注重思想方法 落实核心素养

——以方程思想为例

◉四川省康定中学 朱顺军 周 江

摘 要:数学解题的目的是什么?是完成数学知识的学习,是培养数学思想方法,还是培养数学素养,甚至说是为了做对更多题目,以求考得好的分数,进入一个好的大学?其实这些本身本就不是矛盾体,而是相辅相成的统一体.但是盲目乱做题,不讲方法地搞题海战术,对数学核心素养的培养意义不大.研究数学知识的教学方法,研究数学解题方法,本身就是培养数学核心素养的关键.函数与方程思想作为高中数学中的重要思想方法,在很多时候能够巧妙地解决一些数学难题.本文以高中数学教学过程中难度较大的几个知识点为例,谈谈如何渗透方程思想的应用,落实核心素养的培养.

关键词:方程思想;核心素养;解不等式;分类讨论;解析几何

1 引言

在小学低年级阶段,经常出现一类题目,让无数的学生、家长、老师都感到头痛,这类问题列方程做很简单,可是那时候的孩子根本没有学过方程.到了高年级,学过方程后,这类问题便一下子变得简单了很多.到了中学阶段,特别是高中阶段,孩子们大量接触函数、方程和不等式的相关内容,发现函数与方程紧密联系,不等式与方程息息相关,函数、方程和不等式是紧密地联系在一起的,方程思想便有了更广阔的应用.巧用方程,不仅可以更加轻松地学好这些数学内容,也可以更好地培养学生多方面的数学核心素养.

2 案例分析

案例一:解不等式的通用方法——"定义域内解方程,分段验证行不行"

我们中学阶段所学的基本初等函数,在其定义域的每个小区间内都是连续函数,由这些基本初等函数通过加、减、乘、除四则运算后的组合函数和通过内外复合得到的复合函数在其定义域的每个特定区间内也是连续函数.结合零点存在性定理,我们便可以得到一个结论:任何连续函数,在其定义域的每个连续区间内,函数值无论从正数变成负数还是从负数变成正数,都会先变成零.因此,在解不等式时,我们可以将不等式改成等式(即方程),求出方程的根,再结合不等式对应函数的定义域,将未知数 x 分成多个区间,每个区间上取一个特殊值验证,特殊值可以使不等式成立,就能代表对应区间是不等式的解集.于是,只要我们能够准确解出方程的所有根并求出定义域,解不等式就不再是难事.在给学生讲不等式解法时总结出的一句话是:"定义域内解方程,分段验证行不行".下面举例分析:

例 1 解不等式 $\dfrac{\log_2 x+2x-3}{x-2}\leqslant 1$.

解析:将不等式改写为方程得:

$\dfrac{\log_2 x+2x-3}{x-2}=1$ 整理得 $\log_2 x+x-1=0$.

观察到函数 $y=\log_2 x$ 和 $y=x-1$ 均是增函数,故 $y=\log_2 x+x-1$ 也是增函数,因此该函数最多只有一个零点,即方程 $\log_2 x+x-1=0$ 最多只有一个根.容易观察到 $x=1$ 是该方程的根,同时要使表达式 $\dfrac{\log_2 x+2x-3}{x-2}$ 有意义则需 $x>0$ 且 $x\neq 2$,在数轴上标出不等式有意义的 x 的范围和方程的根,将数轴分为三段,如图 1:

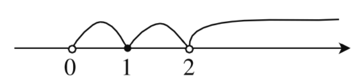

图 1

在 $(0,1]$ 上取 $x=\dfrac{1}{2}$ 代入表达式中得:

$$\frac{\log_2\frac{1}{2}+2\cdot\frac{1}{2}-3}{\frac{1}{2}-2}=\frac{\log_2 2^{-1}-2}{-\frac{3}{2}}=\frac{-3}{-\frac{3}{2}}=2>$$

1,即可代表该区间不满足题意;

在 $[1,2)$ 上取 $x=\dfrac{3}{2}$ 代入表达式中得:

万方数据

$$\frac{\log_2\frac{3}{2}+2\cdot\frac{3}{2}-3}{\frac{3}{2}-2}=\frac{\log_2\frac{3}{2}}{-\frac{1}{2}}=-2\log_2\frac{3}{2}<1,$$

代表该区间满足题意；

在$(2,+\infty)$上取 $x=4$ 代入表达式中得：

$\frac{\log_2 4+2\cdot 4-3}{4-2}=\frac{7}{2}>1$,代表该区间不满足题意.

