AB 外运动时,两圆半径差的绝对值为 AB ,大于圆心距 F_1F_2 ,所以两圆是内含

关系,没有交点.

• 探究2 当 $F_1F_2 > AB$ 时,(1) 点 P 在线段 AB 上运动时,存在交点轨迹吗?(2) 点 P 在线段 AB 外运动时,两圆交点的轨迹是什么?

生5:点 P 在线段 AB 上运动时,两圆半径和为 AB ,小于圆心距 F_1F_2 ,所以两圆是外离关系,没有交点.

师:(第(2)问学生不会处理,教师用 GeoGebra(下称 GGB) 动态展示,如图2) 交点 M 的轨迹是双曲线. 而

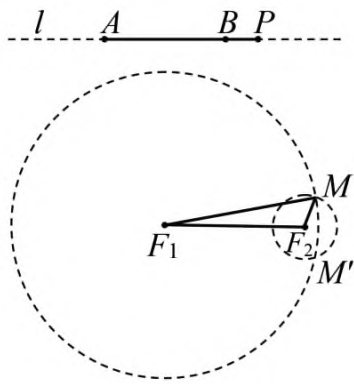


图2

且当点 P 在线段 AB 的延长线上时,交点 M 的轨迹是双曲线的右支,当点 P 在线段 BA 的延长线上时,交点 M 的轨迹是双曲线的左支. 两支合起来叫做双曲线.

师:生活中的双曲线也很常见,如电厂冷却塔、花瓶、法拉利主题公园的外轮廓线都用到了美丽的双曲线. 本节课我们的研究对象就是双曲线.

3.2 建构数学

• 研究曲线的一般过程

师:请回忆解析几何中研究曲线的一般过程.

生6:先探求曲线的定义,然后根据定义推导曲线的方程,再根据方程研究曲线的几何性质.

师:这里体现了解析几何的基本思想,利用代数方法研究几何问题.

• 双曲线的定义

师:你能借助探究2中的第(2)问给双曲线下个定义吗?

生7: $MF_1 - MF_2$ 是定值,等于 $PA - PB = AB$,且 AB 是一个常数.

生8:这只是动点 M 在双曲线的右支满足的条件,动点 M 在双曲线的左支时,应该是 $MF_2 - MF_1 = PB - PA = AB$,且 AB 是一个常数.

生9:还要满足 $AB < F_1F_2$.

师:大家说得非常好. 总的来说,双曲线的定义是“平面内与两个定点 F_1, F_2 的距离的差的绝对值等于非零常数(小于 F_1F_2) 的点的轨迹叫做双曲线”. 两个定点叫做双曲线的焦点,两焦点间的距离叫做焦距.

师:若设定义中的非零常数为 $2a(a > 0)$,则双曲线用集合的语言可以怎么表示?

生10: $P = \{M \mid |MF_1 - MF_2| = 2a, 0 < 2a < F_1F_2\}$.

• 双曲线的标准方程的推导

师:你能类比求椭圆的标准方程的过程,求出双

曲线的标准方程吗?

生11:“建设限代化”:第一步要建系,第二步设点,第三步列限制条件,第四步代入坐标,第五步化简.

师:很熟练,具体怎么操作?

生12:第一步,由于双曲线具有对称性,直线 F_1F_2 是一条对称轴,线段 F_1F_2 的中垂线也是一条对称轴,所以以直线 F_1F_2 为 x 轴,线段 F_1F_2 的中垂线为 y 轴,建立平面直角坐标系 xOy . 第二步,设 $M(x, y)$ 是双曲线上任意一点,双曲线的焦距为 $2c(c > 0)$,那么焦点 F_1, F_2 的坐标分别为 $(-c, 0), (c, 0)$. 第三步, $|MF_1 - MF_2| = 2a(0 < 2a < 2c)$. 第四步, $|\sqrt{(x+c)^2 + y^2} - \sqrt{(x-c)^2 + y^2}| = 2a$ ①. 第五步暂时没想出来.

师:大家动动手,试试看能化简吗?

