$b|\}\leqslant 2$,由规划知识可得$|a|+|b|\leqslant 3$.

4. 捕捉衔接点,合理讨论解题

形如$f(x)=|g(x)|+t(x)$的函数在区间$[a,b]$上最值得讨论问题,是对学生分类讨论能力进行考察的重要载体,许多参考答案中,讨论的区间都是从天而降,学生能够感叹其精妙去不能生成共鸣.事实上,此类问题也是有迹可循的.立足于衔接点在原函数图像中位置的分布,是解决此类问题的关键所在.

例4 设函数$f(x)=|x^2-a|-ax-1,a\in\mathbf{R}$.若$f(x)$在$[1,2]$上的最小值为$g(a)$,求$g(a)$的表达式.

解析:$f(x)=|x^2-a|-ax-1=$
$\begin{cases}x^2-ax-a-1,x^2\geqslant a,\\-x^2-ax+a-1,x^2<a.\end{cases}$显然,此写法存在分类讨论的依据.

当$a\leqslant 0$时,不需要写作分段的形式(不存在$x^2<a$),$f(x)=x^2-ax-a-1$,$g(a)=g(1)=-2a$;当$a>0$时,需要写成分段的形式,此时讨论衔接点$x=\pm\sqrt{a}$与$x=\pm\dfrac{a}{2}$(两部分的对称轴)的关系即可.

①当$\sqrt{a}<\dfrac{a}{2}$,即$0<a<4$时满足$-\dfrac{a}{2}<-\sqrt{a}<\sqrt{a}<\dfrac{a}{2}$,如图2,此时,(i)若$1<\sqrt{a}<2\Rightarrow 1<a<4$,$f(x)$在$[1,\sqrt{a}]$上单调递减,在$[\sqrt{a},2]$上单调递增,所以$g(a)=f(\sqrt{a})=-a\sqrt{a}-1$;

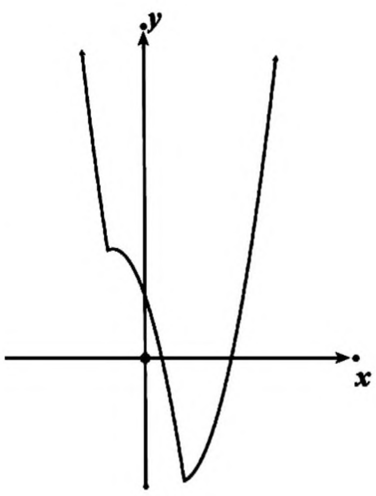

图2

(ii)若$0<\sqrt{a}<1\Rightarrow 0<a<1$,$f(x)$在$[1,2]$上单调递增,$g(a)=f(1)=-2a$.

②当$\sqrt{a}\geqslant\dfrac{a}{2}$,即$a\geqslant 4$时满足$-\sqrt{a}<-\dfrac{a}{2}<\dfrac{a}{2}<\sqrt{a}$,此时,$f(x)$在$[1,2]$上单调递减,所以$g(a)=f(2)=-a-5$.

评析:利用衔接点与原函数单调性转换点之间的关系进行讨论,是解决这一问题的关键,也是分类讨论的依据.讨论过程中$a=1,4$的出现是有规律可循的,并非无逻辑的闪现.

练习7 已知函数$f(x)=x^2-1$,$g(x)=a|x-1|$.求$h(x)=|f(x)|+g(x)$在区间$[0,2]$的最大值$M(a)$.

解析:根据上述讨论方法可得

$$M(a)=\begin{cases}3+a,a\geqslant -3,\\0,a<-3.\end{cases}$$

练习8 已知$a\geqslant 3$,函数$F(x)=\max\{2|x-1|,x^2-2ax+4a-2\}$.(1)求使得$F(x)=x^2-2ax+4a-2$成立的$x$的取值范围;(2)①求$F(x)$的最小值$m(a)$;②求$F(x)$在区间$[0,6]$上的最大值$M(a)$.