将验证结果填入表中,即可得该不等式的解集为:$[1,2)$.

点评：不等式题目一般都有多种解法,采用"定义域内解方程,分段验证行不行"的解法可以达到"万法归一"的效果,学生采用这种方法解题,不仅能够提高正确率,同时在落实数学抽象、数学运算和数据分析等核心素养方面起到很好的作用.

案例二:分类讨论的套路——"含参讨论莫慌张,方程思想来帮忙"

分类与整合思想是高中数学重要思想方法之一,含参问题的分类讨论便是利用这一思想方法解题的最好体现.然而,这类题目的难度通常也很大,老师不讲,让学生看参考答案的话,常常会让学生看得一头雾水.因此老师们必须带着学生追根溯源,把分类讨论问题的本质给弄明白,学生方能灵活掌握这类题型.

事实上,绝大部分分类讨论的问题都和不等关系相关,因此分类讨论的关键在于解不等式,解不等式的关键又在于解方程.下面举例分析：

例2 解不等式 $ax^2-(2a^2+a+1)x+2a+1<0$.

解析:首先对本题中的不等式进行定性分析：

当 $a=0$ 时,该不等式不是二次不等式,可解得 $x>1$,因此 $a=0$ 是分类的一个关键点.

当 $a\neq 0$ 时,该不等式是一个二次不等式,需要考虑到 a 的正负会影响对应二次函数的开口方向.接着往后操作,我们将不等式改写成方程：

$ax^2-(2a^2+a+1)x+2a+1=0$,

因式分解可得:$(ax-1)(x-2a-1)=0$,

可解得 $x=\frac{1}{a}$ 或 $x=2a+1$.

于是,$\frac{1}{a}$ 和 $2a+1$ 便成为解不等式时分段的关键点.可问题是 $\frac{1}{a}$ 和 $2a+1$ 谁大谁小呢?只能先比较一下.这又会产生一个新的不等式问题,既然如此,先考虑两者相等.由 $\frac{1}{a}=2a+1$ 可解得 $a=-1$ 和 $a=\frac{1}{2}$,这是 $\frac{1}{a}$ 和 $2a+1$ 谁大谁小的关键点.结合 $a=0$ 这个关键点,本题分类讨论便清晰了.将 $a=-1$、$a=0$ 和 $a=\frac{1}{2}$ 都标在数轴上,可将数轴分为7个部分.

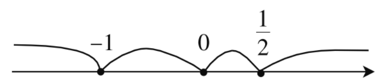

图2

于是,解答如下：

当 $a<-1$ 时,不等式对应的二次函数开口向下,此时 $2a+1<\frac{1}{a}$,解集为 $(-\infty,2a+1)\cup\left(\frac{1}{a},+\infty\right)$；

当 $a=-1$ 时,不等式对应的二次函数开口向下,此时 $2a+1=\frac{1}{a}=-1$,解集为 $(-\infty,-1)\cup(-1,+\infty)$；

当 $-1<a<0$ 时,不等式对应的二次函数开口向下,此时 $\frac{1}{a}<2a+1$,解集为 $\left(-\infty,\frac{1}{a}\right)\cup(2a+1,+\infty)$；

当 $a=0$ 时,该不等式不是二次不等式,解集为 $(1,+\infty)$；

当 $0<a<\frac{1}{2}$ 时,不等式对应的二次函数开口向上,此时 $2a+1<\frac{1}{a}$,解集为 $\left(2a+1,\frac{1}{a}\right)$；

当 $a=\frac{1}{2}$ 时,不等式对应的二次函数开口向上,此时 $2a+1=\frac{1}{a}=2$,解集为 $\varnothing$；

当 $a>\frac{1}{2}$ 时,不等式对应的二次函数开口向上,此时 $\frac{1}{a}<2a+1$,解集为 $\left(\frac{1}{a},2a+1\right)$.

点评：本题不等式的定性分析、对应二次函数的开口方向和对应二次方程两根的大小,三者都是分类讨论的依据,学生很难处理好三者的关系,于是先从两根相等入手得到 $a=-1$ 和 $a=\frac{1}{2}$,再结合 $a=0$,便轻松地找到了分类讨论的分段点.

这类题目综合能力要求强,难度颇大,通常在高考函数与导数的解答中考查.函数与方程思想、分类与整合思想、数学结合思想、转化与化归思想在这一类题目里面都可以得到较好的体现.练习这类题目,对学生数学抽象、数学推理、数学运算、数据分析等四个方面的核心素养的提升有巨大帮助.