(教师将大部分学生的两种化简方案投屏)

方案1 (直接平方)①式两边平方,得 $[(x+c)^2 + y^2] + [(x-c)^2 + y^2] - 2\sqrt{(x+c)^2 + y^2} \cdot \sqrt{(x-c)^2 + y^2} = 4a^2$ (投屏第一位学生的问题是根号不会处理,教师提醒观察两个中括号中式子的形式,发现可以用平方差公式,继续投屏用平方差公式的第二位学生的过程),所以 $2(x^2 + y^2 + c^2) - 2\sqrt{[(x^2 + y^2 + c^2) + 2cx][(x^2 + y^2 + c^2) - 2cx]} = 4a^2$,故 $(x^2 + y^2 + c^2) - 2a^2 = \sqrt{(x^2 + y^2 + c^2)^2 - 4c^2x^2}$ ②,再平方后整理得 $(c^2 - a^2)x^2 - a^2y^2 = a^2(c^2 - a^2)$ ③. 由双曲线定义得 $2c > 2a \Rightarrow c > a$. 类比椭圆方程的简洁化方法,令 $b^2 = c^2 - a^2(b > 0)$ (教师让学生课后尝试在 y 轴上找一点 B ,使 $OB = b$),则有 $b^2x^2 - a^2y^2 = a^2b^2$,即 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1(a > 0, b > 0)$ ④.

师:上述过程严密吗?

生13:两次平方,可能会扩大范围,导致变形不等价. 不过第一次对方程①的平方是等价的,因为方程①的左右两边都是正数. 第二次对方程②平方就不知道了.

师:方程②主要是左边式子不知道正负,那只要知道 x^2 或 y^2 的范围就可以了,哪里可以求出它们的范围呢?

生14:根据④式 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \Rightarrow \frac{x^2}{a^2} = 1 + \frac{y^2}{b^2} \geq 1 \Rightarrow x^2 \geq a^2$,所以 $(x^2 + y^2 + c^2) - 2a^2 \geq a^2 + y^2 + c^2 - 2a^2 = y^2 + (c^2 - a^2) > 0$. 那么方程②的左边就是正数,这表明方程②两边平方的变形是等价的.

方案2 (分类平方)(投屏第三位学生的推导过程)(1) 双曲线右支 $MF_1 - MF_2 = 2a$, 即

$\sqrt{(x+c)^2+y^2}=2a+\sqrt{(x-c)^2+y^2}$ ①, 所以 $cx-a^2=a\sqrt{(x-c)^2+y^2}$ ②, 两边平方后整理得 $(c^2-a^2)x^2-a^2y^2=a^2(c^2-a^2)$ ③. 令 $b^2=c^2-a^2$ ($b>0$), 则有 $b^2x^2-a^2y^2=a^2b^2$, 即 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ ($a>0, b>0$) ④.

师:分类平方的确解决了方程①两边平方的变形等价性问题,但方程②左边不知道正负啊?

生15:根据④式 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1 \Rightarrow \frac{x^2}{a^2}=1+\frac{y^2}{b^2} \geq 1 \Rightarrow x^2 \geq a^2$, 因此双曲线右支上的点满足 $x \geq a$. 那么②式的左边就是正数.

(2) 双曲线左支 $MF_2-MF_1=2a$, 即 $\sqrt{(x-c)^2+y^2}=2a+\sqrt{(x+c)^2+y^2}$ ①, 所以 $cx-a^2=a\sqrt{(x-c)^2+y^2}$ ②, 两边平方后整理得 $(c^2-a^2)x^2-a^2y^2=a^2(c^2-a^2)$ ③. 令 $b^2=c^2-a^2$ ($b>0$), 则有 $b^2x^2-a^2y^2=a^2b^2$, 即 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ ($a>0, b>0$) ④. 根据④式 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1 \Rightarrow \frac{x^2}{a^2}=1+\frac{y^2}{b^2} \geq 1 \Rightarrow x^2 \geq a^2$, 因此双曲线左支上的点满足 $x \leq -a$. 那么②式的左边就是正数, 这表明②式两边平方的变形是等价的.

师:推导双曲线左支方程还有别的方法吗?

生16:左支的方程①可以在右支的方程①中“用 $-x$ 替换 x ”得到.

生17:可以根据双曲线关于 y 轴对称, 只需在④式中用 $-x$ 替换 x .

师:根据上述推导, 双曲线上任一点 $M(x, y)$ 坐标都满足方程④; 又由于上述推导过程都是等价可逆的, 那可以说明, 以方程④的解为坐标的点都在双曲线上. 那么我们称方程④是双曲线的方程, 这里我们仍然叫做标准方程. 所以焦点在 x 轴上的双曲线的标准方程为 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ ($a>0, b>0$).