解析:(1)略;(2)根据讨论方法可得

$$m(a)=\begin{cases}-a^2+4a+2,a>2+\sqrt{2},\\0,3\leqslant a\leqslant 2+\sqrt{2},\end{cases}$$

$$M(a)=\begin{cases}24-8a,3\leqslant a<4,\\2,a\geqslant 4.\end{cases}$$

绝对值函数自身所具有的代数性质,以及几何图形特征对于解决相应的问题有重要作用.从这两个角度出发捕捉适当的思维着力点,有助于提升问题解决的有效性.

用基本不等式求最值的破题五措施

甘肃省武威第十八中学 (733000) 高述文

在运用基本不等式求最值时,要注意使用“一正、二定、三相等”条件,而在寻找定值时,有时条件不够明显,常需要采用拆项、添项、变形、化简、换元等的技巧,这样化隐为显,使问题快速解决,本文通过举例分析、介绍几种常见的变换技巧,供参考.

1. 适当拼凑:考察所给的表达式,看如何能通过进行适当的变形使之达到正确使用基本不等式的条件,完成解题目标.

例1 已知$x<\dfrac{5}{4}$,求函数$y=4x-2+\dfrac{1}{4x-5}$的最大值.

解析:由于$x<\dfrac{5}{4}$,所以$4x-5<0$,则$5-4x>0$,所以$y=4x-2+\dfrac{1}{4x-5}=-(5-4x+\dfrac{1}{5-4x})+3\leqslant$

$-2+3=1$. 当且仅当 $5-4x=5-4x=\frac{1}{5-4x}$,即 $x=1$ 时等号成立,故当 $x=1$ 时,y 取最大值 1.

评注:通过提取“ - ”号首先解决“一正”问题,再配项,使 $(5-4x)\frac{1}{5-4x}$ 为定值,这样达到了“一正、二定、三相等”的条件.

例 2　已知实数 x、s、t 满足 $8x+9t=s$,且 $x>-s$,求 $\frac{x^2+(s+t)x+st+1}{x+t}$ 的最小值.

解析:由于 $x>-s$,则 $x+s>0$,这是用基本不等式的必要条件,又 $8x+9t=s$,则 $x+s=9(x+t)$,于是 $\frac{x^2+(s+t)x+st+1}{x+t}=\frac{(x+s)(x+t)+1}{x+t}=x+s+\frac{9}{x+s}\geqslant 2\sqrt{9}=6$,当且仅当 $x+s=3$ 时,上面式子取得最小值 6.

评注:本题容易出现误判,即没有抓住 $x+s>0$ 进行正确的配凑,而是把 $x+t$ 当着变元,使解题造成混乱得出错解或使解题无法进行下去.

2. **配方配项**:在题设中如果在分式的分子或分母中含有类似于二式三项式的,可通过及时配成关于父母(或分子)的二式三项式,这样后面的解题方法就能够显露出来了.

例 3　求函数 $y=\frac{x^2}{x-1}(x>1)$ 的最小值.

解析:由 $x>1$,得 $x-1>0$,所以 $x^2=(x-1)^2+2(x-1)+1$,故 $y=\frac{x^2}{x-1}=\frac{(x-1)^2+2(x-1)+1}{x-1}=x+1+\frac{1}{x-1}+2\geqslant 2+2=4$,当且仅当 $x-1=\frac{1}{x-1}$,即 $x=2$ 时,函数有最小值为 4.

评注:在理解题意的基础上,通过对分子配方(关于分母的平方),构造出能使积为定值式子,这是找准了解题的切入点.

例 4　若实数 a、b 满足 $ab-4a-b+1=0(a>1)$,求 $(a+1)(b+2)$ 的最小值.

解析:由 $a>1$ 得 $a-1>0$,由 $ab-4a-b+1=0$ 得 $b(a-1)-4(a-1)=3$,$b-4=\frac{3}{a-1}$,$b+2=\frac{6a-3}{a-1}$. $\therefore (a+1)(b+2)=\frac{(6a-3)(a+1)}{a-1}=\frac{6(a-1)^2+15(a-1)+6}{a-1}=6(a-1)+\frac{6}{a-1}+15\geqslant 6\times 2+15=27$. 当且仅当 $6(a-1)=\frac{6}{a-1}$,即 $a=2$ 时,$(a+1)(b+2)$ 取最小值为 27.