(下转第50页)

万方数据

函数之间的桥梁,巧用三角换元,使计算变得简便.

例3 (2021年新高考八省联考试题)已知函数 $f(x)=\sqrt{1-x}+\sqrt{x+3}$ 的最大值为 M,最小值为 N,则 $\frac{M}{N}$ 的值为______.

分析:本题考查的是求无理式函数最值的问题,这是高中数学一个难点,将代数问题三角化,激发学生的应变能力,会使过程有趣.

解:令 $\sqrt{1-x}=s$,$\sqrt{x+3}=t$,则 $s^2+t^2=4(s\geqslant 0,t\geqslant 0)$.

可设 $s=2\cos\theta,t=2\sin\theta,\theta\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$,则 $f(x)=s+t=2\cos\theta+2\sin\theta=2\sqrt{2}\sin\left(\theta+\frac{\pi}{4}\right)$.

由 $\theta\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$,得 $\theta+\frac{\pi}{4}\in\left[\frac{\pi}{4},\frac{3\pi}{4}\right]$,$\sin\left(\theta+\frac{\pi}{4}\right)\in\left[\frac{\sqrt{2}}{2},1\right]$,则 $f(x)\in[2,2\sqrt{2}]$,所以 $M=2\sqrt{2}$,$N=2$,$\frac{M}{N}=\sqrt{2}$.

点评:无理式转化成有理式是解此题的关键,通过平方、换元将之变成我们熟知的函数类型.而三角换元,更能发展学生的特色思维,个性思维.

例4 (2021年浙大自主招生考试题)设 x、y 为实数,且满足 $x^2+2xy-y^2=7$,求 x^2+y^2 的最小值.

分析:该题条件是以二次齐次式的形式给出,达到求二元最值的目的.比较容易想到三角换元,但是如何利用 $\sin^2+\cos^2=1$ 构造变量是相当关键的,也是三角换元进行下去的基础.

解:设 $x^2+y^2=t^2$,令 $x=t\cos\theta,y=t\sin\theta$,代入 $x^2+2xy-y^2=7$ 中,得 $t^2(\cos^2\theta-\sin^2\theta)+t^2\sin 2\theta=7$,即 $t^2(\cos 2\theta+\sin 2\theta)=7$,得 $t^2=\frac{7}{\cos 2\theta+\sin 2\theta}$,显然 $(t^2)_{\min}=\frac{7}{\sqrt{2}}=\frac{7\sqrt{2}}{2}$,故 $(x^2+y^2)_{\min}=\frac{7\sqrt{2}}{2}$.

点评:本来借鉴圆锥曲线的参数方程换元,而条件中的“xy”项让人戛然而止,所以把欲求的量换元,这种逆向思维又让此题豁然开朗.

3 结语

高中数学解题中,换元有着非常重要的地位,也有非常重要的研究价值.上述考题来源于高考或模考,题干简单,但解题难度比较大,引入三角换元进行求解,构思精妙,让人耳目一新.为此,作者认为:开展多元化的课堂活动,引导一题多解,并开展针对性的训练,利于拓展学生的思维能力和发展学生的数学才能.

参考文献:

[1]余志宏.代换法求最值十二曲[J].中学生理科应试,2019(4).
[2]张琴语.七用“代换法”[J].中学数学研究(广州),2020(7).W

(上接第42页)

3 数学知识教学、数学思想方法与数学核心素养的关系

数学思想方法存在并发生于数学知识教学的过程中,数学学科核心素养的培育也是依赖于具体的知识建构过程的.那么很显然,数学思想方法与数学学科核心素养之间,就存在对应关系.数学特级教师曹培英将核心素养分为两个层面,即数学思想方法层面和数学内容领域层面.可见数学核心素养是数学思想方法的上位概念.在完成教学内容的过程中,重视学生数学思想方法的培养,方能真正落实核心素养的培养.

而在我们的实际教学中,我们是不是在完成数学知识的教学过程中,利用数学思想方法去指导数学教学和数学解题,在数学教学和解题的过程中去落实核心素养的培养呢?于是就有了新的理解:数学知识教学是根本是载体,数学思想方法是工具,数学核心素养是目的.

参考文献:

[1]张文贵.数学思想方法与数学学科核心素养的关系探究[J].数学教学通讯(小学版),2020(1).
[2]朱顺军.论高中数学方程思想的妙用——浅谈列表法解不等式[J].中学生数理化,2020(3).
[3]文卫星.构建生态课堂落实核心素养[J].中学数学教学参考,2020(5).W

万方数据