师:那焦点在 y 轴上的双曲线呢?

生18: $\sqrt{x^2+(y+c)^2}-\sqrt{x^2+(y-c)^2}=\pm 2a$, 对比焦点在 x 轴上的方程, 只需交换 x 和 y , 得到方程 $\frac{y^2}{a^2}-\frac{x^2}{b^2}=1$ ($a>0, b>0$).

生19: x 轴和 y 轴互换, 再用 $-x$ 替换 x 和用 $-y$ 替换 y , 即 $\frac{y^2}{a^2}-\frac{x^2}{b^2}=1$ ($a>0, b>0$).

师:根据双曲线的两种标准方程, 如何判断焦点

的位置?

生20:当 x^2 系数为正数时, 焦点在 x 轴上; 当 y^2 系数为正数时, 焦点在 y 轴上.

3.3 典型例题讲解

例1 已知双曲线的焦点 $F_1(-5, 0), F_2(5, 0)$, 双曲线上一点 P 到两焦点的距离差的绝对值等于6, 求双曲线的标准方程. (解答过程略)

师:求双曲线的标准方程时, 需要关注什么?

生21:先定位, 再定量.

例2 已知 A, B 两地相距800 m, 在 A 地听到炮弹爆炸声比在 B 地晚2 s, 且声速为340 m/s, 求炮弹爆炸点的轨迹方程. (解答过程略)

师:本题让我们增强了轨迹思想. 再思考一下如何准确确定点 P 的位置?

生22:可以再增加一个观测点 C , 利用 B, C 或 A, C 测得的时间差, 求出另一个双曲线的方程, 然后两方程联立方程组, 即可求得点 P 的位置.

练习 求适合下列条件的双曲线的标准方程:

(1) 焦点在 x 轴上, $a=4, b=3$; (2) 焦点在 x 轴上, 经过点 $(-\sqrt{2}, -\sqrt{3}), (\frac{\sqrt{15}}{3}, \sqrt{2})$; (3) 焦点为 $(0, -6), (0, 6)$, 且经过点 $(2, -5)$.

3.4 课堂小结(略)

4 三个版本教材中重难点处理方式的比较与分析

备课时, 参考了三个版本的教科书, 除了人教A版外, 还有人教B版^[2]以及新苏教版^[3].

4.1 双曲线情境引入方面

新苏教版从“拉链试验”引入; 人教B版从“声音时差测定”实际问题再结合“拉链试验”引入; 人教A版是利用GGB工具综合椭圆和双曲线的定义对比引入.

新苏教版从日常生活问题引入, 直观且可操作性强, 提升了学生将实际问题抽象成数学问题的转化能力, 但说明不够清晰. 比如, 学生在实验中对“两线段差为定值”的感受性较差, 再如实际操作时, 学生根本画不出完整的一支双曲线, 需要教师“强行补画”, 很是牵强, 或者教师会播放拉链视频, 硬是将“学生的真感受”变成了“虚假的视频学习”. 这些地方都是需要师生在教与学中共同思考和加工. 建议类比椭圆的引入, 仍然用一根定长细绳, 加上一个可动的闭合器, 实际操作时就可以实现画出完整的曲线. 先将这根细绳折成等长两段, 将其中一部分剪掉一段, 这样学生对“两线段差为定值”的感受性就会很强, 就是剪掉的那一部分(事实上, 人教B版中就

明确提出“将拉链截去一部分”),然后将两端点固定在画板上的两定点,再让学生把笔尖靠着可动闭合器,画出拉开或闭合时的轨迹曲线。

人教B版中的“声音时差测定位”问题虽然是双曲线的典型应用,但阅读量大,对学生的抽象能力要求太高,作为情境缺失了“浅显性”,不利于提升学生对新知的探究欲望.而这个问题结束后,又让学生做“拉链试验”,显得有点累赘了。

人教A版利用GGB工具综合椭圆和双曲线的定义对比引入的这种方式,朴实而不浮夸,不特意去寻找效果不明显和晦涩难懂的实例,而是从学生熟知的椭圆定义这个最近发展区入手,类比研究,对比分析,利用GGB作出的双曲线美观严谨,体现数学的简洁与美.而且在明确提出 $F_1F_2 > AB$ 的前提下,学生很容易发现“两线段差就是定值”即线段AB的长度.因此,这样的情境既有助于概念的产生,又有助于学生对概念本质的理解。