评注:本题中没有直接告诉相关的分式,通过挖掘已知条件,对条件等式和欲求的式子进行重新整理,再合理配方,构造出可用均值不等式求解式子,化解了问题的难点.

3. **及时相除**:在一些分式求最值问题中,通过对分式的分子、分母同时除一个适当的式子,可以发现能使用基本不等式解题的契机.

例 5　求函数 $y=\frac{2x}{x^2+4}(x>0)$ 的最大值.

解析:由 $x>0$,得 $y=\frac{2x}{x^2+4}=\frac{2}{x+\frac{4}{x}}\leqslant\frac{2}{2\sqrt{4}}=\frac{1}{2}$,当且仅当 $x=\frac{4}{x}$,即 $x=2$ 时,函数 y 取最大值为 $\frac{1}{2}$.

评注:通过分子、分母同除以 x,使分子为常数(必须是),同时也能使此时分母的积为定值,这样就达到了使用基本不等式解题的条件了.

例 6　已知函数 $f(x)=3x+a$ 与函数 $g(x)=3x+2a$ 在区间 (b,c) 上都有零点,求 $\frac{a^2+2ab+2ac+4bc}{b^2-2bc+c^2}$ 的最小值.

解析:由于函数 $f(x)=3x+a$ 与函数 $g(x)=3x+2a$ 在区间 (b,c) 上都有零点,则 $h(x)=3x+\frac{3}{2}a$ 在区间 (b,c) 上必有零点,于是 $(3b+\frac{3}{2}a)(3c+\frac{3}{2}a)<0$,即 $(a+2b)(a+2c)<0$,而 $\frac{a^2+2ab+2ac+4bc}{b^2-2bc+c^2}=\frac{(a+2b)(a+2c)}{(b-c)^2}=\frac{4(a+2b)(a+2c)}{[(a+2b)-(a+2c)]^2}=\frac{4}{\frac{a+2b}{a+2c}+\frac{a+2c}{a+2b}-2}\geqslant\frac{4}{-2-2}=-1$,当且仅当 $(a+2b)^2=(a+2c)^2$,即 $a+b+c=0$ 时,式子取得最小值为 -1.

评注:通过对题目的深入研究,挖掘了其中隐含的关系,即一个乘积式的符合确定,再整体思考、整体变形配凑,使问题终于得到解决,这是科学有序的思维品质的体现.

4. **连续放缩**:在一些相对复杂的式子中,经过一次放缩可能达不到目的,可以再一次进行放缩变换,直到符合要求,这里必须注意连续放缩所需的相等条件是一致的.

例 7　已知 $a>0,b>0$,求 $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+2\sqrt{ab}$ 的最小值.

解析:因为 $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+2\sqrt{ab}\geqslant 2\sqrt{\frac{1}{ab}}+2\sqrt{ab}=2(\sqrt{\frac{1}{ab}}+\sqrt{ab})\geqslant 4$,当且仅当 $\frac{1}{a}=\frac{1}{b}$ 且 $\sqrt{\frac{1}{ab}}=\sqrt{ab}$,即有 $a=b$ 时等号成立,于是 $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+2\sqrt{ab}$ 的最小值为 4.

评注:本题虽然用了基本不等式放缩两次,但由于等号成立的条件是一样的且缩小的方向一致,故而并不影响最小值的确定,如果等号成立的条件不一样或方向不一致,则得出的结果肯定是错误的,必须引起重视.

例 8　已知 $a>0,b>0,c>2$,且 $a+b=2$,求 $\frac{ac}{b}+\frac{c}{ab}-\frac{c}{2}+\frac{\sqrt{5}}{c-2}$ 的最小值.