4.2 推导方程难点处理方面

人教A版是先去掉绝对值符号化为两根式差为 $\pm 2a$,然后类比椭圆方程的推导,将两个根式移到等式两边,最后平方;新苏教版没有具体说明如何处理绝对值和两个根式,直接就化简到最后第二步;人教B版是先去掉绝对值化为两根式差为 $\pm 2a$,然后对两根式进行“有理化”处理,转化为两根式的和,再联立两根式差的式子求解。

人教A版在定义式的化简处理上给定了讨论的方法,这样束缚了师生的“手脚”,导致思维缺乏发散性.人教B版给出了“有理化”处理根式的方法,再结合解方程组思想进行化简,思路清晰,方法明确,但这个方法学生不容易想到,没有尊重学生对绝对值处理的第一思维.新苏教版对于绝对值的处理没有指明化简的方向,教与学施展的空间非常大.事实上,多数学生在课上的第一想法是“直接平方”,这种方法并不比“讨论去绝对值之后再平方”的方法计算量大,甚至在“平方变形的等价性”问题处理上可以利用双曲线的标准方程弥补,而且“直接平方”的弥补过程也比“讨论去绝对值之后再平方”少.因此,在教材难点问题处,少一些限定,多一些空间,才能给师生的思维留足余地,让思维深入化、高阶化,才能逐步提升学生的关键能力,同时,这样的“大空间思维模式”教学也能培养出心胸宽广的人。

5 教学感悟

5.1 做负责任的教师

陈大伟认为^[4]:随时对教学行为背后的教育假设提问,能够清晰地表达教育假设的教师,是对教育

假设有过思考,对教育有过研究的教师,这样的教师是负责任的教师.本节课在引入部分,开课教师预设到如果先进行椭圆定义的回顾以及椭圆研究步骤的归纳,学生对双曲线的研究会更自然一些.开课教师也预设到了按人教A版引入对学生要求偏高,可能不利于课堂“热闹”氛围的形成.《普通高中数学课程标准(2017年版)》指出:“高中数学教学以发展学生数学学科核心素养为导向,创设合适的教学情境,启发学生思考,引导学生把握数学内容的本质,提倡独立思考、自主学习、合作交流等多种学习方式,激发学生学习数学的兴趣,养成良好的学习习惯,促进学生实践能力和创新意识的发展.”^[5]让学生自己阅读、自己分析,再到合作讨论解决情境问题,有利于提升学生的阅读理解能力、数学抽象能力.不是因为学生暂时能力不够,就选择“低层次弱思维”的情境问题,而是只有在“跳一跳够得到”的问题中,学生不断地自主分析、自我或合作解决问题,才能逐步提升核心素养。

5.2 做个具有较高教学实践水平的教师

如果一个教师将基于某些假设的教学设计用于实践,能被教学实践证明其假设具有合理性和有效性,这样的教师对教育有比较深刻的认识和理解,就是具有较高教学实践水平的教师^[4].在推导标准方程的难点处理上,开课教师也预设到如果放手让学生去尝试,可能导致一节课教学内容完不成,但如果一味地教师引导,会让学生感觉一节课下来思维能力并没有得到增长,长期以往可能会导致学生产生“躺平”心态.所以开课教师坚持“先让学生尝试,然后投屏,师生边看边思、边优化”的方式.事实上,这节课下来,不仅推导过程被投屏的这几位学生增强了自信,其他推导过程一致的学生也很有信心,就算没完成的学生也会在下一节课的问题中跃跃欲试.所以优秀的课堂需要把机会留给学生,把舞台留给学生。

5.3 让教师生活成为一种研究性的生活

陈大伟认为^[4]:教学之前有假设、教学中和教学后能不断反思和调整假设,不断提升假设水平的教师是不断成长和进步的教师,其教师生活是一种研究性的生活.吴康宁认为信息技术“进入”教学的最高类型是“融入”,旨在“创构”,包括:教学内容呈现方式的改造或重构,学习资源获取方式的改造或重构……所有这些改造或重构,都是整个教学系统改造或重构的有机组成部分,目的都在于形成一种全新教学时空,最大限度地联结学生的经验,最大限度地激发学生的兴趣,最大限度地挖掘学生的潜能,最大限度地引发学生的创造,最大限度地促使学生作

建联系显本质 理思路融文化

——“双曲线及其标准方程”的教学与反思

李 昌 (南京师范大学灌云附属中学 222200 江苏省高中数学名师工作室 213001)

作者简介:李昌,江苏省连云港市教学名师、高中数学学科带头人,连云港市优秀教育工作者、师德标兵。追求揭示本质、点拨思维、朴实高效的数学课堂。近些年在省级以上刊物上发表论文十余篇,被人大复印资料全文转载1篇。

文章编号:1004-1176(2022)02-0046-04

凸显数学本质、建立知识体系、理清运算思路、融入数学文化、发展核心素养是数学教学应有之义。实践中如何有机结合恰到好处地发挥这些功能,是一线教师不断探索的问题。本文以“江苏省高中数学名师工作室(主持人:张志勇)”研修活动为依托,回顾反思自己的一节公开课,敬请读者批评指正。

1 学情分析

授课对象是江苏省常州市第五中学高二某班学生,他们学习基础较好,已经学习了《普通高中教科书·数学(选择性必修第一册)》的前两章,能解决直线、圆以及它们的位置关系等有关问题,对解析法有初步的认识。在第三章《圆锥曲线与方程》中,他们刚学完第1节“椭圆”,能清楚地表述椭圆的概念、标准方程和几何性质,会推导椭圆标准方程。这些认知有利于“双曲线及标准方程”的教学。

2 课标解读

圆锥曲线是平面解析几何的主要内容,《普通高

中数学课程标准(2017年版)》(下称《课标2017》)指出:平面解析几何的教学,应帮助学生在平面直角坐标系中,认识圆锥曲线的几何特征,建立标准方程;运用代数方法进一步认识圆锥曲线的性质以及它们的位置关系,掌握平面解析几何解决问题的基本过程,感悟蕴含于其中的数学思想。通过圆锥曲线的教学,重点提升学生的直观想象、数学运算、数学建模、逻辑推理和数学抽象等素养。^[1]双曲线与椭圆的教学内容和研究方法相似,所以双曲线的教学应具有一定的延续性和类比性。

教学目标 (1)了解双曲线的实际背景,感受其在刻画现实世界和解决实际问题中的作用;(2)经历从具体情境中抽象双曲线概念的过程,获得双曲线的概念,提升数学抽象素养;(3)经历推导双曲线标准方程的过程,培养和提升数学运算和逻辑推理能力。

教学重点 双曲线解析定义的建立和标准方程

为一个完整的人去完整地感知尽可能完整的世界。^[6]开课教师反思到如果椭圆定义这节课中教师能当场做GGB演示,那双曲线的定义就可以让学生参与进来,让学生自己做。这会让学生终生难忘,这种课才是最难能可贵的。课堂小结可以赋予自我评价的功能,从学生需求出发,改变以往课堂小结以教师为主体的一言堂形式,使其变革为在教师指导下的以学生为主体的课堂自主小结。^[7]因此在小结方面,要以人为本,要给学生展示的机会,PPT上只需要有“小结”两个字,让学生归纳并提出问题。通过一堂又一堂课的自主小结,逐渐培养学生自我评价的习惯和能力,满足学生自我实现的需求,树立学习自信心。

参考文献

[1] 人民教育出版社,课程教材研究所,中学数学课程教

材研究开发中心·普通高中教科书·数学选择性必修·第一册[M].北京:人民教育出版社,2019:118.

[2] 人民教育出版社,课程教材研究所,中学数学教材实验研究组.普通高中教科书数学(B版)·选择性必修·第一册[M].北京:人民教育出版社,2019:137-138.

[3] 苏教版高中数学教材编写组.普通高中教科书·数学(选择性必修第一册)[M].江苏:江苏凤凰教育出版社,2019:88.

[4] 陈大伟,观课议课的文化观念[J].教育与教学研究,2010(5):1-4.

[5] 中华人民共和国教育部.普通高中数学课程标准(2017年版)[M].北京:人民教育出版社,2018:14.

[6] 吴康宁.信息技术“进入”教学的四种类型[J].课程·教材·教法,2012,32(2):10-14.

[7] 王立峰,董玉红.以课堂小结促自我评价[J].现代中小学教育,2017,33(7):24-26.