解析:由 $a+b=2$,则 $\frac{a}{b}+\frac{1}{ab}-\frac{1}{2}=\frac{a}{b}+\frac{1}{4}\frac{(a+b)^2}{ab}-\frac{1}{2}=\frac{a}{b}+\frac{1}{4}(\frac{a}{b}+2+\frac{b}{a})-\frac{1}{2}=\frac{5}{4}\frac{a}{b}+\frac{1}{4}\frac{b}{a}\geqslant\frac{\sqrt{5}}{2}$;又 $c>2$,则 $c-2>0$ 于是 $\frac{ac}{b}+\frac{c}{ab}-\frac{c}{2}+\frac{\sqrt{5}}{c-2}=c(\frac{a}{b}+\frac{1}{ab}-\frac{1}{2})+\frac{\sqrt{5}}{c-2}\geqslant\frac{\sqrt{5}}{2}c+\frac{\sqrt{5}}{c-2}=\sqrt{5}(\frac{c-2}{2}+\frac{1}{c-2})+\sqrt{5}\geqslant\sqrt{10}+\sqrt{5}$. 当且仅当 $b=\sqrt{5}a$ 且 $c=2+\sqrt{2}$ 时等号成立,所以原式的最小值为 $\sqrt{10}+\sqrt{5}$.

评注:本题中的字母较多,条件也不少,如何适当使用是解题关键,而本解法中分两次运用基本不等式求解,方法独到,简便合理.

5. **灵活换元**:抓住题设中的某些特殊结构进行类比联想,再通过换元对原式进行改造,可发现破题的机会,完成解题任务.

例 9　若 $a>0,b>0$,且 $\frac{1}{2a+b}+\frac{1}{b+1}=1$,则 $a+b$ 的最小值为________.

解析:由于 $a>0,b>0$,且 $\frac{1}{2a+b}+\frac{1}{b+1}=1$,则可设 $\frac{1}{2a+b}=\cos^2\alpha,\frac{1}{b+1}=\sin^2\alpha$,于是 $2a+b+b+1=2(a+b)+1=\frac{1}{\cos^2\alpha}+\frac{1}{\sin^2\alpha}=2+\frac{\sin^2\alpha}{\cos^2\alpha}+\frac{\cos^2\alpha}{\sin^2\alpha}\geqslant 2+2=4$,所以 $a+b\geqslant\frac{3}{2}$. 即 $a+b$ 的最小值为 $\frac{3}{2}$.

评注:若在题设中含有两个正项和为 1(或某个特定的值),可以选用三角换元,这样就可以利用三角函数的知识进行变形求解,达到解题目的.

例 10　若实数 x,y 满足 $2x^2+xy-y^2=1$,求 $\frac{x-2y}{5x^2-2xy+2y^2}$ 的最大值.

解析:由 $2x^2+xy-y^2=1$ 得 $(2x-y)(x+y)=1$,设 $a=2x-y,b=x+y$,则 $ab=1,x=\frac{1}{3}(a+b)$,$y=\frac{1}{3}(-a+2b)$ $x-2y=a-b$;$5x^2-2xy+2y^2=5x^2-2(xy-y^2)=9x^2-2=a^2+b^2$,于是 $\frac{x-2y}{5x^2-2xy+2y^2}=\frac{a-b}{a^2+b^2}\leqslant\frac{|a-b|}{(a-b)^2+2}=\frac{1}{|a-b|+\frac{2}{|a-b|}}\leqslant\frac{1}{2\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{4}$. 当且仅当 $|a-b|=\sqrt{2}$ 时等号成立,即此时取最大值为 $\frac{\sqrt{2}}{4}$.

评注:本题通过对所给的式子进行变形,然后对其中的特定结构进行换元处理,用新变量替换原来的变量,揭露了隐含的关系,为顺利解题创造了条件.

上面讲述了使用基本不等式求最值的五个破题措施,常见而实用,如果我们在教学中能够让学生掌握并领会了这些解题方法,那么学生在应试时遇到这些题目可能就信心满满了.